Inizio con alcune considerazioni generali che mi serviranno.
Il numero totale di zolle da piastrellare è: $N^2 - N = N(N-1)$.
Il numero totale di pietroni rettangolari quindi è: $N(N-1)/2$.

Elenco ora alcuni vincoli su come posizionare le zolle libere:
- considero per ora le celle delle usuali scacchiere ordinarie
- in tali scacchiere si alternano celle nere e celle bianche
- ogni pietrone "copre", quindi, una cella nera e una bianca
- le zolle libere devono essere per metà nere e metà bianche
  (in quelle di lato dispari, un colore eccede di una unità)
- lo stesso colorando le righe o le colonne in modo alterno.

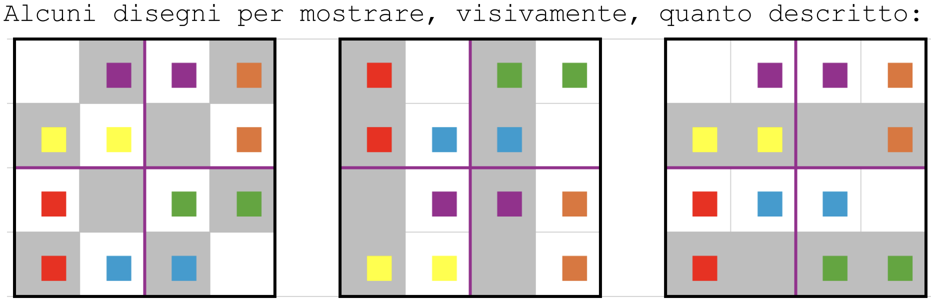
Da quanto detto si deduce come si collocano le zolle libere:
- in ciò che segue compongo le scacchiere con quadrati 2x2
  (con lati dispari restano fuori l'ultima riga e colonna)

- considerando una scacchiera quadrata di lato pari si ha:
-- le zolle libere sono in pari misura ai vertici dei 2x2
-- stesso discorso per le rettangolari con i due lati pari

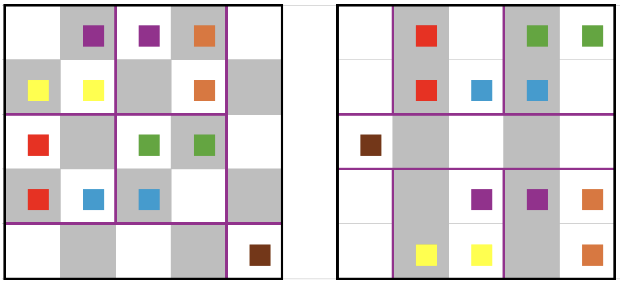
- con scacchiere quadrate con lati dispari, invece, si ha:
-- per le prime N-1 righe e colonne, come quelle quadrate
-- più una al vertice dove si uniscono ultima riga/colonna
   (o su di un lato dividendo, così, in due la scacchiera)

- infine, nelle rettangolari con un lato pari e uno dispari
   (essendo composte di quadratini 2x2 in numero dispari):
-- le zolle libere non sono in pari misura ai loro vertici
-- due vertici opposti nelle 2x2 hanno una libera in meno
    (intendo: …contando quante si trovano in ogni vertice).

Alcuni disegni per mostrare, visivamente, quanto descritto:



La seconda e la terza scacchiera sono ottenute dalla prima:
- la seconda scambiano prima/seconda riga con terza/quarta
- terza scambiando solo la terza riga con la seconda riga.
Per simmetria le altre scacchiere si hanno ruotando queste.
Ruotandole di 90° e 180° si hanno tutte quelle costruibili.
Tutte si possono dividere a metà in orizzontale o verticale.
Infine, i modi per ottenerne una 5x5, dalla prima e seconda:



