El problema de las *n*-reinas

Introducción:

Cuando era pequeño me pasaba horas y horas en el ordenador de mi padre buscando todo tipo de juegos que me supusieran un reto. Encontraba juegos típicos como el de la oveja, la col y el lobo, donde tenías que cruzar un río con una barca con el objetivo de dejar todos los elementos en la otra orilla sabiendo que si dejabas al lobo solo con la oveja, este se la comería y si dejabas a la oveja con la col sola, lo mismo. Este tipo de juegos a mi corta edad me suponían un reto durante unos 20 o 30 minutos. Hasta que un día encontré el problema de las 8 reinas que nunca logré conseguir una solución.

El problema consiste en colocar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8x8) sin que ninguna de estas se ataquen entre ellas. Cabe recordar que la reina en el ajedrez se puede mover el número de casillas que se desee en horizontal, vertical o diagonal. (Figura 1.1)

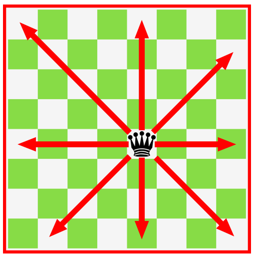

Figura 1.1

Este problema fue propuesto en 1848 por el ajedrecista Max Bezzel. Este juego ha sido un gran problema matemático que ha sido tratado por matemáticos como Gauss y Georg Cantor. El juego se puede modificar al número de reinas y al tamaño del tablero que se quiera creando así un juego generalizado de n-reinas en un tablero nxn.

En este trabajo se explorarán las diferentes soluciones que el juego da dependiendo del número de reinas y del tamaño del tablero generando así un método general que sirva para cualquier n.

Investigación:

Mi investigación comenzó buscando una manera de conseguir dar una solución de forma matemática que pudiese servirme para el trabajo. Tras una larga búsqueda, pensé que una manera de hacerlo era con determinantes ya que así en ningún sumando del mismo puede haber dos términos que estén en la misma fila o columna. De este manera ya tenía pensado como deshacerme de que no coincidieran las columnas y filas, pero quedaba que las diagonales no lo hicieran. Para ello se puso en una diagonal la misma letra y en la otra, el mismo subíndice, de tal manera que si en cualquier sumando del determinante no hubiese ninguno que coincidiese, indicase que existe solución. El problema de realizarlo con determinantes es que para n>4, los determinantes comienzan a ser tediosos y largos por lo que no sabía si llegaría a conseguir soluciones para n grandes. De todas formas me propuse llegar hasta el primero que supusiese un reto.

Para n=2 y n=3

Comencé realizando los dos problemas más simples, que son para ***n*=2**, es decir, dos reinas en un tablero 2x2 y para ***n*=3**, o sea, tres reinas en un tablero 3x3.

Para ello utilicé matrices donde cada columna representa una columna del tablero y cada fila representa una fila del mismo. Además, cada término es una celda con una letra distinta y un subíndice que indica la posición que este mantiene en el tablero siguiendo un orden ascendente tanto por filas como por columnas.

Para que la solución del problema sea correcta, cualquier término sumatorio del determinante tiene que tener una letra y un subíndice distinto del resto.

El primer determinante, para *n*=2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ \beta_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_3 - b_2 \cdot \beta_2$$

Como podemos observar, no existen soluciones debido a que en el primer término coincide la a y en el segundo coincide el subíndice 2. Gracias a realizar este determinante más sencillo he podido concluir cómo se demostraban el resto de n>2 ya que se puede observar a simple vista que coloques donde coloques las reinas van a ser siempre atacadas ya que, como se dijo anteriormente, atacan en horizontal, vertical o diagonal.

El determinante para *n*=3 es:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 \\ \beta_2 & a_3 & b_4 \\ \zeta_3 & \beta_4 & a_5 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 + \beta_2 \cdot c_3 \cdot \beta_4 + \zeta_3 \cdot b_2 \cdot b_4 - c_3 \cdot a_3 \cdot \zeta_3 - b_4 \cdot a_1 \cdot \beta_4 - a_5 \cdot b_2 \cdot \beta_2$$

Nuevamente no obtenemos ninguna solución para el problema para n=3 ya que en el primer término coinciden las a, en el segundo las *ß,* en el tercero las b, en el cuarto el subíndice 3, en el quinto el subíndice 4 y, en el último, el 2.

Por ahora observamos que para n pequeñas no existe solución ya que el espacio para el cual se pueden colocar las distintas reinas es muy pequeño por lo que siempre hay alguna que ataque a otra como hemos se puede ver gracias a los determinantes aplicados para cada n.

Para n=4

El determinante a tratar para n=4 es:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 \\ \zeta_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 \\ \delta_4 & \zeta_5 & \beta_6 & a_7 \end{vmatrix}$$

Para realizar un determinante de orden 4 es necesario hacer menores de una fila o columna que se elija para poder hacer un determinante de orden 3 multiplicado por el término que hace el menor. Para llevar a cabo los cálculos se eligió la primera fila.

