

II – DẠNG TOÁN

1. Dạng 1: Xét tính đơn điệu của hàm số

a) Phương pháp giải

Phương pháp tự luận thuần túy .

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định

Bước 1: Tìm tập xác định D .

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3: Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4: Lập bảng biến thiên.

Bước 5: Kết luận.

Phương pháp sử dụng MTCT

Cách 1: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio . Quan sát bảng kết quả nhận được , khoảng nào làm cho hàm số luôn tăng thì là khoảng đồng biến, khoảng nào làm cho hàm số luôn giảm là khoảng nghịch biến.

Cách 2: Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đôi với bất phương trình bậc hai, bậc ba)

Trắc nghiệm (Cách nhận xét bài toán, mẹo mực để loại trừ)

Ví dụ điển hình

Ví dụ 1. Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào ?

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

B. $(0; +\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

D. $(-\infty; 0)$

Lời giải

Chọn B

◆ Giải theo tự luận

- Tính đạo hàm $y' = 8x^3$
- $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

- Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

◆ Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)

- Để kiểm tra đáp án A ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với thiết lập

$$F(x) = 2x^4 + 1 \quad \text{Start } -10 \quad \text{End } -\frac{1}{2} \quad \text{Step } 0.5$$

	X	F(X)
1	-9.5	20001
2	-9	16291
3	-9	13123

Math
-10

Ta thấy ngay khi x càng tăng thì $f(x)$ càng giảm \Rightarrow Đáp án A sai

- Tương tự như vậy, để kiểm tra đáp án B ta cũng sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập

$F(x) = 2x^4 + 1$ Start 0 End 9 Step 0.5

	X	F(X)
1	0.5	1.125
2	1	1.125
3	1	1.125

Math
0

Ta thấy khi x càng tăng thì tương ứng $f(x)$ càng tăng \Rightarrow Đáp án B đúng

◆ **Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)**

- Kiểm tra khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$ ta tính $f'(-\frac{1}{2}-0.1)$

$$\frac{d}{dx}(2X^4+1) \Big|_{x=-\frac{1}{2}-0.1}$$

Math ▲
-216
125

Đạo hàm ra âm (hàm số nghịch biến) \Rightarrow Giá trị $-\frac{1}{2}-0.1$ vi phạm \Rightarrow Đáp án A sai

- Kiểm tra khoảng $(-\infty; 0)$ ta tính $f'(0-0.1)$

$$\frac{d}{dx}(2X^4+1) \Big|_{x=0-0.1}$$

Math ▲
-1
125

Điểm $0-0.1$ vi phạm \Rightarrow Đáp án D sai và C cũng sai \Rightarrow Đáp án chính xác là B

- Xác minh thêm 1 lần nữa xem B đúng không . Ta tính $f'(1+0.1) = \frac{1331}{125} \Rightarrow$ Chính xác

$$\frac{d}{dx}(2X^4+1) \Big|_{x=1+0.1}$$

Math ▲
1331
125

◆ **Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)**

- Hàm số bậc 4 khi đạo hàm sẽ ra bậc 3. Ta nhẩm các hệ số này trong đầu. Sử dụng máy tính Casio để giải bất phương trình bậc 3

$$Ax^3$$

Math

$$0 \leq x$$

Rõ ràng $x \geq 0$

Tính $y' = 4x^3 - 12x + 8 = 0 = 4(x-1)^2(x+2)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$		-23		4		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$

❖ Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)

❖ Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)

❖ Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)

❖ Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh

Ví dụ 4. Tìm khoảng đồng biến của hàm số: $y = x^4 + 4x + 6$.

A. $(-1; +\infty)$

B. $(-\infty; 0)$

C. $(-2; +\infty)$

D. $(-\infty; -1)$

Lời giải

Chọn A

❖ Giải theo tự luận

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Tính: $y' = 4x^3 + 4$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		
	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

❖ **Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)**

❖ **Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)**

❖ **Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)**

❖ **Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh**

Ví dụ 5. _____ Tìm khoảng đồng biến của hàm số: $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$.

A. $(0;3)$

B. $(1;3)$

C. $(-\infty;0)$

D. $(2; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

❖ **Giải theo tự luận**

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

Tính $y' = -3x^2 + 12x - 9$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		
	$+\infty$						
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$					4	
			0				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên $(1;3)$.

❖ **Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)**

❖ **Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)**

❖ **Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)**

❖ **Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh**

Ví dụ 6. _____ Cho hàm số: $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. Hãy chọn câu đúng :

A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên \mathbb{R}

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên \mathbb{R}

C. Hàm số $f(x)$ không đổi trên \mathbb{R}
 $(-\infty; -1)$

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên

Lời giải

Chọn B

◆ **Giải theo tự luận**

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

Tìm $y' = 3x^2 + 6x + 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗		1	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên $D = \mathbb{R}$.

◆ **Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)**

◆ **Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)**

◆ **Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)**

◆ **Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh**

Ví dụ 7. Tìm khoảng đồng biến của hàm số: $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

A. $(0; +\infty)$

B. $(2; +\infty)$

C. $(-\infty; 0)$

D. $(0; 2)$

Lời giải

Chọn B

◆ **Giải theo tự luận**

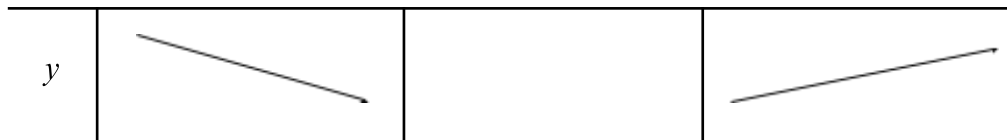
Hàm số đã cho xác định khi: $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$ Tập xác định: $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Ta có: $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Hàm số không có đạo hàm tại: $x = 0; x = 2$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		-		-	0	+			+



Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

❖ Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)

❖ Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)

❖ Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)

❖ Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh

Ví dụ 8. Tìm khoảng đồng biến của hàm số: $y = \frac{3x+1}{1-x}$.

