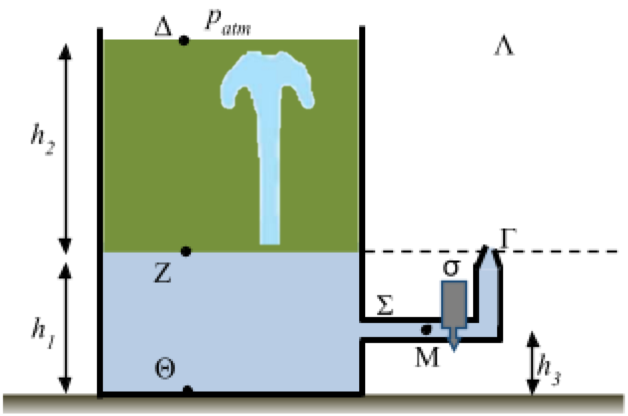
Ένα συντριβάνι από νερό και … λάδι



Μια κυλινδρική δεξαμενή ανοικτή στην ατμόσφαιρα περιέχει δύο στρώματα διαφορετικών υγρών. Ένα στρώμα νερού ύψους $h_1 = 2m$ και ένα στρώμα λαδιού ύψους $h_2 = 4m$. Η δεξαμενή φέρει, σε ύψος $h_3 = 1m$ από το οριζόντιο έδαφος, πλευρικό οριζόντιο σωλήνα Σ με στρόφιγγα και κατακόρυφο ακροφύσιο, η έξοδος του οποίου βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών, όπως στο σχήμα, με τη στρόφιγγα (σ) αρχικά κλειστή. Η διάμετρος του οριζόντιου σωλήνα είναι $\delta_1 = 0,2\ m$ και του άκρου Γ του ακροφυσίου $\delta_2 = 0,1\ m$.

(α) Με κλειστή τη στρόφιγγα υπολογίστε:

i) Την πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια των δυο υγρών.

ii) Τη δύναμη που ασκείται στον πυθμένα του δοχείου αν έχει διάμετρο $d = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\ m$.

(β) Αν ανοίξουμε τη στρόφιγγα και δεχτούμε ότι η διατομή της δεξαμενής είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτές των σωλήνων, υπολογίστε:

i) Την αρχική ταχύτητα που θα εξέλθει το νερό στο άκρο Γ του ακροφυσίου, αν υποθέσουμε ότι δημιουργηθεί εξαρχής στρωτή και μόνιμη ροή.

ii) Το αρχικό ύψος h του πίδακα.

iii) Την πίεση σε ένα σημείο Μ στον οριζόντιο σωλήνα.

Δίνονται $\rho_\nu = 1000\ kg/m^3$, $\rho_\lambda = 900\ kg/m^3$, $g = 10\ m/s^2$, ενώ τα υγρά θεωρούνται ιδανικά.

Απάντηση

(α) i) Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής για τα σημεία Δ(στην επιφάνεια του λαδιού) και Ζ(στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-λαδιού)

$$p_Z = p_\Delta + \rho_\lambda g h_2 \xrightarrow{p_\Delta = p_{atm}} p_Z = 1\cdot 10^5 + 0,9\cdot 10^3\cdot 10\cdot 4$$
$$\Leftrightarrow p_Z = 1\cdot 10^5 + 0,36\cdot 10^5 \Leftrightarrow p_Z = 1,36\cdot 10^5\ Pa$$

ii) Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής για τα σημεία Ζ (στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-λαδιού) και Θ (στον πυθμένα)

$$p_{\Theta} = p_Z + \rho_v g h_1 \Leftrightarrow p_{\Theta} = 1,36 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow p_{\Theta} = 1,36 \cdot 10^5 + 0,20 \cdot 10^5 \Leftrightarrow p_{\Theta} = 1,56 \cdot 10^5 \, Pa$$

Η πιεστική δύναμη στον πυθμένα θα έχει μέτρο

$$F = p_{\Theta} \cdot A_{\pi\upsilon\theta} = p_{\Theta} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1,56 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot \frac{4}{\pi} = 6,24 \cdot 10^5 \, N$$

