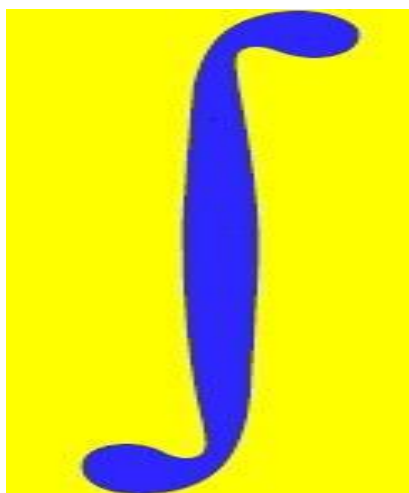


Методична розробка уроку на тему:
«Правила знаходження первісних»



Тема уроку: Правила знаходження первісних

Мета уроку:

Навчальна: формування знань учнів про правила знаходження первісних (невизначених інтегралів), формування умінь у знаходженні первісних для даних функцій, користуючись правилами знаходження первісних.

Розвиваюча: розвивати пізнавальний інтерес, спостережливість, увагу, інтелектуальні здібності; продовжувати формувати вміння учнів виділяти

головне під час вивчення матеріалу та уміння узагальнювати поняття, що вивчаються, робити висновки.

Виховна: виховувати працьовитість, уміння відстоювати свою думку; виховувати зібраність, організованість, увагу, відповідальність та вимогливість до себе.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити первісні та невизначені інтеграли за допомогою таблиці первісних та правил знаходження первісних; знаходити первісну, яка задовольняє задану умову.

Тип уроку: комбінований;

Інформаційне забезпечення: телевізор, ноутбук, роздаткові матеріали, папки з формулами, таблиця первісних та інтегралів, інструктивні картки-завдання для гри «Математичне лото», підручник.

Наочність: презентація Power Point.

***Епіграф:** «Математика – та одна наука, без якої неможлива ніяка інша.» (С. Соболев)*

Хід уроку

I. Організаційний момент.

Перевіряється готовність учнів до уроку. Відмічаються відсутні учні в групі.

II. Перевірка домашнього завдання.

1. Відповіді на запитання, що виникли в учнів при виконанні домашніх завдань.

2. **Гра «Вігадай слово».** Ваше завдання: розв'язати приклад та знайти правильну відповідь на картках, що розміщені на дошці. Перевертаючи картки по черзі, з отриманих букв отримати слово - «інтегрування».

(Слайд 2-6)

Запишіть первісні для функцій:

- 1) x^7 ; **(I)** 2) $\frac{1}{x}$; **(H)** 3) $\frac{1}{x^2}$; **(T)** 4) 5^x ; **(E)** 5) $-\sin x$; **(Г)** 6) e^x ; **(P)**
7) π^x ; **(Y)** 8) $\frac{1}{\cos^2 x}$; **(B)** 9) $\frac{1}{\sin^2 x}$; **(A)** 10) $\cos x$; **(H)** 11) $\sin x$; **(H)**

12) 6; **(Я). Слово: ЯННАВУРГЕТНІ - ІНТЕГРУВАННЯ**

Відповідь: 1) $\frac{x^8}{8} + C$; 2) $\ln|x| + C$; 3) $-\frac{1}{x} + C$; 4) $\frac{5^x}{\ln 5} + C$; 5) $\cos x + C$; 6) $e^x + C$;
7) $\frac{\pi^x}{\ln \pi} + C$; 8) $\operatorname{tg} x + C$; 9) $-\operatorname{ctg} x + C$; 10) $\sin x + C$; 11) $-\cos x + C$; 12) $6x + C$.

3. Історична довідка. (Слайд 7-13)

(Повідомлення учнів про те, як винайшли знак інтеграла та презентацію про вчених, які започаткували інтегральне числення.)

Виникнення інтегрального числення пов'язане з потребою обчислення площ і об'ємів. Дійсно, передісторія інтегрального числення сягає глибокої давнини: ідеї інтегрального обчислення можна знайти в роботах давньогрецьких учених Евдокса (IV ст. до н. е.) та Архімеда (III століття до н. е.), який для розв'язування задач на обчислення площ і об'ємів застосовував *метод вичерпування* (це набір правил для обчислення площ, і обсягів). Криза та занепад древнього світу призвела до забуття багатьох наукових досягнень.