Mostro algebricamente la condizione **necessaria** di cui sopra (così è più chiaro che il lato deve essere ≡ 0 o ≡ 1 mod4):
- assegno ad ogni cella, il valore della sua riga e colonna (ad esempio, le quattro celle per N=2: 1|1 1|2 e 2|1 2|2)
- la somma dei valori di tutte le celle è: $N^2(N+1) \equiv 0 \bmod 2$
- quelli delle zolle libere vale, comunque: $N(N+1) \equiv 0 \bmod 2$ (perché devono essercene una per ogni riga e ogni colonna)
- la differenza delle due somme precedenti è un numero pari (che è anche la somma dei valori nelle celle dei pietroni)
- la somma dei valori delle due celle dei pietroni è dispari (una delle due celle ha somma pari l'altra somma dispari)
- ad esempio, se un pietrone è in 1|1 1|2 ho: 1+1 + 1+2 = 5
- il numero totale di tutti pietroni deve quindi essere pari (altrimenti si avrebbe somma: dispari * dispari = dispari)
- il numero totale di tutti pietroni è: $(N^2-N)/2 = N(N-1)/2$
- soltanto se N ≡ 0 o ≡ 1 mod4 il numero $N(N - 1)/2$ è pari.

Detta in altro modo:
- abbiamo una scacchiera di lato N×N con in totale N^2 celle
- ogni cella è identificata dalla coppia di coordinate (r,c) (con "r" e "c" che identificano numero di riga e colonna)
- ogni cella (r,c) è **pari** o **dispari** in base alla somma $S=r+c$
- le celle sono distribuite uniformemente: metà **pari**/**dispari** (se N è dispari si ha, alla fine, una ulteriore cella pari)
- numerate dall'alto in basso e destra sinistra si alternano (nella scacchiera, le bianche sono **pari** e le nere **dispari**)
- ogni pietrone copre comunque una cella **pari** e una **dispari** (la somma delle coordinate dei pietroni è sempre **dispari**)
- la somma delle coordinate delle celle nella scacchiera è:

$$\mathbf{S_{totale}} = \sum_{r=1\div N}*\sum_{c=1\div N}(r+c) = N^2(N+1) \equiv 0 \bmod 2$$

- la somma è ≡ 0 mod2 perché il fattore N(N+1) e sempre pari
- ogni zolla libera occupa una cella; ce ne sono in tutto N (una per ognuna delle N righe e per ognuna delle N colonne)
- la somma totale, delle coordinate, delle zolle libere vale:

$$\mathbf{S_{zolle}} = \sum_{i=1\div N}(r_i+c_i) = N(N+1) \equiv 0 \bmod 2$$

- le celle rimanenti, per i pietroni, hanno somma coordinate:

$$\mathbf{S_{pietroni}} = \mathbf{S_{totale}} - \mathbf{S_{zolle}} = N^2(N+1) - N(N+1) = N(N-1)(N+1)$$

(**la somma delle coordinate delle celle dei pietroni è pari**)
- ogni pietrone copre due celle con una somma totale dispari (in quanto $S=r+c$, di una cella, è uguale a: S+1 dell'altra)
- da ciò so che il numero totale di pietroni deve essere **pari** (avendo, ogni pietrone, somma coordinate sue celle dispari)
- il numero totale di tutti i pietroni, come già detto, vale:

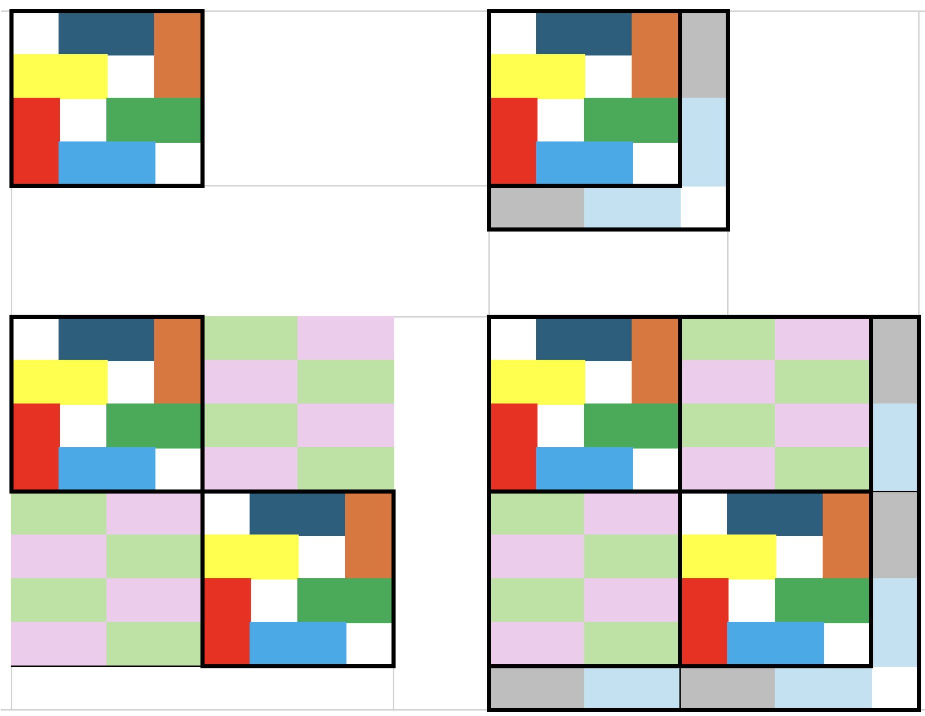
$$(N^2 - N)/2 = N(N - 1)/2$$

- perché la disposizione sia valida il valore deve essere **pari**
- il che si ha solo se: $N(N - 1)/2 \equiv 0 \bmod 4$ cioè N≡0 o 1 mod4:

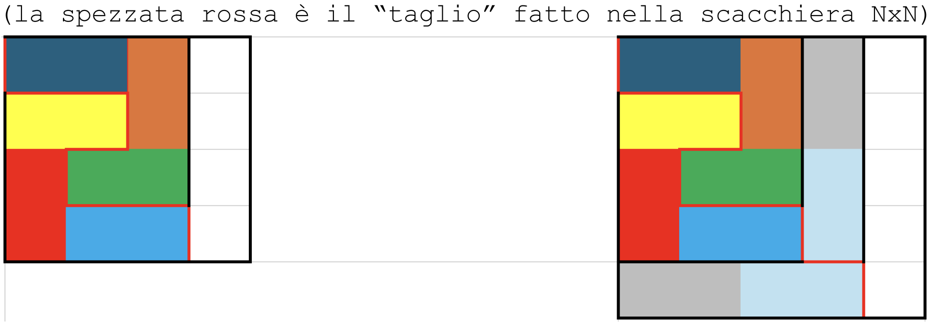
-- $N \equiv 0 \bmod 4 \Rightarrow N(N - 1)/2$ è divisibile per 4
-- $N \equiv 1 \bmod 4 \Rightarrow (N - 1)$ è divisibile per 4
-- $N \equiv 2 \bmod 4 \Rightarrow N(N - 1) \equiv 2 \bmod 4$
-- $N \equiv 3 \bmod 4 \Rightarrow N(N - 1) \equiv 6 \equiv 2 \bmod 4$.

Mostro come ottenere le disposizioni possibili dei pietroni.
- “ritagliando” la scacchiera si può ottenerne una: $N\cdot(N-1)$
  (si può in quanto c‘è una zolla libera per riga e colonna)
- il “ritaglio” divide la scacchiera in due “pezzi” separati
- i due “pezzi”, riuniti, incastrandoli, formano la: $N\cdot(N-1)$
- la suddivisione è tale da poter eliminare le zolle libere
- la cosa è possibile in quanto sono una per riga e colonna
- i due “pezzi” contengono quindi lo stesso numero di celle
  (ciò è sempre dovuto alla zolla libera per riga e colonna)
- siccome i pietroni hanno due zolle non sempre è possibile
- perché si possa, i “pezzi” devono avere numero celle pari
- ciò, infine, è fattibile se il lato “l” mod4 è $\equiv 0$ o $\equiv 1$.