Se realizaron 4 menores, uno con cada término de la primera fila dando lugar a 2 soluciones para el problema de n=4:

$$\begin{vmatrix} a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \\ \beta_2\, a_3\, b_4\, c_5 \\ \zeta_3\, \beta_4\, a_5\, b_6 \\ \delta_4\, \zeta_5\, \beta_6\, a_7 \end{vmatrix} \rightarrow a_1\cdot(a_3\cdot a_5\cdot a_7+\beta_4\cdot c_5\cdot\beta_6+\zeta_5\cdot b_4\cdot b_6-c_5\cdot a_5\cdot\zeta_5-b_6\cdot a_3\cdot\beta_6-a_7\cdot b_4\cdot\beta_4)$$

Con este menor no hubo suerte ya que en todos los términos del sumatorio coincidía o una letra o un subíndice. El siguiente menor a realizar fue b_2:

$$\begin{vmatrix} a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \\ \beta_2\, a_3\, b_4\, c_5 \\ \zeta_3\, \beta_4\, a_5\, b_6 \\ \delta_4\, \zeta_5\, \beta_6\, a_7 \end{vmatrix} \rightarrow b_2\cdot(\beta_2\cdot a_5\cdot a_7+\boxed{\zeta_3\cdot c_5\cdot\beta_6}+\zeta_4\cdot b_4\cdot b_6-c_5\cdot a_5\cdot\delta_4-b_6\cdot\beta_2\cdot\beta_6-a_7\cdot b_4\cdot\zeta_3)$$

Como podemos observar, el segundo término del sumatorio contiene 4 letras y 4 subíndices diferentes entre ellos por lo que es una solución al problema. Esta solución se podría nombrar como: $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{\zeta_3}$, $\boldsymbol{c_5}$, $\boldsymbol{\beta_6}$. (Figura 2.1) El siguiente menor realizado fue c_3:

$$\begin{vmatrix} a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \\ \beta_2\, a_3\, b_4\, c_5 \\ \zeta_3\, \beta_4\, a_5\, b_6 \\ \delta_4\, \zeta_5\, \beta_6\, a_7 \end{vmatrix} \rightarrow c_3\cdot(\beta_2\cdot\beta_4\cdot a_7+\zeta_3\cdot c_5\cdot\zeta_5+\delta_4\cdot a_3\cdot b_6-c_5\cdot\beta_4\cdot\delta_4-\boxed{b_6\cdot\beta_2\cdot\zeta_5}-a_7\cdot a_3\cdot\zeta_3)$$

De nuevo encontramos una solución en el quinto término ya que ninguna de las letras ni de los subíndices coincide por lo que es una solución al problema ya que ninguna está en la misma fila, ni columna ni diagonal que cualquier otra. La solución se nombra de la siguiente manera: $\boldsymbol{c_3}$, $\boldsymbol{b_6}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\zeta_5}$. (Figura 2.2) Por último, el menor de d_4:

$$\begin{vmatrix} a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \\ \beta_2\, a_3\, b_4\, c_5 \\ \zeta_3\, \beta_4\, a_5\, b_6 \\ \delta_4\, \zeta_5\, \beta_6\, a_7 \end{vmatrix} \rightarrow d_4\cdot(\beta_2\cdot\beta_4\cdot\beta_6+\zeta_3\cdot b_4\cdot\zeta_5+\delta_4\cdot a_3\cdot a_5-b_4\cdot\beta_4\cdot\delta_4-a_5\cdot\beta_2\cdot\zeta_5-\beta_6\cdot a_3\cdot\zeta_3)$$

En este menor, al igual que con el primero, observamos que no existe solución alguna ya que en todos coinciden tanto letras como subíndices por lo que de esa manera las reinas se atacarán entre ellas.

Por tanto, las soluciones para colocar 4 reinas que no se ataquen entre ellas en un tablero 4x4 serían 2 soluciones fundamentales pero que en realidad serían 8 ya que si giras el tablero, sigue siendo una solución válida.