Про методи вичерпування згадали лише у XVII столітті. Математики XVII ст. училися саме на працях Архімеда. Зокрема, німецький астроном Й.Кеплер застосував подібні методи і відкрив закони руху планет.

Італійський математик Б.Кавальєрі, уявивши кожну фігуру утвореною з відрізка, а тіло із плоских фігур, сформулював принципи, які вважав очевидними й приймав без доведення.

Саме слово «інтеграл» придумав Бернуллі у 1690р. (від латинського слова *Integro* – відновлювати або від слова *Integer* - цілий).

Сам символ інтеграла був уведений Готфрідом Лейбніцом у 1675 році (перша буква латинського слова *Summa*).

Слід зазначити, що в XVII ст. інтегрального числення як такого ще практично не було. Зв'язок між операціями диференціювання та інтегрування, узагальнення ідей, на яких ґрунтується розв'язання багатьох

задач, було знайдено І.Ньютоном і Г.Лейбніцом.

У XVIII ст. розвитку інтегрального числення найбільш сприяли праці *П. Бернуллі, Ж Лагранжа* і особливо *Ейлера*, який довів апарат інтегрального числення майже до сучасного стану.

З українських учених найбільше зробили для розвитку математичного аналізу Михайло Васильович Остроградський (1801-1862) та Віктор Якович Буняковський (1804-1889).

Як ви бачите, інтегральне числення існує досить давно, його досліджувало багато науковців. В процесі досліджень було виявлено певні властивості невизначених інтегралів, з якими ми познайомимось на сьогоднішньому уроці.

III. Формулювання теми, мети й завдань уроку; Епіграф до уроку та завдання до нього. (Слайд 14-15)

IV.Сприймання і осмислення нового матеріалу. (Слайд 16-24)

Нагадаємо, що операція знаходження похідної для заданої функції називається диференціюванням. Обернена операція знаходження первісних для даної функції називається інтегруванням.

Правило 1. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ — первісні відповідно функцій $f(x)$ і $g(x)$ на деякому проміжку, то функція $F(x) \pm G(x)$ є первісною функції $f(x) \pm g(x)$.

Дійсно, оскільки $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, то $(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$.

Це правило можна сформулювати в іншій формі: інтеграл суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Приклад 1. Знайдіть первісні для функції $f(x) = x + \cos x$.

Розв'язання:

$$\frac{x^2}{2}$$

Оскільки для x одна із первісних є $\frac{x^2}{2}$, а для $\cos x$ однією із первісних є $\sin x$,

то однією із первісних функції $x + \cos x$ є функція $\frac{x^2}{2} + \sin x$, отже,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C.$$

Відповідь: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C.$

Приклад 2. Знайти $\int \left(e^x + \sin x - \frac{1}{x} \right) dx$

Розв'язання:

$$\int \left(e^x + \sin x - \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x dx + \int \sin x dx - \int \frac{1}{x} dx = e^x - \cos x - \ln|x| + C.$$

Відповідь: $e^x - \cos x - \ln|x| + C.$

Правило 2. Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а C — стала, то $CF(x)$ — первісна для функції $Cf(x)$.

Дійсно, оскільки $F(x) = f(x)$ то $(CF(x))' = CF'(x) = Cf(x)$.

Це правило можна сформулювати в іншій формі: постійний множник можна

виносити за знак інтеграла $\int Cf(x) dx = C \int f(x) dx.$

Приклад 3. Знайдіть первісні для функції $f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2$.

Розв'язання:

Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x , то однією із первісних для функції $5e^x$ є $5e^x$; оскільки однією із первісних для функції $\sin x$ є $-\cos x$, то однією із первісних для функції $7\sin x$ є $-7\cos x$; первісною функції $3x^2$

є $3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3$. Отже, $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$ — первісні для функції

$$f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2.$$

Відповідь: $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C.$

Приклад 4. Знайдіть $\int (1 + 3e^x - 4 \cos x) dx$.

