

8. Dạng 8: Toán thực tế

a) Phương pháp giải tự luận.

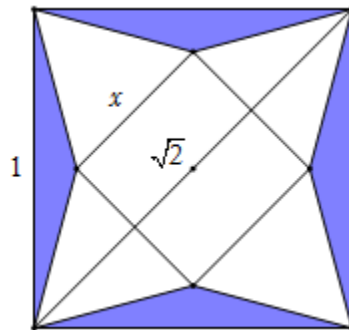
Ví dụ 1: Người ta cắt một tờ giấy hình vuông cạnh bằng 1 để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp như hình vẽ. Để thể tích khối chóp lớn nhất thì cạnh đáy x của hình chóp bằng:

A. $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

B. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

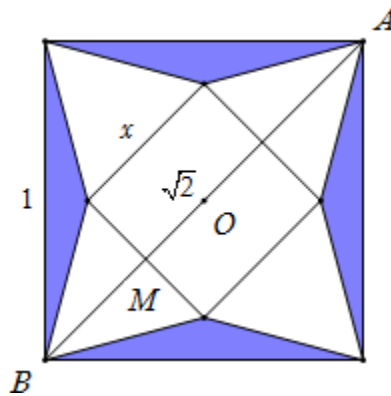
C. $x = 2\sqrt{2}$.

D. $x = \frac{2}{5}$.



Lời giải

Chọn B



Ta có $BM = BO - MO = \frac{1}{2}AB - MO = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}$.

Chiều cao của hình chóp:

$$h = \sqrt{BM^2 - MO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 - x\sqrt{2}}{2}}.$$

Suy ra thể tích của khối chóp:

$$V = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{\frac{1-x\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{x^4 - x^5\sqrt{2}}{2}}.$$

Khảo sát hàm $f(x) = x^4 - x^5\sqrt{2}$ trên $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ta được $f(x)$ lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Cách làm trắc nghiệm. Đầu tiên ta loại đáp án C do $x = 2\sqrt{2} \notin \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Thay ba đáp án còn lại vào hàm số $f(x) = x^4 - x^5\sqrt{2}$. So sánh kết quả nào lớn nhất ta chọn. Nếu đề bài hỏi giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp thì ta không làm theo cách này được.

Ví dụ 2: Người ta cắt miếng bìa hình tam giác đều cạnh bằng $10cm$ như hình bên và gấp theo các đường kẻ, sau đó dán các mép lại để được hình tứ diện đều. Tính thể tích của khối tứ diện tạo thành.

A. $V = \frac{250\sqrt{2}}{12} cm^3.$

B. $V = 250\sqrt{2} cm^3.$

C. $V = \frac{125\sqrt{2}}{12} cm^3.$

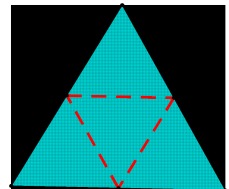
D. $V = \frac{1000\sqrt{2}}{3} cm^3.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tứ diện đều tạo thành là tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $5cm$.

Diện tích đáy là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} cm^2$.

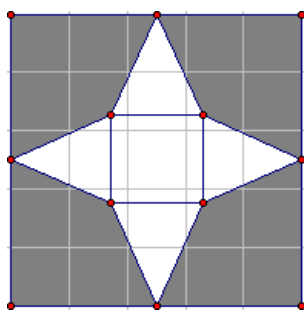


Đường cao $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$, với H là tâm đáy.

Thể tích $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{3} = \frac{125\sqrt{2}}{12} cm^3.$

Ví dụ 3: Từ một miếng bìa hình vuông có cạnh bằng 5, người ta cắt 4 góc bìa 4 tứ giác bằng nhau và gập lại phần còn lại của tấm bìa để được một khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (xem hình). Nếu

chiều cao khối chóp tứ giác đều này bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$ thì x bằng:



A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 3$.

D. $x = 4$.

Lời giải

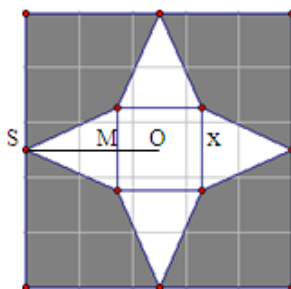
Chọn B

Hình chóp tứ giác đều đỉnh S, O là tâm đáy.