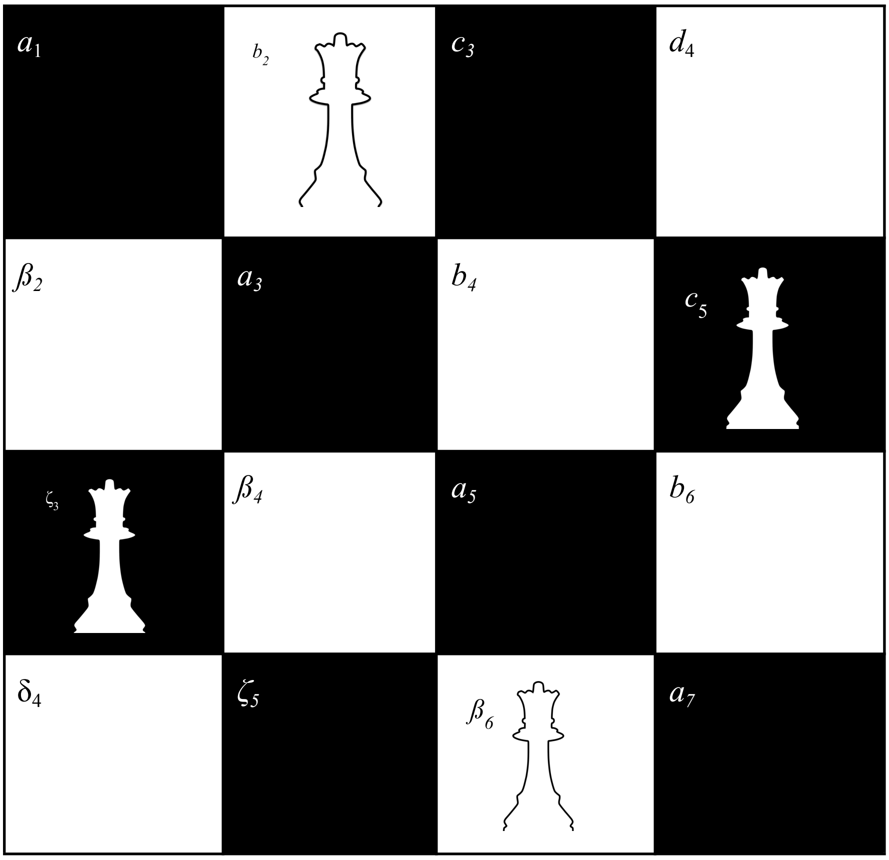

Figura 2.1

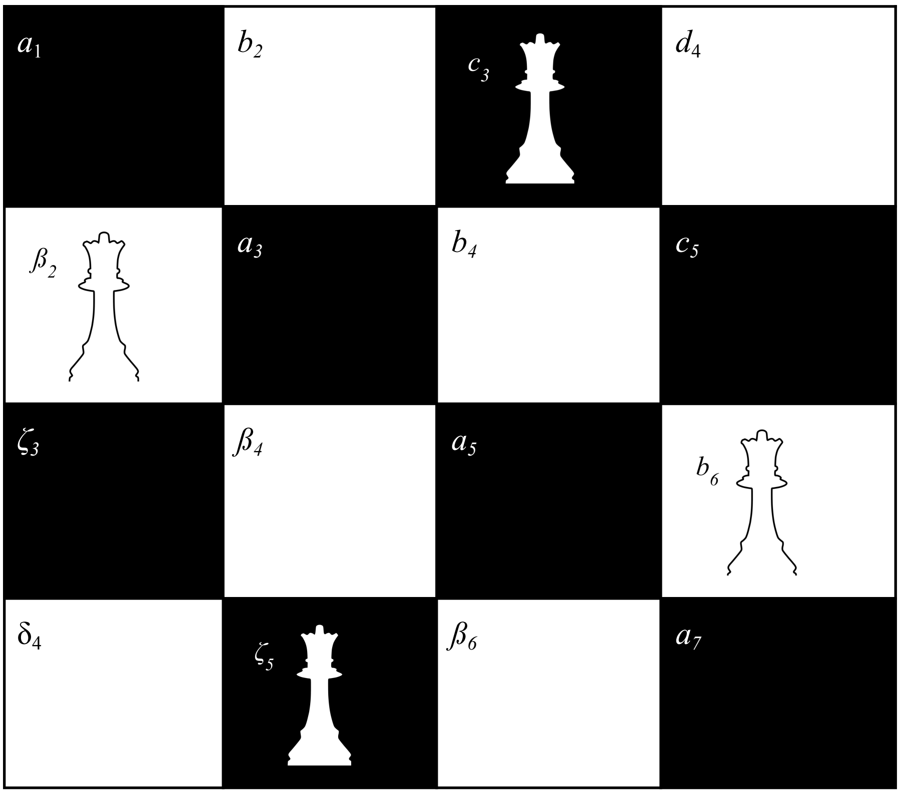

Figura 2.2

Al observar que no hay ninguna solución en la que una reina esté posicionada en las esquinas, me dí cuenta de que esto sucede porque el tablero, al igual que el determinante, es simétrico y que, por ello, haciendo el menor de una de las esquinas, se conocerían todas las soluciones.

Para n=5

El determinante a utilizar para conseguir las soluciones del problema para n=5 es, obviamente de orden 5 y es:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\ \zeta_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ \delta_4 & \zeta_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \zeta_7 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

Para poder abarcar con totalidad las soluciones que nos interesan sin tener que hacer el determinate entero, lo cual nos llevaría mucho tiempo y trabajo para cada uno de los determinantes, haremos los menores de a_1, b_2 y c_3 ya que los menores d_4 y e_5 son simétricos y, por tanto iguales, a b_2 y a a_1 respectivamente.

Menor de a_1

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\ \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ \zeta_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\ \delta_6 & \zeta_7 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

Continuaremos haciendo los menores del determinante adjunto en el cual, como ya sabemos de nuestro caso n=4, solamente hace falta hacer los tres primeros menores (a_3, b_4 y c_5) ya que el d_4 es simétrico a la otra esquina, a_3.

El primer menor a realizar, a_3, ya coincide con el a_1 por lo que no hace falta continuar con ese menor ya que no puede existir una solución debido a su coincidencia. Por esa razón, el menor que realizaremos completamente será el de b_4:

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\ \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ \zeta_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\ \delta_6 & \zeta_7 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix} = a_1 \cdot (-b_4) \cdot \begin{vmatrix} \beta_4 & b_6 & c_7 \\ \zeta_5 & a_7 & b_8 \\ \delta_6 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix} a_1 \cdot (-b_4) \cdot (\beta_4 \cdot a_7 \cdot a_9 + \boxed{\zeta_5 \cdot c_7 \cdot \beta_8} + \delta_6 \cdot b_6 \cdot b_8 - c_7 \cdot a_7 \cdot \delta_6 - b_8 \cdot \beta_4 \cdot \beta_8 - a_9 \cdot b_6 \cdot \zeta_5)$$

______Al realizar el menor de b_4 encontramos una solución al problema para n=5, que es: $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{b_4}$, $\boldsymbol{\zeta_5}$, $\boldsymbol{c_7}$, $\boldsymbol{\beta_8}$. El siguiente y último menor a realizar c_5:

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_3\, b_4\, c_5\, d_6 \\ \beta_4\, a_5\, b_6\, c_7 \\ \zeta_5\, \beta_6\, a_7\, b_8 \\ \delta_6\, \zeta_7\, \beta_8\, a_9 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_5) \cdot \begin{vmatrix} \beta_4\, b_6\, c_7 \\ \zeta_5\, a_7\, b_8 \\ \delta_6\, \beta_8\, a_9 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_5 \cdot (\beta_4 \cdot \beta_6 \cdot a_9 + \zeta_5 \cdot c_7 \cdot \zeta_7 + \delta_6 \cdot a_5 \cdot b_8 - c_7 \cdot \beta_6 \cdot \delta_6 - \boxed{b_8 \cdot \beta_4 \cdot \zeta_7} - a_9 \cdot a_5 \cdot \zeta_5)$$

Observamos que existe una solución en el penúltimo sumatorio del determinante donde no coincide ninguna letra ni subíndice como pasa en el resto de los sumatorios del mismo. Por tanto, una segunda solución al problema es: $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{c_5}$, $\boldsymbol{b_8}$, $\boldsymbol{\beta_4}$, ζ_7.

