Professor: Miguel Ângelo Amaro Pais	Assunto: Definir espaços de probabilidade
Ano de escolaridade: 12º Ano	Tempo de aula: 1h 30m

Recursos	Objetivos
● Material de escrita ● Máquina de calcular ● Manual ● Quadro	● Saber os básicos da probabilidade ● Saber resolver exercícios básicos sobre probabilidade

Estrutura da Aula

Pequena introdução sobre o conceito da probabilidade, dando aos alunos vários problemas simples como:

1.Probabilidade de sair o número 6 na face superior de um dado.

2.Probabilidade de sair um número par na face superior de um dado.

3.Probabilidade de sair um número múltiplo de 3 na face superior de um dado.

Identificar uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ das partes de E como a função probabilidade P, de domínio $\mathcal{P}(E)$ que tem as seguintes propriedades, assumindo A, B e E como conjuntos, dando como certo as seguintes propriedades:

$a)$ $0 \leq P(A)$.

$b)$ $P(E) = 1$, assumindo E como o universo dos resultados ou espaço amostral.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se A e B são conjuntos disjuntos.

Definir:

1.$\mathcal{P}(E)$ como espaço de acontecimentos e referenciar os elementos como acontecimentos.

2.$P(A)$ como probabilidade do acontecimento A, para $A \in \mathcal{P}(E)$.

Dar dois exemplos simples para os alunos percebem a definição de espaço amostral:

Exercício 1: Seja uma experiência, a verificação de o número que sai na face superior de um dado.

Suponha-se que o João diz que o número que vai sair na face superior do dado é um número par. Mostre o espaço amostral e represente de forma matemática o que o João afirmou.

Exemplo de resposta 1:

Temos como espaço amostral: $\mathcal{P}(E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Supondo que seja A o acontecimento representado pelo que o João disse, então:

$A = \{2, 4, 6\}$

Exercício 2: Seja uma experiência, a verificação de o número que sai na face superior de um dado 2 vezes. O João diz que o número que vai sair na face superior do dado em ambos os lançamentos é um número par. Mostre o espaço amostral e represente de forma matemática o que o João afirmou.

Exemplo de resposta 2:

$\mathcal{P}(E) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3),$

$(3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$

$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

Sendo A o acontecimento representado pelo que o João disse, então:

$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

Mais definições:

Dado uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$:

1.seja E, chamado por acontecimento certo e seja o conjunto vazio $\emptyset$, chamado por acontecimento impossível.

2.Se dois conjuntos forem disjuntos, chamamos a eles incompatíveis ou mutualmente exclusivos.

3.Se a reunião entre dois conjuntos for disjunta e a união entre estes conjuntos for igual a E, então chamamos a estes conjuntos complementares ou contrários.

4.Se dois conjuntos tiverem a mesma probabilidade, chamamos a estes equiprováveis.

5.Seja $A \subset E$, designar os casos favoráveis a A como os elementos de A e por casos possíveis, os elementos do espaço amostral.

Exemplo 1: O Conjunto que contém os números pares é incompatível com o conjunto que contém os números ímpares. Se o espaço amostral for o conjunto dos números inteiros, então estes dois conjuntos são também complementares e equiprováveis.

Exercício 3: Seja o espaço amostral todos os números possíveis que podem sair na face superior de um dado. Dê exemplos de dois acontecimentos que sejam incompatíveis, complementares e equiprováveis.

Exemplo de resposta 3:

Um acontecimento pode ser, o número a sair no dado ser par. E outro acontecimento pode ser, o número a sair no dado ser ímpar.

Exercício 4: Qual é que é a quantidade de casos favoráveis que cada conjunto tem de ter, tendo os conjuntos as mesmas características de que no exercício 3, sendo o espaço amostral também o mesmo?

Exemplo de resposta 4: Cada conjunto tem de ter 3 casos favoráveis.

Definição:

Dado uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$, A é dito acontecimento elementar, quando tem 1 caso favorável a A e disse acontecimento composto quando tem 2 ou mais casos favoráveis.

Teorema:

Provar aos alunos que, dado uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$, a única probabilidade em $\mathcal{P}(E)$, tal que os acontecimentos são equiprováveis é: $P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis\ a\ A}{número\ de\ casos\ possíves}$, para qualquer A, $A \in \mathcal{P}(E)$.

Prova:

Dado uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$, com n casos possíveis, então reunindo todos os acontecimentos elementares possíveis de tal forma que sejam todos incompatíveis (representados por $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{n-1}, A_n$), vem o seguinte:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n) = P(E) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

(devido às propriedades das uniões e c)

$=1$, (pois $P(E) = 1$)

Então, supondo $P(A_1)=x, x > 0$, temos: $x + x + x \ldots + x\ (n\ vezes)=1 \Leftrightarrow nx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}$

Logo: $P(A_1) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis\ a\ A_1}{número\ de\ casos\ possíves}$.

Logo, fica provado o que se queria provar e chama-se a esta definição, definição de Laplace.

Exercício 5: Seja o espaço amostral todas as possibilidades de 3 lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada.

a) Indique o número de casos possíveis.
b) A probabilidade de pelo menos uma cara calhar nos três lançamentos.
c) A probabilidade de o número de caras e coroas ter a mesma paridade.

Exemplo de Resposta 5.a):

Sendo cara = c e coroa= b.

Temos como casos possíveis: $\{(ccc), (ccb), (cbb), (cbc), (bbb), (bcb), (bbc), (bcc)$, logo temos 8 casos possíveis.

Exemplo de Resposta 5.b):

Seja A o acontecimento pretendido.

$A = \{(ccc), (ccb), (cbb), (cbc), (bcb), (bbc), (bcc)\}$. $\#A = 7$, então $P(A) = \frac{7}{8}$.

Exemplo de Resposta 5.c):

Seja B o acontecimento pretendido.

$B = \{(bbb), (ccc)\}$. $\#B = 2$, então $P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Teorema:

Dado uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e $A \in \mathcal{P}(E)$, então: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ e $P(\emptyset) = 0$.

Prova:

$1 = P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$, $por\ c) \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Usando o que está acima:

$P(\emptyset) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$

Teorema:

Provar que, dado uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$, onde $A \subset B$, então: $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Prova:

Fazendo diagramas de Venn, observamos
: $P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$. $Logo\ P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A)$.

Como $\overline{A} \cap B$ também pode ser representado por: $B \backslash A$, então obtém-se:
$P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.

Como a probabilidade é uma função positiva, **por** a), então $P(A) \leq P(B)$, designando-se a esta propriedade: monotonia da probabilidade.

Teorema:

Provar que, dado uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e $A \in \mathcal{P}(E)$, então $P(A) \in [0, 1]$

Prova:

Temos que, devido o que foi provado anteriormente: $P(A) \leq P(E)$, pois A $\subset E$, então devido a isto e por a) : $0 \leq P(A) \leq 1$. Logo, $P(A) \in [0, 1]$