M là trung điểm một cạnh đáy.

$$h = SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{5-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{25-10x} = \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{5-2x}$$

$$h = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 2$$



b) Bài tập vận dụng có chia mức độ (mỗi dạng ít nhất 25 câu)

NHẬN BIẾT.

Câu 1: Một kim tự tháp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 trước công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 154m; độ dài cạnh đáy là 270m. Khi đó thể tích của khối kim tự tháp là:

A. 3.742.200

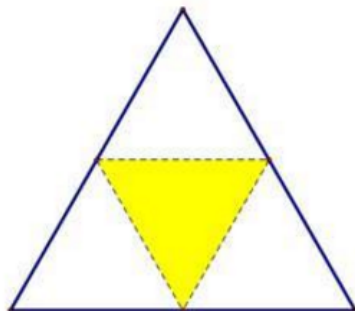
B. 3.640.000

C. 3.500.000

D. 3.545.000

Câu 2: Người ta cắt miếng bìa tam giác đều như hình vẽ và gấp lại theo các đường kẻ, sau đó dán các mép

lại để được hình tứ diện đều có thể tích $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$. Tính độ dài cạnh của miếng bìa theo a ?



- A. a B. $2a$ C. $\frac{a}{2}$ D. $3a$

Lời giải

Hướng dẫn giải

Đáp án: B

Đặt $2x$ là cạnh của miếng bìa. Khi đó cạnh của tứ diện đều là x , suy ra thể tích tứ diện đều là :

$$V = x^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12} . \text{ Do đó } x = a , \text{ suy ra cạnh của miếng bìa là } 2a .$$

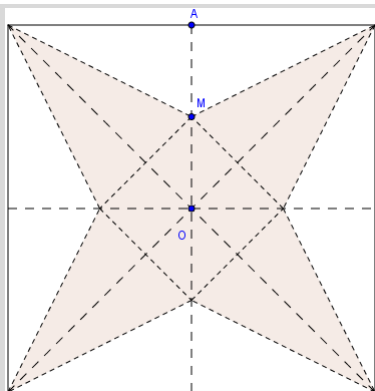
Lưu ý : Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì thể tích của nó là $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$.

THÔNG HIỂU.

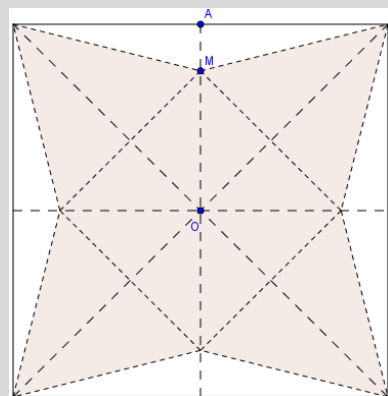
Câu 3: Hai miếng giấy hình vuông bằng nhau được hai bạn Việt và Nam cắt ra và tạo thành một hình chóp tứ giác đều như sau.

Việt : Cắt bỏ miếng giấy như **Hình 1** (với M là trung điểm OA) rồi tạo thành một hình chóp tứ giác đều.

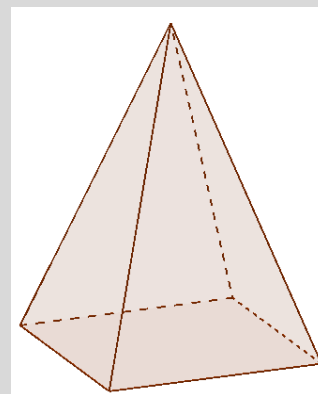
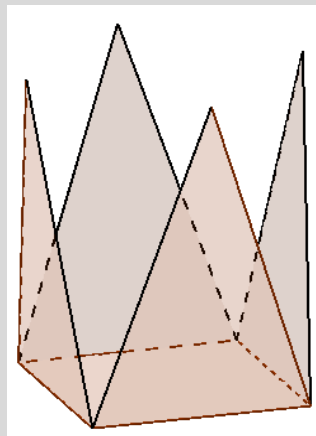
Nam : Cắt bỏ miếng giấy như **Hình 2** (với M nằm trên OA thỏa $OM = 3MA$) rồi tạo thành một hình chóp tứ giác đều.