(β) i) Η εξίσωση συνέχειας για το νερό μεταξύ των διατομών στα σημεία Ζ και Γ δίνει

$$A_Z \cdot \upsilon_Z = A_{\Gamma} \cdot \upsilon_{\Gamma} \Leftrightarrow \upsilon_Z = \frac{A_{\Gamma}}{A_Z} \cdot \upsilon_{\Gamma} \xrightarrow{A_{\Gamma} << A_Z} \upsilon_Z \approx 0$$

δηλαδή το νερό (και επομένως και το λάδι) ισορροπεί, άρα δεν έχει αλλάξει κάτι για την πίεση στο Ζ, που εξακολουθεί να είναι

$$p_Z = 1,36 \cdot 10^5 \, Pa$$

Με επίπεδο αναφοράς δυναμικής ενέργειας, που διέρχεται από τα Ζ και Γ
η ταχύτητα στην έξοδο Γ του ακροφυσίου υπολογίζεται από την εξίσωση Bernoulli θεωρώντας μια ρευματική γραμμή μεταξύ των θέσεων Ζ (διαχωριστική επιφάνεια νερού-λαδιού) και Γ (έξοδος ακροφυσίου):

$$p_Z + 0 + \frac{1}{2}\rho_v \upsilon_Z^2 = p_{\Gamma} + 0 + \frac{1}{2}\rho_v \upsilon_{\Gamma}^2 \Leftrightarrow p_Z = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho_v \upsilon_{\Gamma}^2$$
$$\Leftrightarrow \upsilon_{\Gamma} = \sqrt{\frac{2\left(p_Z - p_{atm}\right)}{\rho_v}} \Leftrightarrow \upsilon_{\Gamma} = \sqrt{\frac{2\left(1,36 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5\right)}{10^3}}$$
$$\Leftrightarrow \upsilon_{\Gamma} = \sqrt{72} \Leftrightarrow \upsilon_{\Gamma} = 6\sqrt{2} m/s$$

ii) Ο πίδακας του νερού εκτελεί κατακόρυφη βολή. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για μια στοιχειώδη μάζα νερού από (Γ) → (Λ)

$$K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_{\Lambda} + U_{\Lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \upsilon_{\Gamma}^2 = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \upsilon_{\Gamma}^2 + dm \cdot g \cdot h$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{\upsilon_{\Gamma}^2}{2g} \Leftrightarrow h = \frac{72}{20} \Leftrightarrow h = 3,6m$$

(γ) Εφαρμόζουμε την εξίσωση συνεχείας για τις διατομές στα σημεία Μ και Γ:

$$A_M \cdot \upsilon_M = A_{\Gamma} \cdot \upsilon_{\Gamma} \Leftrightarrow \upsilon_M = \frac{A_{\Gamma} \cdot \upsilon_{\Gamma}}{A_M}$$
$$\Leftrightarrow \upsilon_M = \frac{\pi \cdot 0,05^2 \cdot 6\sqrt{2}}{\pi \cdot 0,1^2} \Leftrightarrow \upsilon_M = 1,5\sqrt{2} m/s$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli σε μια ρευματική γραμμή στον οριζόντιο σωλήνα μεταξύ των σημείων Μ και Γ, με επίπεδο αναφοράς δυναμικής ενέργειας το έδαφος, έχουμε:

$$p_M + \frac{1}{2}\rho_v \upsilon_M{}^2 + \rho_v g h_3 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho_v \upsilon_\Gamma{}^2 + \rho_v g h_1$$

$$\Leftrightarrow p_M = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho_v \upsilon_\Gamma{}^2 + \rho_v g h_1 - \frac{1}{2}\rho_v \upsilon_M{}^2 - \rho_v g h_3$$

$$p_B = 1\cdot 10^5 + \frac{1}{2}\cdot 10^3 \cdot 72 + 10^3 \cdot 10 \cdot 2 - ½\, 10^3 \cdot 4{,}5 - 10^3 \cdot 10 \cdot 1$$

$$p_B = 143750\ N / m^2$$

Ανδρέας Ριζόπουλος