Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Mendoza

UTN - FRM
Ingeniería Electromecánica

INGENIERÍA ELECTROMECÁNICA II

GABINETE 2022

Trabajo Práctico N°1

NÚMEROS COMPLEJOS

ASIGNATURA:				CURSO:	ANUAL
INGENIERÍA ELECTROMECÁNICA II				*2°*	
	FOTO	***NOMBRE Y APELLIDO:***			
		Matias Ingrassia			
		Legajo N°:	***ESPECIALIDAD:***	***AÑO:*** 2022	
			ING. ELECTROMECÁNICA		
	Prof. Tit.	*Ing. Alejandro. FARA*			
	Prof. Adj.:	*Ing. L. ÁLVAREZ*			
	Ayte de 1ra	*Ing. Carlos VILLALONGA*			
	Ayte Ad Honorem	*Ing. Darío VIDELA*			
TRABAJO PRÁCTICO DE GABINETE N°		**1**	***DENOMINACIÓN DEL PRÁCTICO:***		
			Números Complejos		
			OBJETIVOS:		
			Ver carátula		
FECHA DE ENTREGA			***REVISIÓN N°***	***FECHA***	***FIRMA***
			1ª:	__/__/__	
_____/_____/_____			*2ª:*	__/__/__	
			APROBACIÓN	__/__/__	

EJERCICIOS

N°	OBSERVACIONES	V°B°	N°	OBSERVACIONES	V°B°
1.-					

2.-					
3.-					
4.-					
5.-					
6.-					
					X
					X
					X
					X

CATALOGOS Y NORMAS:	***FIRMA DOCENTE***	
……………….…………………………………………………………… ………………….….…		
………………………..……………….………………………………… ……………………..…	***REVISIÓN N°***	***FECHA***
……………………………………..…………….………………………… …………………….	***REV. 0***	29/03/16
………………………………………..……………..…………………… …………………….	***REV. 1***	*24/02/17*
………………………………………..……………..…………………… ……………………..	***REV. 2***	*02/03/18*
………………………………………..……………..…………………… ……………………..	***REV. 3***	*25/02/19*
	REV. 4	*25/02/22*

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnolo
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Mendoza
UTN - FRM
Ingeniería
Electromecánica

INGENIERÍA ELECTROMECÁNICA II

GABINETE 2022

Trabajo Práctico N°1

NÚMEROS COMPLEJOS

Introducción

Los **números complejos** son una extensión de los números reales y forman el mínimo cuerpo algebraicamente cerrado que los contiene. El conjunto de los números complejos se designa como ℂ, siendo ℝ el conjunto de los reales se cumple que ℂ⊂ℝ. Los números complejos incluyen todas las raíces de los polinomios, a diferencia de los reales. Todo **número complejo** puede representarse como la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra **i**). En electricidad a la unidad imaginaria la denominamos con ***j*,** para diferenciarla de la corriente eléctrica. Donde �� $= \sqrt{-1}$

Llamamos, entonces *conjunto de los números complejos* al conjunto de los pares ordenados de números reales $(a\ b,\ )$en donde a pertenece al campo real y **b** al campo de los números imaginarios. Los mismos se pueden escribir de las siguientes formas:

a. Forma binómica: �� = �� + ����
b. Forma polar: �� = |��|.∟��
c. Forma trigonométrica: �� = |��|. �������� + ��|��|. ��������
d. Forma exponencial**:**�� = |��|��^����

Operaciones

En la forma binómica:

Suma. (�� + ����) + (�� + ����) = (�� + ��) + ��(�� + ��)

Multiplicación. (�� + ����). (�� + ����) = [(��. �� − ��. ��; ��(���� + ������)] ���� ������ ��.�� = ��^{2} = − 1. Diremos que la suma y producto de pares no está definida en $\mathbb{R}^2$ (en el plano).

