Занятие № **Группа ХКМ 1/1** **Дата: 21.02.2024**

Тип занятия: практическое занятие

Тема занятия: «*Определенный интеграл в жизни*»

Цель занятия:

Деятельностная:

– создать условия для закрепления понятия первообразной путем выполнения практикоориентированных заданий на вычисление первообразных; формирование умения находить первообразные заданных функций.

Содержательная:

– закрепить представление о первообразной;

– повторить понятие первообразной, мгновенной скорости;

– познакомиться с практикоориентированными задачами на вычисление первообразных.

Оборудование занятия: доска, учебник.

План занятия:

1. Применение первообразной.

2. Применение первообразной, график которой проходит через заданную точку

3. Решение задач, обратных задаче нахождения закона изменения скорости материальной точки по закону ее движения

4. Разбор типовых заданий перед контрольной работой

0. Актуализация знаний:

1) Какая из двух функций является первообразной для другой.

sin x и – cos x

sin x и cos x

4x+2 и 4

5-3x и -3

2) Найдите какую-нибудь первообразную для заданной функции

$f(x)=4x^3$,

f(x)=7,

f(x)=cos x,

возможные ответы:

$F(x)=x^4-5$

F(x)=7x+1

F(x)=3+sin x

3) Вопрос: как проверить, что полученные функции F(x) являются первообразными для соответствующих функций f(x)?

1. Применение первообразной.

С точки зрения механики скорость прямолинейного движения определяется как производная пути по времени. Если некоторая точка прошла путь S(t), то ее мгновенная скорость v(t) = S '(t). Если теперь рассмотреть обратную задачу – нахождение пути, пройденного точкой с заданной скоростью, то придем к функции S(t), которую называют первообразной функции v(t), т.е. такой функцией, что S '(t) = v(t).

2. Нахождение первообразной, график которой проходит через данную точку.

Теперь наша задача разобраться, умеем ли мы решать более сложные задания. Для функции f найти первообразную, график которой проходит через точку M.

Как решаются задания данного вида?

- находим общий вид первообразных;
- находим C, используя координаты заданной точки;
- записываем ответ: искомую первообразную.

3. Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№1. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью v(t)=8t–4. Найдите закон движения точки, если в момент времени t=2с пройденный путь составил 4 м.

Решение

Воспользуемся определением первообразной, т.к. $S(t)=v_0t+at^2/2$

S’(t) = v(t).

Найдем все первообразные $S(t)= -4t+4t^2 +c$.

Подставим t=2с и пройденный путь S=4 м.

4= -8+16+c

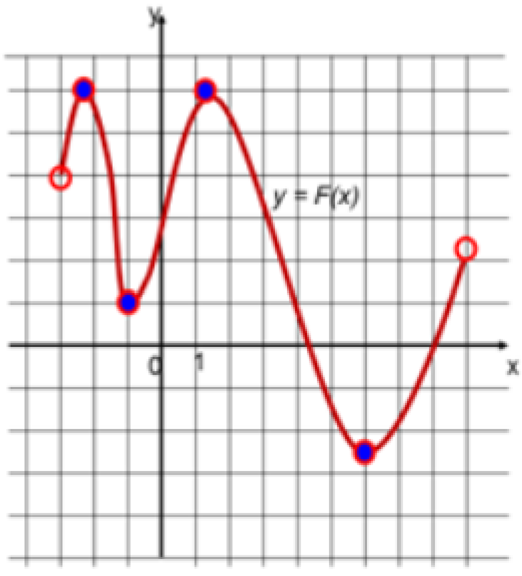
C= -4.

Следовательно, закон движения будет выглядеть следующим образом:

s(t)=4t2–4t–4

Ответ: s(t)=4t2–4t–4

№2. По графику первообразной функции y = F(x) определите количество точек, в которых функция y = f(x) равна нулю.



Решение:

Так как F'(x) = f(x) -по определению первообразной, то точки, в которых функция f(x) (производная функции F(x)) – это точки экстремума функции F(x). А таких точек на графике 4.

Ответ: 4.