Menor b_2

$$(-b_2) \cdot \begin{vmatrix} \beta_2\, b_4\, c_5\, d_6 \\ \zeta_3\, a_5\, b_6\, c_7 \\ \delta_4\, \beta_6\, a_7\, b_8 \\ \varepsilon_5\, \zeta_7\, \beta_8\, a_9 \end{vmatrix}$$

En este caso sí que se necesitan realizar los 4 menores adjuntos debido a que la posición de β_2 y d_6 en el tablero no es simétrica porque realmente en el tablero los encontraríamos una fila más alejada. Esto se puede ver ya que de la columna del β_2 a la de b_4 falta una columna entera, que sería la de a_3, que no está porque al hacer el adjunto de b_2, esta desaparece.

Por lo tanto los únicos adjuntos que debemos realizar en el menor de b_2 son el de c_5 y el de d_6 porque con el primero coincide en el subíndice y con el segundo, con la letra.

El primer menor a realizar es c_5:

$$(-b_2) \cdot \begin{vmatrix} \beta_2\, b_4\, c_5\, d_6 \\ \zeta_3\, a_5\, b_6\, c_7 \\ \delta_4\, \beta_6\, a_7\, b_8 \\ \varepsilon_5\, \zeta_7\, \beta_8\, a_9 \end{vmatrix} = (-b_2) \cdot c_5 \cdot \begin{vmatrix} \zeta_3\, a_5\, c_7 \\ \delta_4\, \beta_6\, b_8 \\ \varepsilon_5\, \zeta_7\, a_9 \end{vmatrix} = (-b_2) \cdot c_5 \cdot (\boxed{\zeta_3 \cdot \beta_6 \cdot a_9} + \delta_4 \cdot c_7 \cdot \zeta_7 + \varepsilon_5 \cdot a_5 \cdot b_8 - c_7 \cdot \beta_6 \cdot \varepsilon_5 - b_8 \cdot \zeta_3 \cdot \zeta_7 - a_9 \cdot a_5 \cdot \delta_4)$$

Volvemos a encontrar otra solución en el primer sumatorio del determinante pero en el resto siempre hay o un subíndice o una letra que coinciden. Se puede expresar la solución como: $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{c_5}$, $\boldsymbol{\zeta_3}$, $\boldsymbol{\beta_6}$, $\boldsymbol{a_9}$. El último adjunto a realizar es el de d_6:

$$(-b_2) \cdot \begin{vmatrix} \beta_2\, b_4\, c_5\, d_6 \\ \zeta_3\, a_5\, b_6\, c_7 \\ \delta_4\, \beta_6\, a_7\, b_8 \\ \varepsilon_5\, \zeta_7\, \beta_8\, a_9 \end{vmatrix} = b_2 \cdot d_6 \cdot \begin{vmatrix} \zeta_3\, a_5\, b_6 \\ \delta_4\, \beta_6\, a_7 \\ \varepsilon_5\, \zeta_7\, \beta_8 \end{vmatrix} = b_2 \cdot d_6 \cdot (\zeta_3 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8 + \delta_4 \cdot b_6 \cdot \zeta_7 + \varepsilon_5 \cdot a_5 \cdot a_7 - b_6 \cdot \beta_6 \cdot \varepsilon_5 - a_7 \cdot \zeta_3 \cdot \zeta_7 - \boxed{\beta_8 \cdot a_5 \cdot \delta_4})$$

Observamos que en todos los sumatorios del determinante existe una coincidencia excepto en el último, que da una solución: $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{d_6}$, $\boldsymbol{\beta_8}$, $\boldsymbol{a_5}$, $\boldsymbol{\delta_4}$.

Menor de c_3

$$c_3 \cdot \begin{vmatrix} \beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 \\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 \\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

Por la misma razón que para el menor de b_2, se deben hacer los 4 menores adjuntos a él. Debido a las coincidencias con el segundo y el tercero por su subíndice y letra, respectivamente, solo habrá que tratar a los menores de las esquinas como posibles soluciones. Por tanto, el primer menor a realizar es el de β_2:

$$c_3 \cdot \begin{vmatrix} \beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 \\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 \\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix} = c_3 \cdot \beta_2 \cdot \begin{vmatrix} \beta_4 & b_6 & c_7 \\ \zeta_5 & a_7 & b_8 \\ \delta_6 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix} = c_3 \cdot \beta_2 \cdot (\beta_4 \cdot a_7 \cdot a_9 + \zeta_5 \cdot c_7 \cdot \beta_8 + \delta_6 \cdot b_6 \cdot b_8 - c_7 \cdot a_7 \cdot \delta_6 - b_8 \cdot \beta_4 \cdot \beta_8 - \boxed{a_9 \cdot b_6 \cdot \zeta_5})$$

De nuevo observamos una solución en el último sumatorio cuya nomenclatura sería: ***c_3, β_2, a_9, b_6,*** ζ_5. Por otro lado el determinante del menor d_6 sería:

$$c_3 \cdot \begin{vmatrix} \beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 \\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 \\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix} = c_3 \cdot (-d_6) \cdot \begin{vmatrix} \zeta_3 & \beta_4 & b_6 \\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 \end{vmatrix} = c_3 \cdot (-d_6) \cdot (\zeta_3 \cdot \zeta_5 \cdot \beta_8 + \delta_4 \cdot b_6 \cdot \delta_6 + \boxed{\varepsilon_5 \cdot \beta_4 \cdot a_7} - b_6 \cdot \zeta_5 \cdot \varepsilon_5 - a_7 \cdot \zeta_3 \cdot \delta_6 - \beta_8 \cdot \beta_4 \cdot \delta_4)$$

Por último, en este menor encontramos una nueva solución en el tercer sumatorio: ***c_3, d_6, ε_5, β_4, a_7***.