Dos propiedades que cumplen los pares de números reales y que se mantienen para los complejos son:

Igualdad: (�� + ����) = (�� + ����) entonces �� = �� �� �� = ��

Multiplicación por un escalar: ��(�� + ����) = (���� + ������) donde el escalar α pertenece a ℝ (el campo de los números reales)

Representación gráfica

Dibujaremos, <u>a manera de ejemplo</u>, una suma (que se explicará más adelante): Dados ��$_1$ = (2 + ��1) �� ��$_2$ = (0 + ��3), h����������

��$_1$ + ��$_2$:

INGENIERÍA

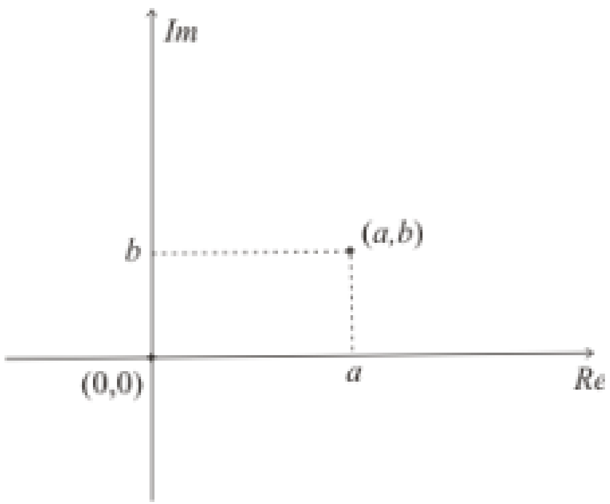
ELECTROMECÁNICA II

GABINETE 2022

Trabajo Práctico N°1

NÚMEROS
COMPLEJOS

Así pues será: $(2 + 0) +$ ��$(1 + 3) = 2 +$ ��4



Dónde: ���� representa al eje de los números imaginarios (*j*) y ℝ�� identifica al eje de los números reales (ℝ��). La letra "a" en el ejercicio de ejemplo vale 2 y "b" es j4.

Módulo y argumento de un número complejo

Forma binomial:

Sea �� = (�� + ����) un número complejo cualquiera. Llamaremos *módulo* del número complejo |��|, al número real dado por √��² + ��² y lo denotaremos por z. El módulo se interpreta como la distancia al origen del número z(*Gráfica 1*).

Por otra parte, llamaremos *argumento* del número complejo �� = (�� + ����) , al ángulo comprendido entre el eje ***+x*** y el radio vector que determina a z. El argumento de Z se calcula mediante la expresión:

�� = ���������� (�� / ��).

UTN - FRM

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnolo
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Mendoza

Ingeniería Electromecánica

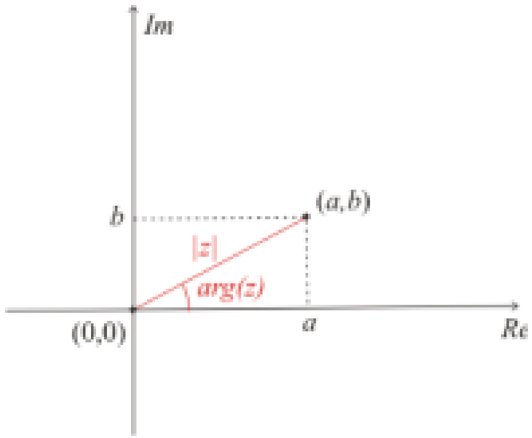
INGENIERÍA

ELECTROMECÁNICA II

GABINETE 2022

Trabajo Práctico N°1

NÚMEROS COMPLEJOS



Gráfica 1

Forma trigonométrica:

En este caso será el módulo de Z que multiplica a la suma entre el �������� y el ��������. O sea: �� = |��|. �������� + ��|��|. ��������

Suma y multiplicación de números complejos en la forma binómica Suma:

(�� + ����) + (�� + ����) = (�� + ��) + �� (�� + ��) Puesto que a,b,c,d son todos números reales. ***Multiplicación:***

(�� + ����) (�� + ����) = ���� + ������ + ������ + ��2 ���� = (���� − ����) + ��(���� + ����) ����������� $��^2 = -1$.

