Aufgabenblatt exponentielles Wachstum

Nach wie viel Generationen sind die Nachkommen eines Mauspaares bei unbeschränktem Nahrungsangebot so schwer wie die ganze Menschheit?

Mögliche Annahmen:

- ***Annahme 1***: *Ein Mäusepaar habe immer nur einen Wurf und sterbe danach. Die Wurfgrösse betrage 8 Nachkommen, also 4 Mäusepaar (Mäuse haben durchschnittlich 6 - 8 Jungen pro Wurf)*
- ***Annahme 2***: *Jedes Mäusepaar sei unsterblich und produziere fortwährend weiter Nachkommen. die Wurfgrösse sei ebenfalls 8 Nachkommen (4 Paare).*
- ***Annahme 3***: *Jedes Mäusepaar lebe nur 2 Jahre, bei durchschnittlich 5 Würfen pro Jahr sind insgesamt 10 Würfe pro Paar.*
- *Masse aller Mäuse zusammen: Bei einer vermuteten Gesamtzahl an Mäusen weltweit von 10 x 10^9 Mäusen und einem Durchschnittsgewicht der Mäuse von 25 g ist das weltweite Gesamtgewicht 250 x 10^6 kg*
- *Masse aller Menschen zusammen (2022): Bei 7.9 x 10^9 Menschen und einem Durchschnittsgewicht von 62 kg ergibt dies 487.8 x 10^9 kg*

Antwort bei Annahme 1:

Ohne mathematisches Rüstzeug: *Zuerst bestimmt man die Anzahl nötiger Mäusepaare (Gewicht der Menschheit / Gewicht eines Mauspaares = 487.8 x 10^9 kg / 0.05 kg ≈ 10^{13} Mäusepaare). Jetzt schätzt man ab, welche Hochzahl von "4" ungefähr 10^{13} ergibt: Erste Schätzung: 21 Generationen.*
Mit mathematischem Rüstzeug: *Die Anzahl der Paare folgen den Gesetzen einer geometrischen Folge: $M = q^n$, da $M = G / m$ (q = Anzahl Paare pro Wurf; n = Anzahl Generationen; G = Gewicht der Menschheit, m = Masse eines Mäusepaares (50 g; M = Anzahl Paare nach n Generationen) ist der Wert für die Anzahl Generationen mit der folgenden Formel einfach zu bestimmen:*
$n = \log (G/m)/ \log q = \log (487.8 * 10^9)/ \log (4) = 21.6$ Generationen

Antwort bei Annahme 2:

Ohne mathematisches Rüstzeug: *Es stellt sich die Frage, ob die vorangegangenen Generationen bei einem Vermehrungsfaktor von z.b. 5 überhaupt grossen Einfluss haben können auf das Ergebnis. Eine einfach Überlegung zeigt, dass dies nicht der Fall ist: Nach 5 Generationen gäbe es ohne Summenbildung 625 Mäusepaare. Wenn die vorangegangen Generationen weiterleben würden, kämen 156 Paare dazu. Der Anteil wäre also nur etwa mehr als ein Viertel der Anzahl Mäusepaare der letzten Generation. Zählt man also die vorangegangenen Generationen zu den neuen Nachkommen dazu (625 + 156) so erhöht sich zwar die Anzahl Mauspaare um ein viertel, aber eben nicht um mehr. Der Einfluss der wachsenden Folgegeneration ist also ungleich grösser als die Summe der Tiere der vorangegangenen Generationen. Das Gewicht der Menschheit wird also nur unwesentlich schneller erreicht.*
Mit mathematischem Rüstzeug: *Wenn alle Generationen erhalten bleiben, müssen die Mäusepaare jeder Generation zusammengezählt werden. Die Summenformel für geometrische Folgen lautet:*
*$s_n = a_0 * (q^{n+1}-1)/(q-1)$; s_n = Summe aller Werte bei n Generationen (bei uns 9.75 * 10^{12} Mäusepaare); a_0 = Anfangswert (1 Mäusepaar) q = Vermehrungsfaktor (bei uns 4): In*

unserer Rechnung ist der Wert n gesucht. Die Formel muss also nach n aufgelöst werden. Da bei uns $a_0 = 1$ fällt dieser Wert weg. die Umrechnung ergibt:
$n = (\lg (s_n * (q-1) +1)/(\lg (q)) -1$: für unser Beispiel gibt dies 18.44 Generationen, die im Gegensatz zu 18.58 Generationen bei Verlust der Elterngeneration

Antwort bei Annahme 3:
Bei dieser Annahme muss die Elterngeneration zu der nachfolgenden Generation dazu gezählt werden: Bei 4 Nachkommenspaaren pro Elternpaar erhöht sich der Vermehrungsfaktor um 1, in unserem Beispiel also von 4 auf 5.
Die vereinfachte Bestimmung ohne Summenbildung ergibt dann 18.6 Generationen, mit Summenbildung 18 Generationen.

Falls die Elterngeneration nach z.B. 10 Würfen stirbt, verschiebt sich die Rechnung noch einmal ein wenig. Die Menge der Nachkommen nach n Generationen berechnet sich neu:

$M = q^n - q^{(n-m)}$ (M = Anzahl Nachkommen in der Generation n; m = Anzahl Generationen, in denen ein Elternpaar lebt und Nachkommen zeugen kann).
Die Anzahl dafür nötiger Nachkommenspaare kann leider nicht explizit errechnet werden. Die Aufgabe muss numerisch gelöst werden und führt dann zu Anzahl Generationen, die nötig sind, bis die vorgegebene Anzahl an Mäusepaaren erreicht ist.