Con esto daríamos por concluido el problema para n=5 cuyas soluciones realmente serían dos ya que al colocarlas en el tablero observamos que muchas de las que hemos encontrado son iguales pero girando el tablero. Las soluciones iguales son b_2, c_5, ζ_3, β_6, a_9 con a_1, b_4, ζ_5, c_7, β_8 y con c_3, d_6, ε_5, β_4, a_7, y a_1, c_5, b_8, β_4, ζ_7 con c_3, β_2, a_9, b_6, ζ_5 por lo que solamente hay dos soluciones fundamentales las cuales serían: ***a_1, c_5, b_8, β_4,*** ζ_7 y ***b_2, c_5,*** ζ_3, ***β_6, a_9***.

Para n=7

Al observar un ya un patrón y, por tanto, un método general para obtener la solución del problema hemos creído conveniente saltar a un determinante que nos pudiese suponer un reto para dar por finalizada la exploración, n=7.

El determinante a tratar sería:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 & f_6 & g_7 \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8 \\ \zeta_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \delta_4 & \zeta_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \zeta_7 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \delta_8 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \sigma_7 & \theta_8 & \varepsilon_9 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Como ya hemos explicado en repetidas ocasiones, para encontrar todas las soluciones al problema no es necesario hacer el determinante completo debido a que es simétrico. Por tanto, solo tendremos que hacer 4 menores de los 7 de la primera fila que en este caso serán a_1, b_2, c_3 y d_4.

Menor de a_1

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_4 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8 \\ \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \zeta_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \zeta_7 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \delta_8 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Debido a la simetría del determinante adjunto, para hallar soluciones no repetidas solo hace falta hacer los tres primeros menores, los cuales serían a_3, b_4 y c_5, pero a causa de la coincidencia con la letra *a* solo habrá que hacer los dos siguientes.

Por tanto, el primer menor a realizar es el de b_4.

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_4 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8 \\ \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \zeta_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \zeta_7 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \delta_8 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow a_1 \cdot (-b_4) \cdot \begin{vmatrix} \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow a_1 \cdot (-b_4) \cdot c_7 \cdot \begin{vmatrix} \zeta_5 & a_7 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \beta_8 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow a_1 \cdot (-b_4) \cdot c_7 \cdot \zeta_5 \cdot \begin{vmatrix} \beta_8 & b_{10} & c_{11} \\ \zeta_9 & a_{11} & b_{12} \\ \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_1 \cdot (-b_4) \cdot c_7 \cdot \zeta_5 \cdot (\beta_8 \cdot a_{11} \cdot a_{13} + \zeta_9 \cdot c_{11} \cdot \beta_{12} + \delta_{10} \cdot b_{10} \cdot b_{12} - c_{11} \cdot a_{11} \cdot \delta_{10} - b_{12} \cdot \beta_8 \cdot \beta_{12} - a_{13} \cdot b_{10} \cdot \zeta_9)$$

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_4 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8 \\ \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \zeta_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \zeta_7 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \delta_8 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow a_1 \cdot (-b_4) \cdot \begin{vmatrix} \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow a_1 \cdot (-b_4) \cdot c_7 \cdot \begin{vmatrix} \zeta_5 & a_7 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \beta_8 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow a_1 \cdot b_4 \cdot c_7 \cdot d_{10} \cdot \begin{vmatrix} \delta_6 & \beta_8 & b_{10} \\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11} \\ \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12} \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_4 \cdot c_7 \cdot d_{10} \cdot (\boxed{\delta_6 \cdot \zeta_9 \cdot \beta_{12}} + \varepsilon_7 \cdot b_{10} \cdot \delta_{10} + \theta_8 \cdot \beta_8 \cdot a_{11} - b_{10} \cdot \zeta_9 \cdot \theta_8 - a_{11} \cdot \delta_6 \cdot \delta_{10} - \beta_{12} \cdot \beta_8 \cdot \varepsilon_7)$$

Durante las operaciones de este menor nos hemos encontrado con diversas coincidencias. Primeramente, en el ajunto de b_4, encontramos coincidencias de subíndices y letras en los dos primeros términos por lo que solo podemos continuar con c_7. Al realizar el adjunto de c_7, tenemos dos únicas posibilidades de continuar con los menores que nos van a dar solución ya que los otros dos son coincidentes. Por lo tanto, los únicos que podemos hacer con seguridad de que puede que den solución son ζ_5 y d_{10}. En el primero observamos que todos los sumatorios coinciden en alguna cosa. En el segundo encontramos una solución en el primer término del sumatorio: $\boldsymbol{a_1, b_4, c_7, d_{10}, \delta_6, \zeta_9, \beta_{12}}$.

Continuaremos con el menor c_5.

$$a_1\cdot\begin{vmatrix} a_3 & b_4 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8 \\ \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \zeta_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \zeta_7 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \delta_8 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow a_1\cdot c_5\cdot\begin{vmatrix} \beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow a_1\cdot c_5\cdot\beta_4\cdot\begin{vmatrix} \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow a_1\cdot c_5\cdot\beta_4\cdot(-b_8)\cdot\begin{vmatrix} \zeta_7 & b_{10} & c_{11} \\ \delta_8 & a_{11} & b_{12} \\ \varepsilon_9 & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_1\cdot c_5\cdot\beta_4\cdot(-b_8)\cdot(\zeta_7\cdot a_{11}\cdot a_{13}+\delta_8\cdot c_{11}\cdot\beta_{12}+\varepsilon_9\cdot b_{10}\cdot b_{12}-c_{11}\cdot a_{11}\cdot\varepsilon_9-b_{12}\cdot\zeta_7\cdot\beta_{12}-a_{13}\cdot b_{10}\cdot\delta_8)$$

En esta ocasión, en todos los menores adjuntos encontramos dos coincidencias y un término por el que se puede continuar hasta llegar al adjunto de 3x3 en el que en todos los sumatorios coincidía algo por lo que no existe solución.