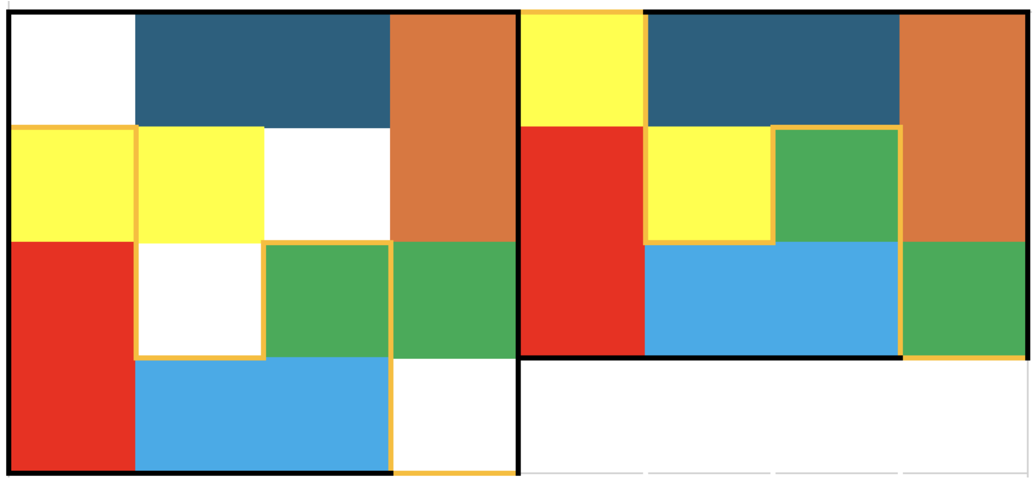
La condizione **necessaria** è quindi: $l\equiv0 \bmod 4$ oppure $l\equiv1 \bmod 4$
(il lato deve essere multiplo di 4 oppure multiplo di 4+1).
Mostro, ora, come si possono piastrellare alcune scacchiere
(lo faccio per evidenziare che la condizione è **sufficiente**):



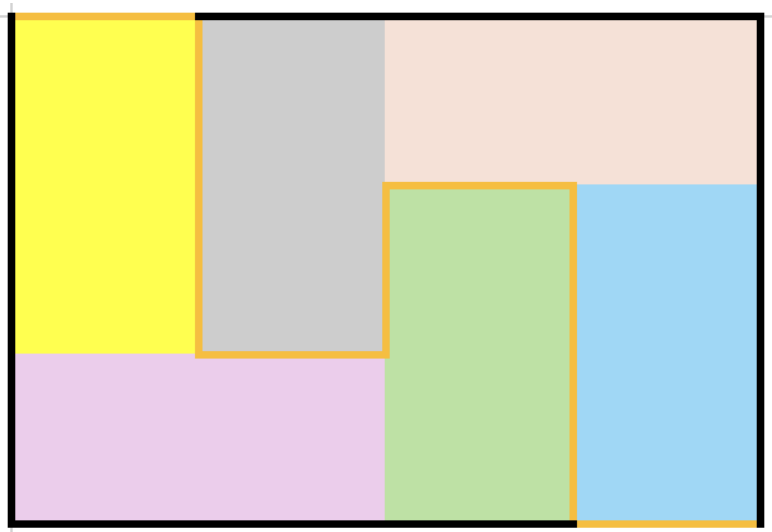
Dal disegno si può intuire come piastrellare altre scacchiere.
Qui mostro come si ottiene la scacchiera rettangolare: $N(N-1)$
(la spezzata rossa è il “taglio” fatto nella scacchiera NxN):