№3. Докажите, что функция y = F(x) является первообразной для функции y = f(x).

$$F(x) = x^2 - e^{2x} + 2, f(x) = 2x - 2e^{2x}$$

Решение:

Доказательство.

$F'(x)=(x^2-e^{2x}+2)'=2x–2e^{2x}$

По определению первообразной, F '(x)=f(x), следовательно, F'(x) и есть первообразная для функции f(x)

Вопросы для закрепления:

1. Какое из утверждений является неверным?

A) Если F(x) — первообразная для f(x), и k — постоянная, то k·F (x) — первообразная для k·f(x).

B) Если F(x) — первообразная для f(x), а G(x) — первообразная для g(x), то F(x) + G(x) — первообразная для f(x) + g(x).

C) Если F(x) — первообразная для f(x), и k, b — постоянные, причём k ≠ 0, то F(kx + b) — первообразная для f(kx + bx).

2. В чем состоит физический смысл первообразной?

Домашнее задание:

1. Законспектировать основные теоретические сведения.
2. Ответить на вопросы для закрепления
3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463

§58 с. 304-308, №992 (3,4)

Выполненную работу необходимо сфотографировать и отправить на почтовый ящик pushistaV@yandex.ru, Бережная Валерия Александровна (VK)

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСЫВАЕМ РАБОТУ НА ПОЛЯХ + в сообщении указываем дату/группу/ФИО

ДОПОЛНИТЕЛЬНО!

Разбор типовых заданий

1. Докажите, что функция F является первообразной для функции f(x) на промежутке (–∞;+∞), если: $F(x) = x^3 – 4$, $f(x)= 3x^2$.

Основные теоретические сведения

Определение первообразной.

Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка F '(x) = f(x).

Чтобы доказать, что функция F(x) является первообразной для функции f(x), нужно доказать равенство F '(x) = f(x), где штрих означает производную.

F(x) содержит степенную функцию.

Правило нахождения производной степенной функции в общем виде:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Правила нахождения производных функций.

1. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

2. Производная произведения двух функций равна:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u.$$

3. Производная частного двух функций $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x)\neq 0$, равна:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

4. Производная сложной функции

$$(f(g(x)))' = f_g'(g) \cdot g_x'(x)$$

5. Производная константы равна нулю.

Таким образом,

$F'(x) = (x^3 - 4)' = (x^3)' - 4' = 3x^2 - 0 = 3x^2 = f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$,

(Вывод) Что и требовалось доказать.

2. Для функции f(x) найдите:
а) множество всех первообразных;
б) первообразную, график которой проходит через точку $(x_0;y_0)$

Основные теоретические сведения

А) Таблица первообразных функций.

f(x)	F(x)
0	$C\ (const)$
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^n\ (n \neq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{sin^2 x}$	$-ctg\ x$
$\frac{1}{cos^2 x}$	$tg\ x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

К каждому выражению в правой части таблицы необходимо прибавить константу

Правила нахождения первообразных функций.

1. Первообразная функция суммы (разности) равна сумме (разности) первообразных функций.
$$F(x + y) = F(x) + F(y),$$
$$F(x - y) = F(x) - F(y).$$
2. Коэффициент можно выносить за функцию. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $k\,F(x)$– первообразная для функции $k\,f(x)$.
3. Если $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$, что первообразная для функции $y = f(kx + m)$ служит функция $y = {}^1/_k\, F(kx + m)$.

Пример 1.

Найти первообразную для функции $y = 3x^2 + 4x + 5$.

Решение:

Первообразной для x^2 служит $\frac{x^3}{3}$. Первообразной для x служит $\frac{x^2}{2}$.

Первообразной для 1 служит x.

Первообразная суммы равна сумме первообразных, тогда надо найти первообразную для каждой из представленных функций.

$f(x) = 3x^2$, $F(x) = x^3$.

$f(x) = 4x$, $F(x) = 2x$.

$f(x) = 5$, $F(x) = 5x$.

Тогда первообразная исходной функции примет вид:

$y = x^3 + 2x^2 + 5x$.

Множество всех первообразных к исходной функции примет вид

$y = x^3 + 2x^2 + 5x + C$.

Пример 2.

Найти первообразную для функции $y = \cos(7x)$.