Menor de b_2

$$(-b_2)\cdot\begin{vmatrix} \beta_2 & b_4 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8 \\ \zeta_3 & a_5 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \delta_4 & \beta_6 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \varepsilon_5 & \zeta_7 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \theta_6 & \delta_8 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \sigma_7 & \varepsilon_9 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow (-b_2)\cdot c_5\cdot\begin{vmatrix} \zeta_3 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \delta_4 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \varepsilon_5 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \theta_6 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \sigma_7 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow (-b_2)\cdot c_5\cdot\zeta_3\cdot\begin{vmatrix} \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow (-b_2)\cdot c_5\cdot\zeta_3\cdot\beta_6\cdot\begin{vmatrix} a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = (-b_2)\cdot c_5\cdot\zeta_3\cdot\beta_6\cdot(a_9\cdot a_{11}\cdot a_{13}+\beta_{10}\cdot c_{11}\cdot\beta_{12}+\zeta_{11}\cdot b_{10}\cdot b_{12}-c_{11}\cdot a_{11}\cdot\zeta_{11}-b_{12}\cdot a_9\cdot\beta_{12}-a_{13}\cdot b_{10}\cdot\beta_{10})$$

En este menor solo encontramos una opción para cada adjunto debido que en los otros términos existen coincidencias por lo que el único intento de solución es el mostrado pero desfavorablemente, en el sumatorio final hay coincidencias en todos.

Menor de c_3

$$c_3\cdot\begin{vmatrix} \beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8 \\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow c_3\cdot\beta_2\cdot\begin{vmatrix} \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow c_3\cdot\beta_2\cdot b_6\cdot\begin{vmatrix} \zeta_5 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \delta_6 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \varepsilon_7 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \theta_8 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow c_3\cdot\beta_2\cdot b_6\cdot\zeta_5\cdot\begin{vmatrix} a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = c_3\cdot\beta_2\cdot b_6\cdot\zeta_5\cdot(a_9\cdot a_{11}\cdot a_{13}+\beta_{10}\cdot c_{11}\cdot\beta_{12}+\zeta_{11}\cdot b_{10}\cdot b_{12}-c_{11}\cdot a_{11}\cdot\zeta_{11}-b_{12}\cdot a_9\cdot\beta_{12}-a_{13}\cdot b_{10}\cdot\beta_{10})$$

Para el menor adjunto de β_2 tenemos otros dos menores adjuntos que podemos calcular. Uno es b_6, que es el que está calculado anteriormente, y el de d_8 que a su vez tiene dos menores en los que se puede continuar ya que en los otros dos hay cosas que coinciden:

$$c_3\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot\beta_2\cdot\begin{vmatrix}\beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9\\ \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot\beta_2\cdot d_8\cdot\begin{vmatrix}\zeta_5 & a_7 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & \beta_8 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot\beta_2\cdot d_8\cdot\zeta_5\cdot\begin{vmatrix}\beta_8 & a_9 & c_{11}\\ \zeta_9 & \beta_{10} & b_{12}\\ \delta_{10} & \zeta_{11} & a_{13}\end{vmatrix}=c_3\cdot\beta_2\cdot d_8\cdot\zeta_5\cdot(\beta_8\cdot\beta_{10}\cdot a_{13}+\zeta_9\cdot c_{11}\cdot\zeta_{11}+\boxed{\delta_{10}\cdot a_9\cdot b_{12}}-c_{11}\cdot\beta_{10}\cdot\delta_{10}-b_{12}\cdot\beta_8\cdot\zeta_{11}-a_{13}\cdot a_9\cdot\zeta_9)$$

$$c_3\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot\beta_2\cdot\begin{vmatrix}\beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9\\ \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot\beta_2\cdot d_8\cdot\begin{vmatrix}\zeta_5 & a_7 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & \beta_8 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot\beta_2\cdot d_8\cdot a_7\cdot\begin{vmatrix}\delta_6 & a_9 & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \beta_{10} & b_{12}\\ \theta_8 & \zeta_{11} & a_{13}\end{vmatrix}=c_3\cdot\beta_2\cdot d_8\cdot a_7\cdot(\delta_6\cdot\beta_{10}\cdot a_{13}+\varepsilon_7\cdot c_{11}\cdot\zeta_{11}+\theta_8\cdot a_9\cdot b_{12}-c_{11}\cdot\beta_{10}\cdot\theta_8-\boxed{b_{12}\cdot\delta_6\cdot\zeta_{11}}-a_{13}\cdot a_9\cdot\varepsilon_7)$$

En ambos encontramos soluciones las cuales serían, por un lado, $\boldsymbol{c_3, \beta_2, d_8, \zeta_5, \delta_{10}, a_9, b_{12}}$ y, por otro, $\boldsymbol{c_3, \beta_2, d_8, a_7, b_{12}, \delta_6, \zeta_{11}}$.

Por otra parte, otro de los menores adjuntos a realizar de c_3 es el d_6, el cual tiene dos menores a los que se le puede seguir aplicando cálculos para obtener solución, β_4 y e_9.

$$c_3\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot\begin{vmatrix}\zeta_3 & \beta_4 & b_6 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot\beta_4\cdot\begin{vmatrix}\delta_4 & a_7 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \beta_8 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \zeta_9 & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot\beta_4\cdot a_7\cdot\begin{vmatrix}\varepsilon_5 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}=c_3\cdot(-d_6)\cdot\beta_4\cdot a_7\cdot(\varepsilon_5\cdot a_{11}\cdot a_{13}+\theta_6\cdot c_{11}\cdot\beta_{12}+\sigma_7\cdot b_{10}\cdot b_{12}-c_{11}\cdot a_{11}\cdot\sigma_7-b_{12}\cdot\varepsilon_5\cdot\beta_{12}-a_{13}\cdot b_{10}\cdot\theta_6)$$

Observamos que con β_4 solo hay un menor adjunto que no coincide que no tiene solución ya que en todos los términos del último sumatorio tienen aspectos coincidentes.

