

DETERMINANTES

1. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \\
 \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \\ 5 & \frac{1}{2} & 8 \end{vmatrix} \\
 \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} (=36) & \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} (=36) \\
 \text{g)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 & \text{h)} \begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2a \\
 \text{i)} \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1 & \text{j)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \\
 & \text{k)} \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & b \\ a & b & b \end{vmatrix} = -a(b-a)^2
 \end{array}$$

2. Halla los valores de x para que:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 1-x & 3 \\ 3 & 3 & 6-x \end{vmatrix} = 0 \text{ (sol: } -1 \text{ y } 9), \quad \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x \\ 4 & 0 & -x \end{vmatrix} = 2 \text{ (sol: } -2 \text{ y } 3), \quad \begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0 \text{ (Sol: } 0 \text{ y } a+b+c)$$

(resuelve el tercero sumando columnas)

3. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-289) & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-10) \\
 \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1060) & \text{d)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = (0) \\
 \text{e)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-250) & \text{f)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{g)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \\ 2 & -4 & 7 & -7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-52) & \text{h)} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 9 & 15 & 21 \\ 3 & 12 & 21 & 30 \end{vmatrix} \\
 \text{i)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (9) & \text{j)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+2 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix} = (a+b+c)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{k)} \begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (0) & \text{l)} \begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = (cab) \\
 \text{m)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (10)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{n)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (4) & \text{ñ)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} = (-abc) \\
 \text{o)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+b & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+c \end{vmatrix} = (abc)
 \end{array}$$

4. Calcula el valor de:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = (2a^2b^4c^2) & \text{b)} \begin{vmatrix} 2a & 3a-b \\ 2c & 3c+b \end{vmatrix} = (2b(c+a))
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c)} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = (0) & \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = (0)
 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

5. Calcula en función de a el valor de este determinante, dando el resultado factorizado. (Cálculalo sumando columnas, Sol.: $(a+2)(a-1)^{2a}$)

6. Aplica las propiedades de los determinantes para comprobar que los siguientes determinantes son NULOS, sin necesidad de calcularlos.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ b & 5b & 6b \\ c & 7c & 8c \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 3 & 34 & 4 \\ 5 & 56 & 6 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} & \text{g)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\text{h)} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab & (a-b)^2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Demuestra la siguiente igualdad:
- $$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$$

8. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3$, calcula:
- $$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 2z & y & x \\ 2r & q & p \\ 2c & b & a \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} a & x & p \\ c & z & r \\ b & y & q \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \end{vmatrix} \end{array}$$

9. Calcula en cada caso $|A|$ si A es una matriz: a) idempotente ($A^2 = A$) (Sol: $|A| = 1$) b) nilpotente. $A^n = 0$ (Sol: $|A| = 0$)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

10. Calcula el valor de:
(Sol.: a) $105(b+a)(b-a)(c+a)(c-a)$ b) 2 c) $(a-b)(b-c)a-c$ d) $3(1+x)(3-x)^3$)

11. Encuentra dos matrices cuadradas de orden 2, A y B, tales que $|A+B| \neq |A| + |B|$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Calcula razonadamente la matriz A sabiendo que se verifica la igualdad:

$$\text{Sol: } B^{-1} = 1/6 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4/6 \end{pmatrix}$$

13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices, cuando sea posible y, en caso de no serlo, explica la razón:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: a)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b)} -1/6 \begin{pmatrix} -6 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c)} 1/6 \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) no } \exists \quad \text{e) no } \exists \quad \text{f) } 1/3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -10 & -1 & 3 \\ 11 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sol $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a) Halla los valores de m para los cuales A no tiene inversa. (Sol: $m = \pm \sqrt{5}$)
b) Para $m=2$, obtén si existe, la matriz X que cumple $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (sol.: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$)

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ a) Halla los valores de m para los cuales A tiene inversa. (Sol.: m distinto de 3 y de 1)

$$A^{-1} = -1/3 \begin{pmatrix} -19 & -1 & -14 \\ 12 & 0 & 0 \\ -16 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Para $m=4$ Calcula A^{-1}

Sol.:

17. Sea A, B y X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican la relación $A \cdot X \cdot B = I$, siendo I la matriz unidad.
a) Si el determinante de A vale -1 y el de B vale 1, calcula razonadamente /X/. (Sol.: /X/=-1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Calcula de forma razonada la matriz X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

18. Dada la matriz Indicar para que valores de α la matriz A posee inversa. Calcula la matriz inversa de A para

$$\alpha \neq 1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

el valor $\alpha = 0$.

(Sol:

19. Halla la matriz X tal que $A \cdot X \cdot B = I$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol.: } X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

20. Despeja la matriz X en la siguiente ecuación y halla su valor: $2A - AX = BX$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

21. Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que: $\det(A) = -7$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

22. Halla la matriz X tal que $A^2 \cdot X + B \cdot X = C$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

23. Calcula la matriz X que verifica $AXB - 3A = I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

24. Determina la matriz X que verifica $AX = X - B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

25. Determina para que valores de λ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Calcula, si existe, A^{-1} , cuando $\lambda = 4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -12 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

26. Calcula el rango de las siguientes matrices:

27. Discutir, según los distintos valores del parámetro o parámetros que aparecen, los rangos de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 2 & a & 3a \\ 3 & 2a & 4a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

28. Dada la matriz: . Estudia su rango según los valores de m, y di para cuales de ellos es inversible. Halla, si es posible, la inversa para m=2 y comprueba el resultado.

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

29. Para cualquier n° λ , $M(\lambda)$ es la matriz se pide: a) Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$ y justificar

que para cualquier número real λ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$. B) Calcular $M(0)^{-1}$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$, calcúlese razonadamente el determinante de la matriz producto $A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$.

· **Calcula los valores de x para los cuáles A tiene inversa.**

· **Calcula la matriz Y cuadrada de orden 3 que es solución de la ecuación matricial $AY+B = I$, siendo A la matriz anterior cuando $x=3$, I la matriz identidad de orden 3 y B =** EMBED Equation.3

30. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

31. Resuelve la ecuación matricial $AX+B = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$