Розв'язання:

$$\int (1 + 3e^x - 4 \cos x) dx = \int 1 dx + 3 \int e^x dx - 4 \int \cos x dx = x + 3 \cdot e^x - 4 \sin x + C$$

Відповідь: $x + 3 \cdot e^x - 4 \sin x + C$.

Правило 3. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k і b — постійні числа, причому

$k \neq 0$, то $\frac{1}{k} F(kx + b)$ є первісною для функції $f(kx + b)$.

Дійсно, за правилом похідної складеної функції маємо:

$$\left(\frac{1}{k} F(kx + b) \right)' = \frac{1}{k} F'(kx + b) \cdot k = F'(kx + b) = f(kx + b).$$

Це правило можна записати в інтегральній формі:

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$$

Приклад 5. Знайдіть первісну для функції: $f(x) = (7 - 3x)^5$;

Розв'язання:

Оскільки первісною для функції x^5 є функція $\frac{x^6}{6}$, то згідно з правилом 3

шукані первісні: $F(x) = -\frac{1}{3} \frac{(7 - 3x)^6}{6} + C = -\frac{(7 - 3x)^6}{18} + C$.

Відповідь: $F(x) = -\frac{(7 - 3x)^6}{18} + C$;

Приклад 6. Знайдіть $\int e^{2x-1} dx$;

Розв'язання:

Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x , то згідно з правилом

3 маємо: $\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C;$

Відповідь: $\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C;$

V. Формування умінь учнів знаходити первісні для функцій, користуючись правилами знаходження первісних. (Слайд 26-28)

Виконання вправ.

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x) = 2x^5 - 5x^2$; б) $f(x) = 5\cos x - 3\sin x$; в) $f(x) = 2e^x + 3\cos x$; г) $f(x) = \frac{4}{x} + 10^x$;

д) $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}$.

2. Знайдіть невизначені інтеграли:

а) $\int (5x^4 + 2x^3) dx$; б) $\int (e^x - 2 \cos x) dx$;

3. Знайдіть невизначені інтеграли:

а) $\int (2x - 3)^5 dx$; б) $\int (4 - 5x)^7 dx$; в) $\int \cos(2x + 3) dx$;

г) $\int \frac{4dx}{\cos^2(20x + 1)}$.

4. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2e^{1-2x}$; б) $f(x) = 10^{3x-1} - 2\cos 6x$; в) $f(x) = 3\sin 2x - \frac{12}{\sin^2 2x}$;

г) $f(x) = \frac{4}{3-2x} + \frac{3}{(3-2x)^2}$;

Відповідь:

1. а) $F(x) = \frac{x^6}{3} - \frac{5x^3}{3} + C$; б) $F(x) = 5\sin x + 3\cos x + C$; в) $F(x) = 2e^x + 3\sin x + C$;

$$з) в) F(x) = 4 \ln|x| + \frac{10^x}{\ln 10} + C; \text{ д) } F(x) = 3 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} x + C.$$

$$2. \text{ а) } x^5 + \frac{x^4}{2} + C; \text{ б) } e^x - 2 \sin x + C;$$

$$3. \text{ а) } \frac{(2x-3)^6}{12} + C; \text{ б) } \frac{(4-5x)^8}{-40} + C; \text{ в) } \frac{1}{2} \sin(2x+3) + C; \text{ г) } \frac{1}{5} \operatorname{tg}(20x+1) + C.$$

$$4. \text{ а) } F(x) = x - \frac{1}{3} \sin 3x - e^{1-2x} + C; \text{ б) } F(x) = \frac{10^{3x-1}}{3 \ln 10} - \frac{1}{3} \sin 6x + C;$$

$$\text{ в) } F(x) = -\frac{3}{2} \cos 2x + 6 \operatorname{ctg} 2x + C; \text{ г) } F(x) = -2 \ln|3-2x| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3-2x} + C;$$

Задача 1. (підручник, №221, ЗНО, 2007, ст.49) (Слайд 29)