Por último, realizaremos el adjunto de d_6 junto con e_9.

$$c_3\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot\begin{vmatrix}\zeta_3 & \beta_4 & b_6 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot e_9\cdot\begin{vmatrix}\delta_4 & \zeta_5 & a_7 & c_9\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & b_{10}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot e_9\cdot\delta_4\cdot\begin{vmatrix}\delta_6 & \beta_8 & b_{10}\\ \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11}\\ \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12}\end{vmatrix}=c_3\cdot(-d_6)\cdot e_9\cdot\delta_4\cdot(\delta_6\cdot\zeta_9\cdot\beta_{12}+\varepsilon_7\cdot b_{10}\cdot\delta_{10}+\theta_8\cdot\beta_8\cdot a_{11}-b_{10}\cdot\zeta_9\cdot\theta_8-a_{11}\cdot\delta_6\cdot\delta_{10}-\beta_{12}\cdot\beta_8\cdot\varepsilon_7)$$

$$c_3\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot\begin{vmatrix}\zeta_3 & \beta_4 & b_6 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot e_9\cdot\begin{vmatrix}\delta_4 & \zeta_5 & a_7 & c_9\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & b_{10}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot d_6\cdot e_9\cdot\zeta_5\cdot\begin{vmatrix}\varepsilon_5 & \beta_8 & b_{10}\\ \theta_6 & \zeta_9 & a_{11}\\ \sigma_7 & \delta_{10} & \beta_{12}\end{vmatrix}=c_3\cdot(-d_6)\cdot e_9\cdot\zeta_5\cdot(\varepsilon_5\cdot\zeta_9\cdot\beta_{12}+\theta_6\cdot b_{10}\cdot\delta_{10}+\boxed{\sigma_7\cdot\beta_8\cdot a_{11}}-b_{10}\cdot\zeta_9\cdot\sigma_7-a_{11}\cdot\varepsilon_5\cdot\delta_{10}-\beta_{12}\cdot\beta_8\cdot\theta_6)$$

$$c_3\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & c_5 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & b_6 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot\begin{vmatrix}\zeta_3 & \beta_4 & b_6 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & a_7 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot e_9\cdot\begin{vmatrix}\delta_4 & \zeta_5 & a_7 & c_9\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \beta_8 & b_{10}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \zeta_9 & a_{11}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \delta_{10} & \beta_{12}\end{vmatrix}\rightarrow c_3\cdot(-d_6)\cdot e_9\cdot a_7\cdot\begin{vmatrix}\varepsilon_5 & \delta_6 & b_{10}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & a_{11}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \beta_{12}\end{vmatrix}=c_3\cdot(-d_6)\cdot e_9\cdot a_7\cdot(\varepsilon_5\cdot\varepsilon_7\cdot\beta_{12}+\theta_6\cdot b_{10}\cdot\theta_8+\sigma_7\cdot\delta_6\cdot a_{11}-b_{10}\cdot\varepsilon_7\cdot\sigma_7-a_{11}\cdot\varepsilon_5\cdot\theta_8-\beta_{12}\cdot\delta_6\cdot\theta_6)$$

En el menor adjunto de e_9 encontramos tres posibles adjuntos que pueden dar solución ya que no coinciden, que son los calculados anteriormente, pero solo en uno de ellos existe una solución que es: ***c_3, d_6, e_9,*** ζ_5, ***σ_7, β_8, a_{11}***.

Menor *d_4*

Para el menor adjunto de d_4 existen dos menores que no coinciden en letra ni subíndice, que son β_2 y a_3. Comenzaremos por β_2.

$$(-d_4)\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & b_4 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow(-d_4)\cdot\beta_2\cdot\begin{vmatrix}\beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9\\ \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}$$

Al hacer el adjunto de β_2 observamos que solo podemos continuar con a_5 y c_7 debido a que el primero coincide y el resto son simétricos. Por tanto calcularemos los dos a continuación.

$$(-d_4)\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & b_4 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow(-d_4)\cdot\beta_2\cdot\begin{vmatrix}\beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9\\ \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow d_4\cdot\beta_2\cdot a_5\cdot\begin{vmatrix}\zeta_5 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow d_4\cdot\beta_2\cdot a_5\cdot(-b_8)\cdot\begin{vmatrix}\delta_6 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}=d_4\cdot\beta_2\cdot a_5\cdot(-b_8)\cdot(\delta_6\cdot a_{11}\cdot a_{13}+\varepsilon_7\cdot c_{11}\cdot\beta_{12}+\theta_8\cdot b_{10}\cdot b_{12}-c_{11}\cdot a_{11}\cdot\theta_8-b_{12}\cdot\delta_6\cdot\beta_{12}-a_{13}\cdot b_{10}\cdot\varepsilon_7)$$

$$(-d_4)\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & b_4 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow(-d_4)\cdot\beta_2\cdot\begin{vmatrix}\beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9\\ \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow d_4\cdot\beta_2\cdot a_5\cdot\begin{vmatrix}\zeta_5 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow d_4\cdot\beta_2\cdot a_5\cdot c_9\cdot\begin{vmatrix}\delta_6 & a_9 & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \beta_{10} & b_{12}\\ \theta_8 & \zeta_{11} & a_{13}\end{vmatrix}=d_4\cdot\beta_2\cdot a_5\cdot c_9\cdot(\delta_6\cdot\beta_{10}\cdot a_{13}+\varepsilon_7\cdot c_{11}\cdot\zeta_{11}+\theta_8\cdot a_9\cdot b_{12}-c_{11}\cdot\beta_{10}\cdot\theta_8-\boxed{b_{12}\cdot\delta_6\cdot\zeta_{11}}-a_{13}\cdot a_9\cdot\varepsilon_7)$$

Encontramos una solución en el segundo que es: ***d_4, β_2, a_5, c_9, b_{12}, δ_6,*** ζ_{11}.