Vemos que los resultados son los mismos que las definiciones de suma y producto dados al inicio; por lo que la realización de las operaciones de suma y multiplicación con números complejos se puede realizar en la forma de pares o en la forma binómica, con la ventaja a favor de la forma binómica que se trabaja con las reglas del álgebra y no es necesario memorizar nada nuevo.

División de números complejos

Para realizar este tipo de operación de manera más sencilla debemos convertir a los números complejos en su forma binomial a la forma trigonométrica. Una vez realizado este paso se dividen los módulos y se restan los ángulos θ (argumentos del número complejo).

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnolo
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Mendoza

UTN - FRM
Ingeniería Electromecánica

INGENIERÍA

ELECTROMECÁNICA II

GABINETE 2022

Trabajo Práctico N°1

NÚMEROS COMPLEJOS

Si ��$_1 = 2 +$ ��3 �� ��$_2 = 4 +$ ��5 entonces: |��$_1| = \sqrt{(}2^2 + 3^2 = 3,6$; |��$_2| = \sqrt{(}4^2 + 5^2 = 6,4$ $\varphi_1 = \mathrm{arctg}\ {}^3{}_2 = 56,30°$; $\varphi_2 = \mathrm{arctg}\ {}^5{}_4 = 51,34°$. De manera que:

��$_2 = 3,6\angle 56,30°$

��$_1$

$6,4\angle 51,34° = 0,56 < 4,96°$

Ejercitación:

Siendo:

Z_1 = N+jA

Z_2 = 2N – j3A

Z_3= N/2+j (A/2)

Z_4 = –j6A

Z_5 = –4N+j5A

Donde:

N: es la cantidad de letras del nombre del alumno

A: es la cantidad de letras del apellido del alumno

(Ejemplo: Z_1 = N+jA y si el alumno es Miguel Faraday será N = 6 y A = 7 será: Z_1 = 6+j7)

E-1 Resolver en forma binomial y trigonométrica:

a) $��_1 + ��_2$
b) $��_3 . ��_4$
c) $\frac{��_2}{��_3}$
d) $(��_2 + ��_1). 3. (��_4 - ��_5)$
e) $2. ��_1 + 3. ��_4$
f) $\frac{��_5}{0,5.��_3}$

E-2 Graficar en papel milimetrado cada resultado los ítems anteriores.

E-3 Expresar en forma cartesiana los siguientes números complejos: a)
$��_1 = 10 < 45°$

b) $��_2 = \sqrt{2}. <^{��}{}_6$
c) $��_3 = {}^3{}_4 < 180°$

E-4 Expresar en forma polar los siguientes números complejos: a)
$��_1 = 2 + ��2$
b) $��_2 = ��5,5$
c) $��_3 = \sqrt{7}$

E-5 Dados los siguientes números complejos:

$$��_1 = 1 + ��4$$
$$��_2 = 3 + ��3$$

Resolver:

a) $\frac{1}{��_1}=$
b) $\frac{1}{��_2}=$

E-6 Representar los siguientes números complejos en forma exponencial a)
$��_1 = 5 + ��2$
b) $��_2 = 100 <^{��}{}_6$
c) $��_3 = ��1$

E-7 Encontrar la expresión de la potencia en CA con números complejos

�� = �� .��

����������: �� = ��. ����0;�� = ��. ������; �� = ����−����

����í: �� = ��. ����0.����−���� = ��.��. (�������� − ����������) = ��.��. �������� − ����.��. �������� = �� − ���� ���� ��������������: �� = �� − ����

Dónde:

P= potencia activa [W]

Q= potencia reactiva [V.A.r]

S= potencia aparente [V.A.]

oooo000oooo