DETERMINANTES

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \\ 5 & \frac{1}{2} & 8 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} (=36)$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} (=36)$

g) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11$ h) $\begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2a$ i) $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1$ j) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$ k) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & b \\ a & b & b \end{vmatrix} = -a(b-a)^2$

2. Halla los valores de x para que:

$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 1-x & 3 \\ 3 & 3 & 6-x \end{vmatrix} = 0\,(sol: -1\, y\, 9),\quad \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x \\ 4 & 0 & -x \end{vmatrix} = 2\ (sol: -2\, y\, 3),\quad \begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0\,(Sol: 0\, y\ a+b+c)$

(resuelve el tercero sumando columnas)

3. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-289)$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-10)$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1060)$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} (0)$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} (-250)$ f) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

g) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \\ 2 & -4 & 7 & -7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} (-52)$ h) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 9 & 15 & 21 \\ 3 & 12 & 21 & 30 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (9)$ j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+2 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix} = (a+b+c)$

k) $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (0)$ l) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = (cab)$ m) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (10)$

n) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (4)$ ñ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} (-abc)$ o) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+b & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+c \end{vmatrix} (abc)$

4. Calcula el valor de:

a) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = (2a^2b^4c^2)$ b) $\begin{vmatrix} 2a & 3a-b \\ 2c & 3c+b \end{vmatrix} = (2b(c+a)$

c) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} (0)$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} (0)$

5. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$ Calcula en función de a el valor de este determinante, dando el resultado factorizado. (Calcúlalo sumando columnas, Sol.: $(a+2)(a-1)^{2a}$

6. Aplica las propiedades de los determinantes para comprobar que los siguientes determinantes son NULOS, sin necesidad de calcularlos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ b & 5b & 6b \\ c & 7c & 8c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 3 & 34 & 4 \\ 5 & 56 & 6 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ *g)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab & (a-b)^2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7. Demuestra la siguiente igualdad: $\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$

8. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3$, calcula: a) $\begin{vmatrix} 2z & y & x \\ 2r & q & p \\ 2c & b & a \end{vmatrix}$ (-6) b) $\begin{vmatrix} a & x & p \\ c & z & r \\ b & y & q \end{vmatrix} = (-3)$ c) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \end{vmatrix} = (6)$

9. Calcula en cada caso $|A|$ si A es una matriz: a) idempotente ($A^2 = A$) (Sol: $|A| = 1$) b) nilpotente. $A^n = 0$ (Sol: $|A| = 0$)

10. Calcula el valor de:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$

(Sol.: a) 105(b+a)(b-a)(c+a)(c-a) b) 2 c) (a-b)(b-c)a-c) d) $3(1+x)(3-x)^3$)

11. Encuentra dos matrices cuadradas de orden 2, A y B, tales que $|A+B| \neq |A| + |B|$

12. Calcula razonadamente la matriz A sabiendo que se verifica la igualdad:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0' & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Sol:\ B^{-1} = 1/6 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0' & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4/6 \end{pmatrix}$$

13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices, cuando sea posible y, en caso de no serlo, explica la razón:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Sol : a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$ b) $-1/6 \begin{pmatrix} -6 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $1/6 \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ d) no $\exists$ e) no $\exists$ *f)* $1/3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -10 & -1 & 3 \\ 11 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

14. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que AXA = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sol $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

15. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a) Halla los valores de m para los cuales A no tiene inversa.(Sol: m=+ - raiz(5))
b) Para m=2, obtén si existe, la matriz X que cumple X · A =(1 0 -1) (sol.: X=(1 3 1)

16. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ a) Halla los valores de m para los cuales A tiene inversa. (Sol.: m distinto de 3 y de 1)

b) Para m=4 Calcula A^{-1} Sol.: $A^{-1} = -1/3 \begin{pmatrix} -19 & -1 & -14 \\ 12 & 0 & 0 \\ -16 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

17. Sea A, B y X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican la relación $A.X.B = I$, siendo I la matriz unidad.
a) Si el determinante de A vale –1 y el de B vale 1, calcula razonadamente / X/. (Sol.: /X/=-1
b) Calcula de forma razonada la matriz X si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Indicar para que valores de α la matriz A posee inversa. Calcula la matriz inversa de A para el valor $\alpha = 0$. (Sol: $\alpha \neq 1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

19. Halla la matriz X tal que $A \cdot X \cdot B = I$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Sol: X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

20. Despeja la matriz X en la siguiente ecuación y halla su valor: $2A - AX = BX$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

21. Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que: det (A) = -7 y $A\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

22. Halla la matriz X tal que $A^2 \cdot X + B \cdot X = C$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

23. Calcula la matriz X que verifica AXB - 3A = I, siendo A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

24. Determina la matriz X que verifica $AX = X - B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

25. Determina para que valores de λ la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Calcula, si existe, A^{-1}, cuando $\lambda = 4$.

26. Calcula el rango de las siguientes matrices:
A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -12 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

27. Discutir, según los distintos valores del parámetro o parámetros que aparecen, los rangos de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 2 & a & 3a \\ 3 & 2a & 4a \end{pmatrix}$$

28. Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Estudia su rango según los valores de m, y di para cuales de ellos es inversible. Halla, si es posible, la inversa para m=2 y comprueba el resultado.

29. Para cualquier nº λ, $M(\lambda)$ es la matriz $M(\lambda)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ se pide: a)Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$ y justificar que para cualquier número real λ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$. B) Calcular $M(0)^{-1}$.

c) Si $A=(8), M=(4)\ yM=(3),$ calcúlese razonadamente el determinante de la matriz producto $A\cdot B^{-1}\cdot C^{-1}$.

30. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

- Calcula los valores de x para los cuáles A tiene inversa.
- Calcula la matriz Y cuadrada de orden 3 que es solución de la ecuación matricial AY+B = I, siendo A la matriz anterior cuando x=3, I la matriz identidad de orden 3 y B = EMBED Equation.3

31. Resuelve la ecuación matricial AX+B = C, siendo A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$