Ahora el de c_7:

$$(-d_4)\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & a_3 & b_4 & d_6 & e_7 & f_8\\ \zeta_3 & \beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9\\ \delta_4 & \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \sigma_7 & \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow(-d_4)\cdot\beta_2\cdot\begin{vmatrix}\beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9\\ \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow(-d_4)\cdot\beta_2\cdot c_7\cdot\begin{vmatrix}\zeta_5 & \beta_6 & c_9 & d_{10}\\ \delta_6 & \zeta_7 & b_{10} & c_{11}\\ \varepsilon_7 & \delta_8 & a_{11} & b_{12}\\ \theta_8 & \varepsilon_9 & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\rightarrow(-d_4)\cdot\beta_2\cdot c_7\cdot\zeta_5\cdot\begin{vmatrix}\zeta_7 & b_{10} & c_{11}\\ \delta_8 & a_{11} & b_{12}\\ \varepsilon_9 & \beta_{12} & a_{13}\end{vmatrix}=(-d_4)\cdot\beta_2\cdot c_7\cdot\zeta_5\cdot(\zeta_7\cdot a_{11}\cdot a_{13}+\delta_8\cdot c_{11}\cdot\beta_{12}+\varepsilon_9\cdot b_{10}\cdot b_{12}-c_{11}\cdot a_{11}\cdot\varepsilon_9-b_{12}\cdot\zeta_7\cdot\beta_{12}-\boxed{a_{13}\cdot b_{10}\cdot\delta_8})$$

En este adjunto solo encontramos otro posible adjunto con el que continuar debido a las coincidencias en el resto hasta llegar a la solución de: $\boldsymbol{d_4, \beta_2, c_7, \zeta_5, a_{13}, b_{10}, \delta_8}$.

Por último ya solo queda hacer el menor adjunto de a_3.

$$(-d_4)\cdot\begin{vmatrix} \beta_2 & a_3 & b_4 & d_6 & e_7 & f_8 \\ \zeta_3 & \beta_4 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \delta_4 & \zeta_5 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \theta_6 & \varepsilon_7 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \sigma_7 & \theta_8 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow d_4\cdot a_3\cdot\begin{vmatrix} \zeta_3 & a_5 & c_7 & d_8 & e_9 \\ \delta_4 & \beta_6 & b_8 & c_9 & d_{10} \\ \varepsilon_5 & \zeta_7 & a_9 & b_{10} & c_{11} \\ \theta_6 & \delta_8 & \beta_{10} & a_{11} & b_{12} \\ \sigma_7 & \varepsilon_9 & \zeta_{11} & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow d_4\cdot a_3\cdot c_7\cdot\begin{vmatrix} \delta_4 & \beta_6 & c_9 & d_{10} \\ \varepsilon_5 & \zeta_7 & b_{10} & c_{11} \\ \theta_6 & \delta_8 & a_{11} & b_{12} \\ \sigma_7 & \varepsilon_9 & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \rightarrow d_4\cdot a_3\cdot c_7\cdot(-\beta_6)\cdot\begin{vmatrix} \varepsilon_5 & b_{10} & c_{11} \\ \theta_6 & a_{11} & b_{12} \\ \sigma_7 & \beta_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = d_4\cdot a_3\cdot c_7\cdot(-\beta_6)\cdot(\varepsilon_5\cdot a_{11}\cdot a_{13}+\theta_6\cdot c_{11}\cdot\beta_{12}+\sigma_7\cdot b_{10}\cdot b_{12}-c_{11}\cdot a_{11}\cdot\sigma_7-b_{12}\cdot\varepsilon_5\cdot\beta_{12}-a_{13}\cdot b_{10}\cdot\theta_6)$$

En este adjunto de nuevo observamos que solo se puede continuar por uno debido a que el resto coincide llegando al final sin obtener una solución porque en el sumatorio final siempre coincide algo.

Por tanto, las soluciones para n=7 son: [$\boldsymbol{a_1, b_4, c_7, d_{10}, \delta_6}, \zeta_9, \boldsymbol{\beta_{12}}$], [$\boldsymbol{c_3, \beta_2, d_8}, \zeta_5, \boldsymbol{\delta_{10}, a_9, b_{12}}$], [$\boldsymbol{c_3, \beta_2, d_8, a_7, b_{12}, \delta_6}, \zeta_{11}$], [$\boldsymbol{c_3, d_6, e_9}, \zeta_5, \boldsymbol{\sigma_7, \beta_8, a_{11}}$], [$\boldsymbol{d_4, \beta_2, a_5, c_9, b_{12}, \delta_6}, \zeta_{11}$].

Conclusiones:

Al intentar solucionar este problema de pequeño pensé que nunca podría darle una solución eficaz que me sirviese y que, si lo conseguía, sería a base de probar hasta que en alguno de esos intentos obtuviese una solución. Gracias a mi exploración matemática me he dado cuenta de que cosas que al principio parece que tengan que ver bien poco con las matemáticas pueden solucionarse con estas, solo hay que pensar e intentar relacionar los conocimientos que aprendes en matemáticas para poderlos aplicar a un problema de la vida real. De este trabajo me quedo con haber solucionado el problema mediante determinantes dando una solución genérica para cualquier n aunque un tanto larga y tediosa aunque se puede utilizar. Por otro lado, si en algún momento pudiese continuar con la exploración, buscaría otra manera más eficaz de realizarlo para *enes* grandes y así poder dar solución a n=8, la cual probablemente sea la más interesante de encontrar porque es la del tablero de ajedrez.

Bibliografía:

Plastelina Interactive.
Problema de las N Reinas.
Campbell, P.J. (1977) Historia Mathematica. Elsevier.