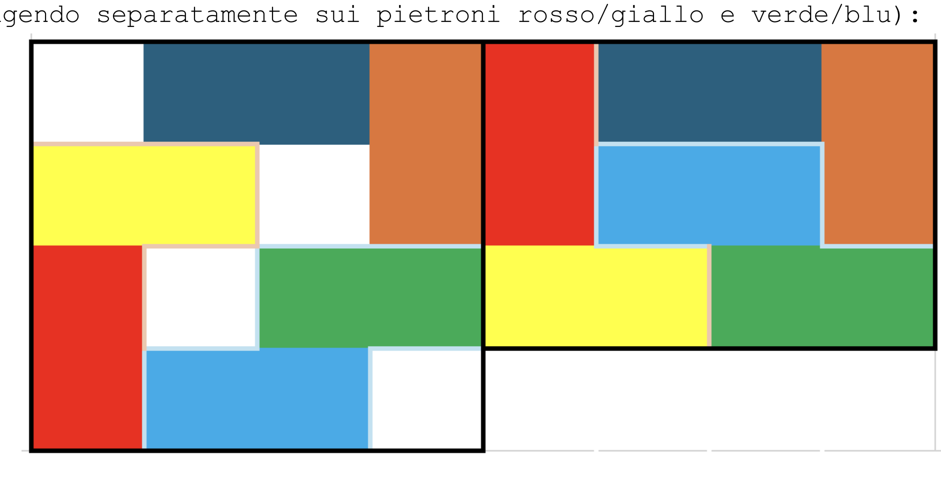
Mi sono accorto, analizzando la scacchiera 4x3, di un problema.
Si ha se i due "pezzi" li ottengo riducendo la 4x4 di una riga
(due dei pietroni vengono "tagliati" e divisi sui due "pezzi"):



La condizione che ho esposto prima non è, quindi, **necessaria**.
Lo sarebbe se si impone che il "taglio" non divida i pietroni
(… e risulta utile per ottenere la piastrellatura richiesta).
Analizzando il "taglio", avrei potuto variare così i colori:



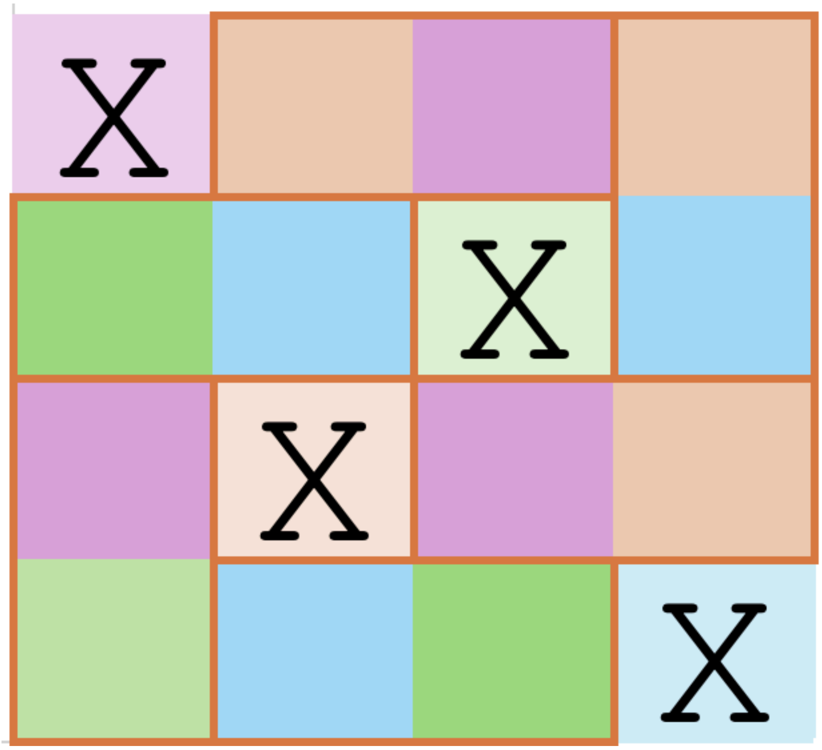
Oppure capovolgere orizzontalmente il "pezzo" inferiore, così
(agendo separatamente sui pietroni rosso/giallo e verde/blu):



Devo esserci “qualcosa” nel “taglio” che la renda **necessaria.**

Ripropongo un modo per mostrare che la condizione è **necessaria**
(intendo la condizione sul modulo 4 della lunghezza del lato).
Ogni cella della scacchiera ha quattro parità di riga/colonna:
- riga dispari / colonna dispari
- riga pari / colonna dispari
- riga dispari / colonna pari
- riga pari / colonna pari.