Решение:

Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$. Тогда первообразная для функции $\cos(7x)$ будет функция

$$y = \frac{1}{7}\sin(7x) = \frac{\sin(7x)}{7}$$

Множество всех первообразных к исходной функции примет вид

$$y = \frac{1}{7}\sin(7x) = \frac{\sin(7x)}{7} + C$$

Б) Найдя множество всех первообразных функции уточним первообразную, график которой проходит через точку $(x_0;y_0)$

Алгоритм:

1. Зададим функцию в привычных обозначениях: $y = F(x) + C$

2. Подставим координаты точки $(x_0;y_0)$ в выражение:

$$y_0 = F(x_0) + C$$

3. Решим уравнение относительно неизвестной C.

Пример 3.

Для функции $f(x) = x^2$ найти первообразную, график которой проходит через точку $(–3; 10)$.

Решение:

Найдем все первообразные функции f(x) :

Найдем число C, такое, чтобы график функции $f(x) = x^2$ проходил через точку $(–3; 10)$. Подставим $x = –3$, $y = 10$, получим:

$10 = (-3)^3/3 + C$

$C=19$

Следовательно, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 19$

Ответ: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 19$

3. Вычислите неопределенный интеграл.

Основные теоретические сведения

Метод вычисления неопределенного интеграла при помощи таблицы первообразных элементарных функций.

Конечная цель вычисления неопределенных интегралов – путем преобразований, привести заданный интеграл к выражению, содержащему простейшие или табличные интегралы.

Правила интегрирования

1. Правило интегрирования суммы (разности)

$$\int (u \pm v \pm w)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \pm \int w\,dx$$

Здесь и далее u, v, w – функции от переменной x.

2. Вынесение постоянной за знак интеграла

Пусть c – постоянная, не зависящая от x. Тогда ее можно вынести за знак интеграла:

$$\int cu\,dx = c\int u\,dx$$

Таблица основных неопределенных интегралов.

Эта таблица является основой, используемой для нахождения более сложных интегралов.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1;$$

$$\int dx = x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

Пример 4. Вычислить интеграл:

$$\int 3x^6 dx$$

Решение

Вынося постоянный множитель 3 за знак интеграла, применяем правило интегрирования показательной функции и по таблице интегралов находим:

$$\int 3x^6 dx = 3\int x^6 dx = 3\cdot\frac{x^7}{7} + C$$

Ответ: $\int 3x^6dx = 3 \cdot \frac{x^7}{7} + C$

Пример 5. Вычислить интеграл:

$$\int (x^3 + 2x^2 + 5x)dx$$

Решение

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\int (x^3 + 2x^2 + 5x)dx = \int (x^3)dx + \int (2x^2)dx + \int (5x)dx$$

$$\int (x^3)dx + \int (2x^2)dx + \int (5x)dx = \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{3x^4 + 8x^3 + 30x^2}{12} + C$$

Ответ: $\int (x^3 + 2x^2 + 5x)dx = \frac{3x^4 + 8x^3 + 30x^2}{12} + C$

Пример 6. Вычислить интеграл:

$$\int (x^4 - x^2 + 4)dx$$

Решение

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\int (x^4 - x^2 + 4)dx = \int (x^4)dx - \int (x^2)dx + \int (4)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 4x + C$$

Ответ: $\int (x^4 - x^2 + 4)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 4x + C$

Пример 7. Вычислить интеграл от дроби:

$$\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})dx$$

Решение

Интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})dx = \int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{x^3}dx$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})dx = \ln x - \frac{1}{2x^2} + C$$

Ответ: $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})dx = \ln x - \frac{1}{2x^2} + C$

Пример 8. Вычислить интеграл:

$$\int (\cos x + 5\sin x)dx$$

Решение

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\int (\cos x + 5\sin x)dx = \int \cos x dx + \int 5\sin x dx$$

Далее найдём каждый интеграл суммы:

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int 5\sin x dx = -5\cos x + C$$

$$\int (\cos x + 5\sin x)dx = \sin x - 5\cos x + C$$

Ответ: $\int (\cos x + 5\sin x)dx = \sin x - 5\cos x + C$