A. $(0; +\infty)$

B. $(-\infty; 2)$

C. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

D. $(-\infty; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

❖ Giải theo tự luận

Hàm số xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Tìm $y' = \frac{3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} > 0; \forall x \neq 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $+\infty$		1		
y'	+				+
y	-3		+∞		-∞

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

❖ Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)

❖ Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)

❖ Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)

❖ Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh

Ví dụ 9. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{3-2x}{x+7}$.

A. $(-\infty; 7)$

B. $(-\infty; +\infty)$

C. $(-\infty; -7)$ và $(-7; +\infty)$

D. $(-10; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

◆ Giải theo tự luận

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên: $D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

Tính
$$y' = \frac{(-2) \cdot 7 - 1 \cdot 3}{(x+7)^2} = \frac{-17}{(x+7)^2} < 0, \forall x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
y'		-		-	
y	-2				-2

$\xrightarrow{\quad} -\infty \quad \parallel \quad +\infty \quad \xrightarrow{\quad}$

Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên: $(-\infty; -7)$ và $(-7; +\infty)$.

◆ Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)

◆ Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)

◆ Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)

◆ Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh

Ví dụ 10. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$.

A. $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$

B. $(-5; -2)$

C. $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$

D. $(-2; 1)$

Lời giải

Chọn A

◆ Giải theo tự luận

Hàm số đã cho xác định trên: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có:
$$y' = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2}, \forall x \in D$$

Cho
$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
-----	-----------	------	------	-----	-----------

y'		-	0	+		+	0	-
y	$+\infty$				$+\infty$			
			12			$-\infty$	0	
	$-\infty$							

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên: $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$

❖ **Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)**

❖ **Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)**

❖ **Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)**

❖ **Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh**

Ví dụ 11. _____ Tìm khoảng đồng biến của hàm số: $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}$.

- A. $(1; +\infty)$ B. $(\frac{8}{5}; +\infty)$ C. $(-\infty; \frac{8}{5})$ D. $(-\infty; 2)$

Lời giải
Chọn C

❖ **Giải theo tự luận**

Hàm số đã cho xác định khi: $x^2 - x + 3 > 0$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$

Ta có:
$$y' = \sqrt{x^2 - x + 3} - \frac{(2x-1)(x+2)}{2\sqrt{x^2 - x + 3}} = \frac{-5x+8}{2\sqrt{x^2 - x + 3}}$$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-5x+8}{2\sqrt{x^2 - x + 3}} = 0 \Leftrightarrow -5x+8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{8}{5}$	$+\infty$	
y'		+	0	-
y				

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; \frac{8}{5})$.

❖ **Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)**

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; \pi)$

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; \pi)$

C. Hàm số $f(x)$ không đổi trên $(0; \pi)$

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{2})$

Lời giải

Chọn A

◆ Giải theo tự luận

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0; \pi]$.

Ta có: $y' = 1 - \cos x$.

$$\text{Trên đoạn } [0; \pi] : y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; \pi] \\ 1 - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; \pi] \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; \pi] \\ x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x		0		π
y'		0	+	
y		↗		

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đồng biến trên $(0; \pi)$

◆ Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)

◆ Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)

◆ Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)

◆ Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh

Ví dụ 14. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số: $y = 2 \sin x + \cos 2x$, $x \in [0; \pi]$

A. $(0; \frac{\pi}{2})$

B. $(\frac{\pi}{2}; \pi)$

C. $(-\infty; \frac{\pi}{6})$ và $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6})$

D. $(0; \pi)$

Lời giải

Chọn C

◆ Giải theo tự luận

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0; \pi]$.

Ta có: $y' = 2 \cos x - 2 \sin 2x = 2 \cos x - 4 \cos x \cdot \sin x = 2 \cos x (1 - 2 \sin x)$, $x \in [0; \pi]$.

$$[0; \pi]: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; \pi] \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/2 \\ x = \pi/6 \\ x = 5\pi/6 \end{cases}$$

Trên đoạn

Bảng biến thiên

x		0	$\pi/6$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π				
y'			+	0	-	0	+	0		
y			↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên $(0; \pi/6)$ và $(\pi/2; 5\pi/6)$

❖ **Giải theo Casio (cách 1: sử dụng chức năng MODE 7)**

❖ **Giải theo Casio (cách 2 : sử dụng chức năng tính đạo hàm $\frac{d}{dx}(\cdot)$)**

❖ **Giải theo Casio (cách 3 : sử dụng chức năng MODE 5 INEQ)**

❖ **Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh**

Ví dụ 15. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \sin^2 x + \cos x, x \in [0; \pi]$

A. $(0; \frac{\pi}{3})$

B. $(\frac{\pi}{3}; \pi)$

C. $(0; \pi)$

D. $(\frac{\pi}{6}; \pi)$

Lời giải

Chọn B

❖ **Giải theo tự luận**

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0; \pi]$.

Ta có: $y' = 2 \sin x \cdot \cos x - \sin x = \sin x(2 \cos x - 1), x \in [0; \pi]$

$$[0; \pi]: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; \pi] \\ \sin x(2 \cos x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; \pi] \\ \sin x = 0 \\ \cos x = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Trên đoạn

Bảng biến thiên

x		0	$\pi/3$	π		
y'			+	0	-	
y			↗		↘	