Hình 1



Hình 2



Gọi V_1 là thể tích khối chóp của Việt, V_2 là thể tích khối chóp của Nam. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{8}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Câu 4: Người ta cắt một tờ giấy hình vuông cạnh bằng $5\sqrt{2}$ để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp. Tính cạnh đáy của khối chóp để thể tích lớn nhất.

A. 4

B. 4

C. 2

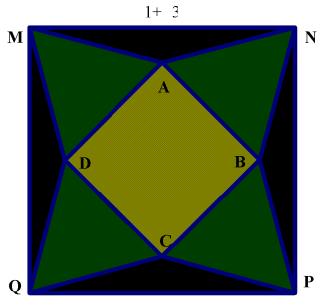
D. A, B, C đều sai

VẬN DỤNG.

Câu 5: Để làm một hình chóp tứ giác đều từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng $1+\sqrt{3}$, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho bốn đỉnh M, N, P, Q trùng nhau(hình vẽ).

Biết rằng, các góc ở đỉnh của mỗi tam giác cân là 150° . Tính thể tích V của khối chóp đều tạo thành.

- A. $V = \frac{3\sqrt{6} + 5\sqrt{2}}{24}$. B. $V = \frac{2}{3}$. C. $V = \frac{52 + 30\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{1}{3}$



Hướng dẫn giải

Đáp án: B

+ $\widehat{AMN} = \widehat{BMQ} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{AMD} = 60^\circ \Rightarrow \Delta MAD$ đều.

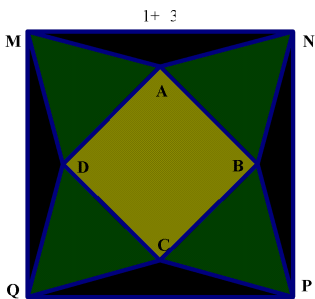
Vì vậy hình chóp tứ giác đều tạo thành có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng MA .

Trong đó, $MA = \frac{MN}{2 \sin 75^\circ} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

+ Dễ dàng chứng minh được rằng:

“Một khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng x thì có thể tích là $V = \frac{x^3 \sqrt{2}}{6}$ ”

+ Với $x = \sqrt{2}$ thì $V = \frac{2}{3}$



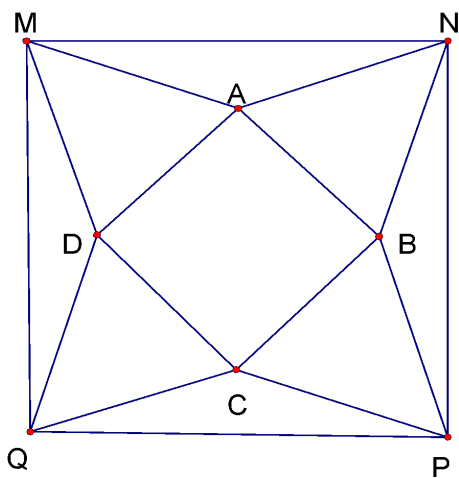
Câu 6: Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập bạn Bình lớp 12A của trường THPT B đã làm một hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một tấm tôn hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng a , cắt mảnh tôn theo các tam giác cân MAN ; NBP ; PCQ ; QDM sau đó gò các tam giác ANB ; BPC ; CQD ; DMA sao cho bốn đỉnh M ; N ; P ; Q trùng nhau (như hình). Thể tích lớn nhất của khối chóp đều là

A. $\frac{a^3}{36}$.

B. $\frac{a^3}{24}$.

C. $\frac{4\sqrt{10}a^3}{375}$.

D. $\frac{a^3}{48}$.



Hướng dẫn giải

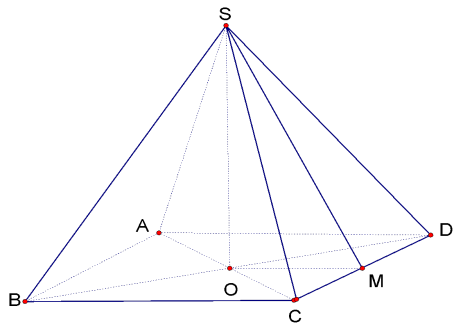
Chọn C

Gợi ý: Gọi cạnh hình vuông ABCD là x thì đường cao mặt bên là: $SM = \frac{a\sqrt{2} - x}{2}$