Evidenzio questi quattro tipi di celle con altrettanti colori:

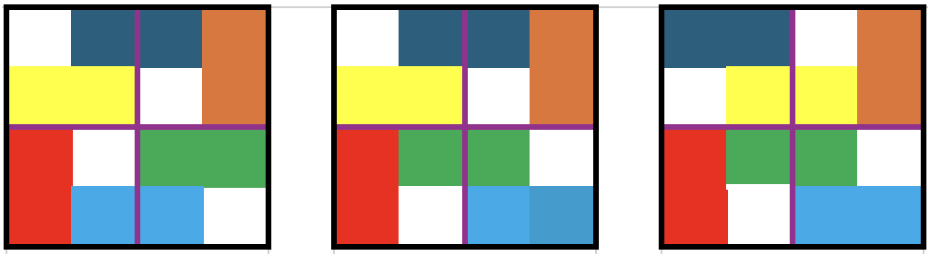


Le zolle libere, quelle con la "O", si alternano con i colori.
Se il lato è ≡ 0 mod4, i colori sono presenti in egual numero
(intendo che le zolle libere li occupando nello stesso numero).
Se il lato non è ≡2 mod4, sorge un problema in piastrellatura:
- una piastrella dovrebbe coprire due celle in modo diagonale:
-- una su riga/colonna pari l'altra riga/colonna dispari, o …
-- riga pari / colonna dispari e riga dispari / colonna pari.

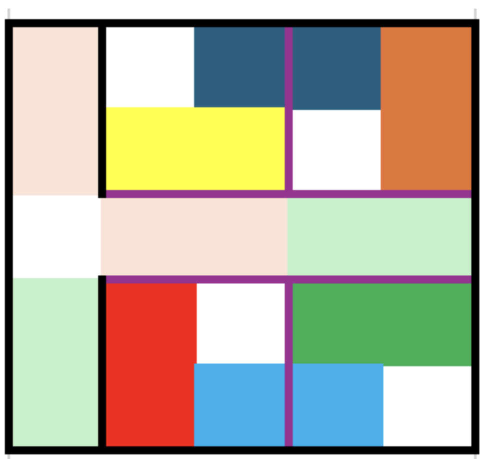
Tale piastrella non è prevista, quindi resta solo lato ≡0 mod4
(e lato ≡1 mod4 integrando come detto quella di lato ≡0 mod4).
Tutto ciò impone un vincolo alla scacchiera "compressa" N(N-1).
Per tutto quanto detto sinora la sua area deve essere ≡0 mod4.
I suoi due lati hanno comunque diversa parità: pari e dispari.
Quello pari, quindi, deve essere ≡0 mod4 per dare area ≡0 mod4.
Questo si ha solo con lato della quadrata è ≡0 mod4 o ≡1 mod4.

Si può mostrare che la condizione è **necessaria** in altro modo:
- qui si usa una proprietà del "taglio" sulle le zolle libere
- tale tipo di "taglio", divide in parti uguali la scacchiera
- ciò si ha perché le zolle libere sono: una per riga/colonna
- per piastrellare le due parti, esse devono avere celle pari
  (in quanto i pietroni occupano due celle di una delle parti)
- quindi, nel rettangolo Nx(N-1) il numero di celle è ≡0 mod4
- da ciò come già detto si ha che N deve essere ≡0 o ≡1 mod4.

Al netto si simmetrie, le piastrellature per una scacchiera 4x4:



Le zolle libere sono situate ai vertici delle scacchierine 4x4.
Si distinguono per il numero di zolle libere sui lati: 2 3 e 4.
Da queste le tre scacchiere 5x5 con zolla libere su un vertice.
Le altre tre scacchiere 5x5 hanno la zolla libera a centro lato:



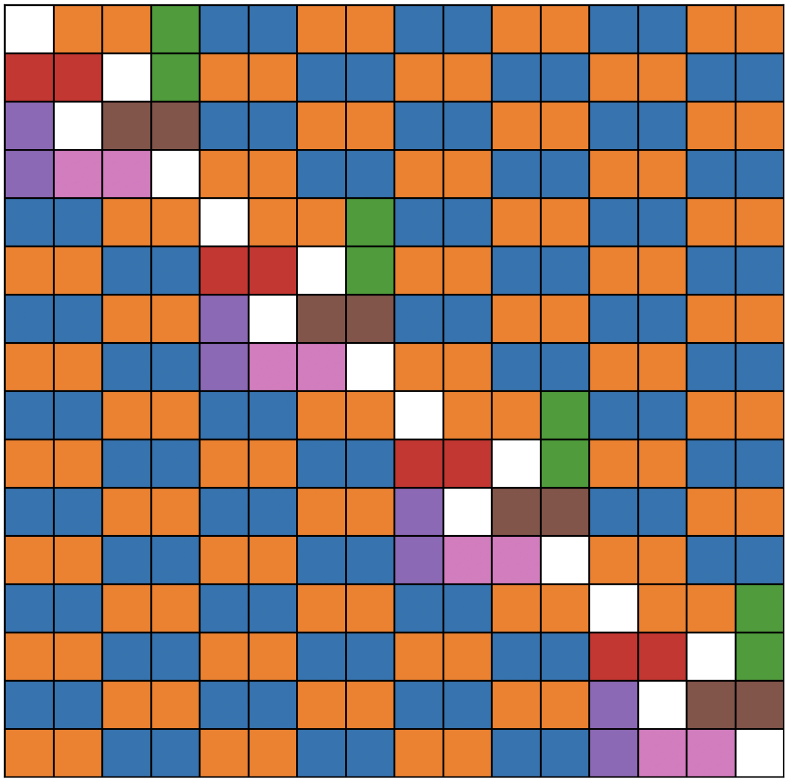
Si ottengono “tagliando” orizzontalmente in due parti le 4x4.

Un programma Python3 che disegna scacchiere 4x4 5x5 8x8 9x9 16x16 17x17:

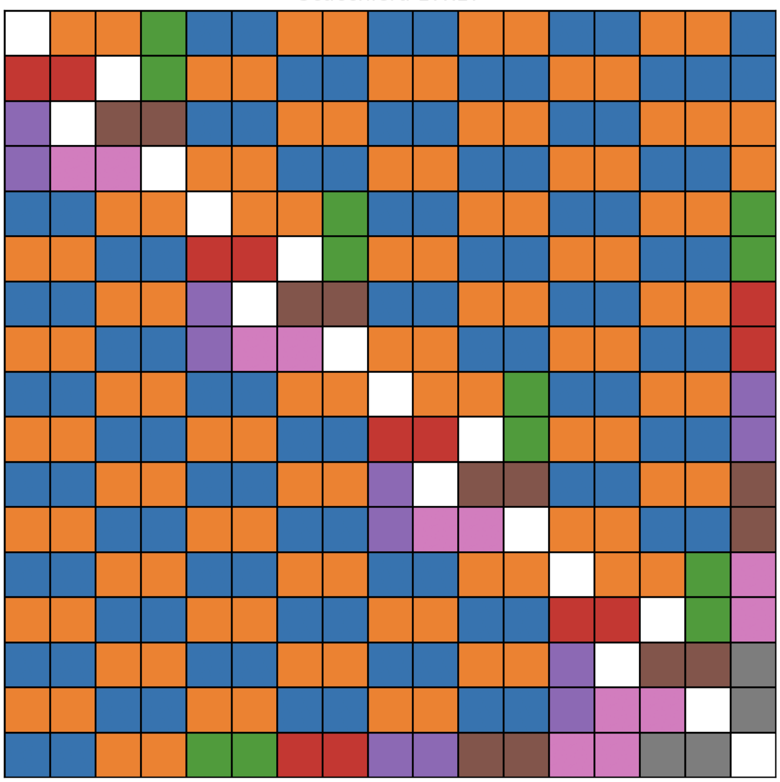
https://drive.google.com/file/d/1Zh58WGaN5v3Xm5Jzy6g3HNtfcjIXIEQu/view?usp=sharing

Mostro, a titolo di esempio, due tra le diverse scacchiere che disegna:

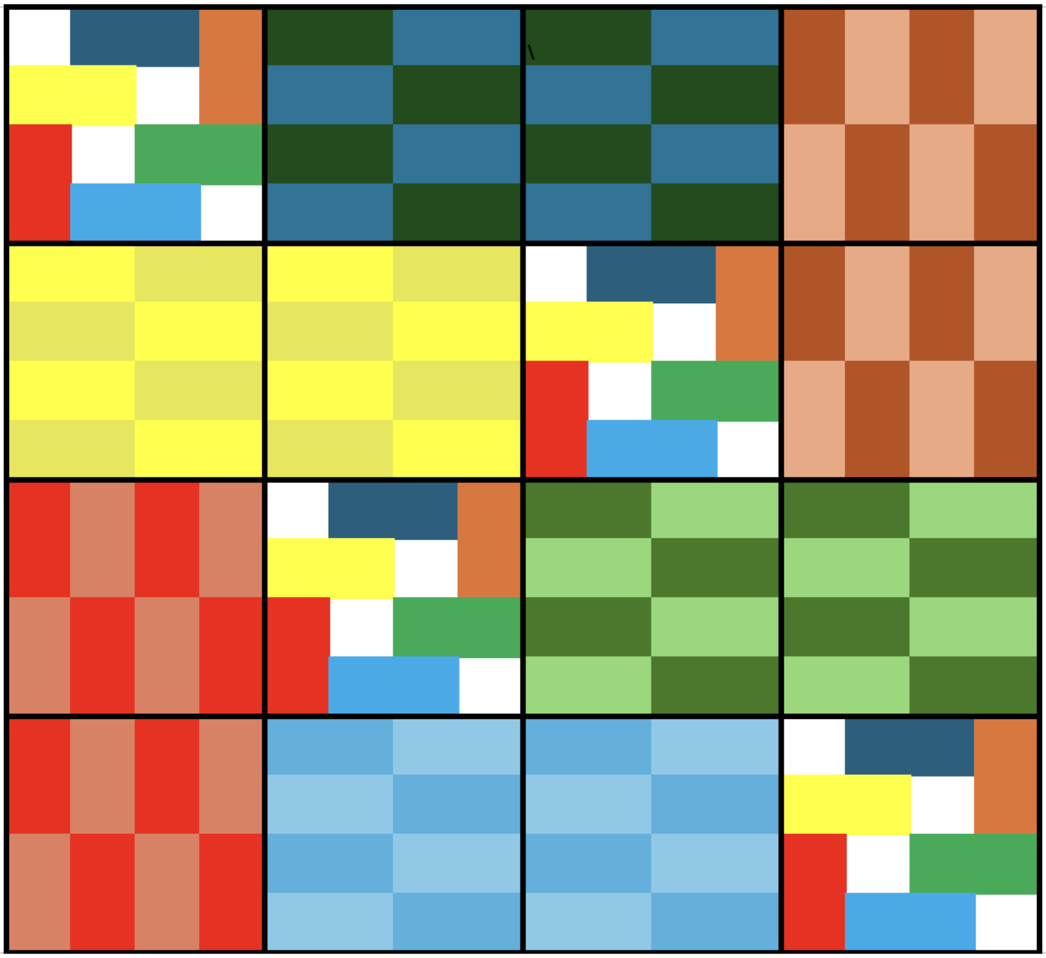
Scacchiera 16x16



Scacchiera 17x17



Mostro una interessante piastrellatura, se i lati hanno 16 celle.
La ottengo utilizzando le zolle libere di una piastrellatura 4x4.
Le celle della 4x4 si trasformano in un quadrato 4x4 nella 16x16.
Si sostituiscono poi le zolle libere della 4x4 con la stessa 4x4.
Forse, con un disegno, riesco a spiegare meglio con intendo dire:



Analogamente si può disegnare una 64x64 dalla 16x16, …e così via
(mi sembra “quasi” un frattale “al contrario”, con seme la 4x4).
Sulla scacchiera, man mano, in ogni cella se ne mettono quattro.
Così, da una scacchiera 4x4, si ottiene la 16x16 poi la 64x64, …
(proseguendo all’infinito, riducendo la dimensione delle celle).
Si osservi partendo dalla 4x4, cosa è presente nella successiva.
Dove c’era in essa una zolla libera, ora c’è tutta la scacchiera
(questa disposizione di pietroni si ripete quindi all’infinito).