Для даної функції $f(x) = 2x+2$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(1;4)$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = x^2 + 2x$	$F(x) = x^2 + 2x + 1$	$F(x) = x^2 + 2x + 2$	$F(x) = x^2 + 2x - 4$	$F(x) = x^2 + 2x - 23$

Розв'язання:

$F(x) = x^2 + 2x + c$; Підставимо задану точку у формулу знайденої первісної і відшукаємо значення c .

$$4 = 1^2 + 2 \cdot 1 + c; \quad 4 = 3 + c; \quad c = 1; \quad \text{Отже шукана первісна: } F(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Відповідь: Б

VI. Розв'язування прикладних задач фізичного змісту. (Слайд 30-33)

План розв'язування

1. записати математичну залежність між фізичними величинами;
2. знайти первісні, використовуючи правила знаходження;
3. використати початкові умови для знаходження конкретного вигляду первісних;
4. записати рівняння зі знайденим значенням С.

Необхідно пригадати з курсу фізики залежності $a = v'$, $v = s'$. Яка з даних величин є первісною?

Задача2. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)=2 \text{ м/с}^2$. Визначте швидкість даного руху як функцію від часу t , якщо в момент $t=0$ вона дорівнювала 3м/с .

Розв'язання:

Прискорення – похідна швидкості. Тому якщо $v(t)$ – шукана швидкість, то $v'(t) = 2$. Отже, $v(t)$ - первісна для функції $a(t)=2$, тому $v(t)=2t+C$. Оскільки $v(t)=3$, то $3=2 \cdot 0+C$, $C=3$.
Відповідь. $v(t)=2t+3$.

VII. Підведення підсумків уроку.

Робота в групах

Гра «Математичне лото» (Слайд 34-36)

Кожна група отримує набір карточок з умовами задач і набором відповідей. Учні розв'язують задачі, та знайшовши правильну відповідь, накривають картки з правильною відповіддю на відповідне завдання.

В результаті правильних відповідей повинен утворитись завершений малюнок.

Завдання: Знайти первісні для функцій $f(x)$.

1). $f(x) = 3 + 5 \cos x - x^3$;

2). $f(x) = 6 \sin x - 2 \cos x + 4$;

3). $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x} + 2 - x^5$;

4). $f(x) = 7 - \frac{4}{\sin^2 x} + \frac{3}{x^2} - x^7$;

Відповіді:

$$1). F(x) = 3x + 5 \sin x - \frac{x^4}{4} + C;$$

$$2). F(x) = -6 \cos x - 2 \sin x + 4x + C;$$

$$3). F(x) = 3 \operatorname{tg} x + 2x - \frac{x^6}{6} + C;$$

$$4). F(x) = 7x + 4 \operatorname{ctg} x - \frac{3}{x} - \frac{x^8}{8} + C;$$

Повернення до епіграфу уроку. (Слайд 37)

VIII. Домашнє завдання. (Слайд 38)

Задача 1.

Для даної функції $f(x) = 6x - x^4$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(1; 2)$

Розв'язання

$$F(x) = 3x^2 - \frac{x^5}{5} - \frac{4}{5}$$

— ■ —

$$F(x) = 3x^2 - \frac{x^5}{5} + c; \quad 2 = 3 - \frac{1}{5} + c; \quad c = -\frac{4}{5};$$

Задача 2.

Швидкість руху точки задається рівнянням $v = 7t^2 - 1$ (м/с). Знайти рівняння руху $S = S(t)$, якщо $S(2) = 12$ (м).

Розв'язання

$$1) v = s',$$

$$2) S(t) = \frac{7}{3}t^3 - t + C,$$

$$3) S(2) = \frac{7}{3} 2^3 - 2 + C = 12 \rightarrow C = -4\frac{2}{3},$$

$$4) S(t) = \frac{7}{3} t^3 - t - 4\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $S(t) = \frac{7}{3} t^3 - t - 4\frac{2}{3}.$

Приклад.

$$a) \int (3e^x - \sin x) dx;$$

Відповідь: $3e^x + \cos x + C;$

$$б) \text{ Знайдіть } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}.$$

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}} = \int (3x-1)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (3x-1)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(3x-1)^2} + C$$