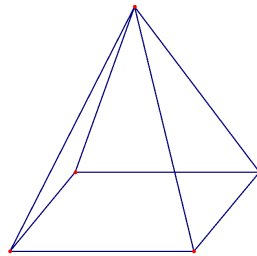
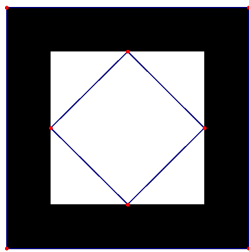
suy ra chiều cao của phôi chóp $SO = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - 2\sqrt{2}ax}$

Vậy $V = \frac{1}{6}x^2\sqrt{2a^2 - 2\sqrt{2}ax}$ lập bbt suy ra V lớn nhất tại $x = \frac{2\sqrt{2}a}{5}$

Ta tìm $\max V = \frac{4\sqrt{10}a^3}{375}$



Câu 7: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1m như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (m), sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất là



A. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

B. $x = \frac{1}{2}$.

C. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án: A

Thể tích của khối chóp thu được là

$$V = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{x^4(1-x\sqrt{2})}{2}}.$$

Xét $f(x) = x^4(1-x\sqrt{2})$ trên $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ được $f(x)$ lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

VẬN DỤNG CAO (NẾU CÓ)

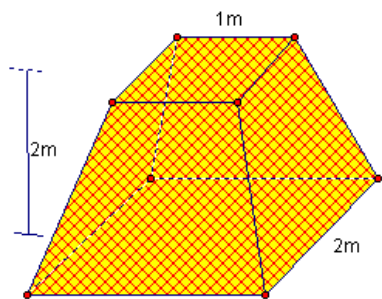
Câu 8: Một đồng đất được vun thành hình một khối chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng 2m, cạnh đáy nhỏ bằng 1m và chiều cao bằng 2m. Khối lượng (thể tích) đồng đất có giá trị gần nhất với con số

A. 4,55m³.

B. 4,65m³.

C. 4,7 m³.

D. 4,75m³.



Hướng dẫn giải

Đáp án: B

Kéo dài các cạnh bên hình chóp cắt lên phía trên ta được hình chóp lớn là hình chóp sinh ra hình chóp cắt. Hình chóp nhỏ và

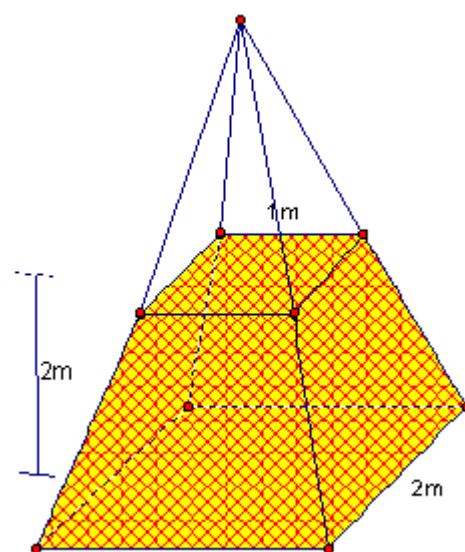
hình chóp lớn đồng dạng theo tỉ số $k = \frac{1}{2}$

(là tỉ số giữa độ dài cạnh đáy nhỏ và độ dài cạnh đáy lớn hình chóp cắt)

Thể tích chóp lớn bằng $\frac{1}{3} a^2 .h = \frac{1}{3} .2^2 .4 = \frac{16}{3} m^3$

Tỉ số giữa thể tích chóp nhỏ và thể tích chóp lớn bằng $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ Thể tích chóp cắt bằng $\frac{7}{8}$ thể tích chóp lớn và bằng $\frac{14}{3} m^3$



Bảng đáp án