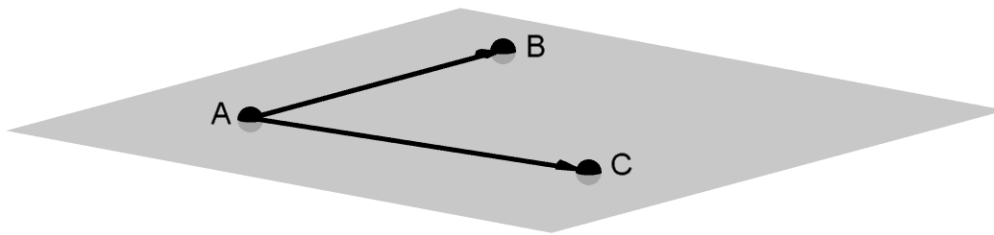


Plano que pasa por tres puntos, A, B y C, no alineados



Observa que $\pi(A; \vec{AB}, \vec{AC})$

Actividades

contiene al triángulo: $A(-1, 0, 3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(3, 2, -3)$

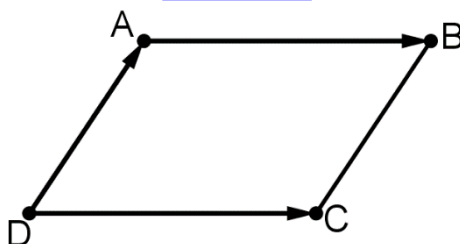
Contiene al triángulo de vértices $A(1, 4, 2)$, $B(3, 1, -1)$ y $C(-2, 3, 5)$ Sol: $12x - 3y + 11z - 22 = 0$

contiene a los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 3, 1)$ y $C(2, 1, 2)$. Sol: $-x + y + 5z - 9 = 0$

Halla la ecuación del plano que contiene al triángulo: $A(-1, 0, 3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(3, 2, -3)$.

2016-5 Considera un paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo $A(1, 0, -1)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(-7, 1, 5)$. Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

Resolución



Plano que contiene al paralelogramo: $\pi(A; \vec{DC}, \vec{DA})$

Un vector normal de π es $n_\pi = \vec{DC} \times \vec{DA} = (-10, 28, -18) \times (5, -14, 9)$

Luego $\pi : 5(x-1) - 14(y-0) + 9(z+1) = 0 \Rightarrow \pi : 5x - 14y + 9z + 4 = 0$

2014-11 Sean $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ los vértices de un triángulo.

Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

2013-9 Del paralelogramo ABCD se conocen los vértices $A(-1, 0, 3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(3, 2, -3)$.

Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

2013-12 Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 3, 1)$, $C(2, 1, 2)$ y $D(1, 0, 4)$.

Halla la ecuación del plano que contiene a A, B y C.

2012-1 El punto $M(1, -1, 0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2, 1, -1)$ y $B(0, -2, 3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.

Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

2012-9 Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(0, 1, -2)$

Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

2008-5 Los puntos $A(-2, 3, 1)$, $B(2, -1, 3)$ y $C(0, 1, -2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD. Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

2008-12 Considera los puntos $B(-1, 1, 2)$, $C(2, 2, 1)$ y $D(3, 1, 0)$.

Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B, C y D.

2005-4 Se sabe que los puntos $A(m, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(7, 2, 1)$ están en un mismo plano.

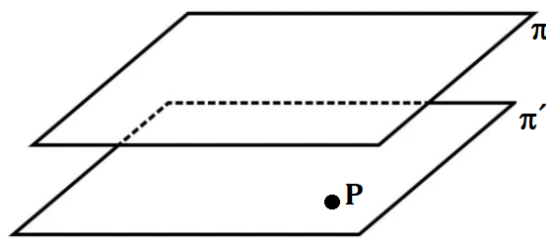
(a) Halla m y calcula la ecuación de dicho plano.

(b) ¿Están los puntos B, C y D alineados?

2004-11 Sean los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(0, 5, 3)$ y $D(-1, 4, 3)$.

Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.

Plano π' que pasa por un punto P y es paralelo a otro plano π



Tomamos un vector normal de π , \vec{n}_π . Observa que $\pi'(P; \vec{n}_\pi)$

Actividades

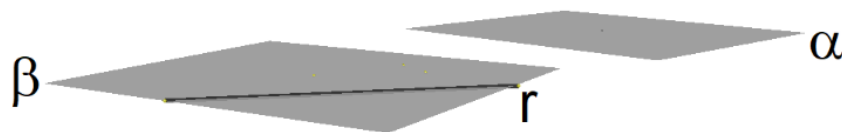
2002-4 Sea π el plano de ecuación $3x - y + 2z - 4 = 0$

Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto $P(1, -2, 2)$.

Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 3, -5)$ y es paralelo al plano $x + y - 4z = 1$

Sol.: $x + y - 4z - 25 = 0$

Plano α que contiene a una recta r y es paralelo a otro plano β



El plano β tiene como vectores directores $\vec{u} = \vec{d}_r$ y $\vec{v} = \vec{d}_r \times \vec{n}_\beta$. Además, el plano β pasa por cualquier punto A de r. De esta forma, $\beta(A; \vec{u}, \vec{v})$

Actividades

Halla un plano paralelo a $\pi: 2x + y - z + 2 = 0$ que contenga a la recta

$$\frac{x - 5}{-2} = y = \frac{z - 6}{-3}$$

2014-6 Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$, y la recta r de ecuación $\frac{x - 5}{-2} = y = \frac{z - 6}{-3}$

Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r.

2009-8 Considera el plano π de ecuación $3x - 2y - 2z = 7$ y la recta r definida por $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$

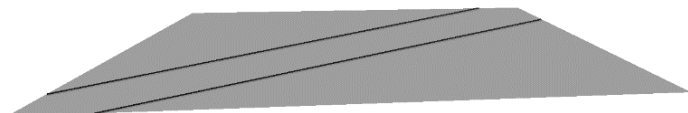
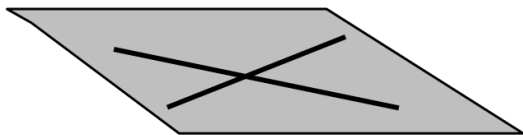
. Determina la ecuación del plano paralelo a π que contiene a r

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

2004-9 Considera el plano $\pi : 2x + y - z + 7 = 0$ y la recta

¿Hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta r? En caso afirmativo determina sus ecuaciones.

Plano π que contiene a dos rectas distintas coplanarias r y s



- Si r y s son secantes tomamos como punto de paso de π cualquier punto P de r ó de s y como vectores directores el de r y el de s, \vec{d}_r y \vec{d}_s . De esta forma, $\pi(P; \vec{d}_r, \vec{d}_s)$

- Si r y s son paralelas hallamos un punto A de r y otro B de s. Tomamos como punto de paso de π A ó B y como vectores directores el de r y s, $\vec{d}_r = \vec{d}_s$ y el vector \vec{AB} . De esta forma, $\pi(P; \vec{d}_r, \vec{AB})$

Actividades

Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - \alpha z = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{\beta} = z$, se pide :

Sol.: $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -2$

a) Calcula α y β para que sean ortogonales y coplanarias.

b) Para $\alpha = 1/2$ y $\beta = -2$, halla la ecuación del plano que contiene a r y a s. Sol.: $2x + y - 2z - 1 = 0$

Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r: $(1, -1, 5) + k(1, 1, -3)$ y s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{6}$

Sol.: $-x + 4y + z = 0$

Sean r y s las rectas dadas por: $r \equiv \begin{cases} 2x - y = m \\ z + 2y = 3 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de m para que ambas rectas se corten. **Sol:** m=1

b) Para m = 1, calcula la ecuación del plano que contiene a r y s. **Sol:** 10x+7y+6z-23=0

Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

2012-8 Sean r y s las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$

(a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.

(b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

2010-1 Considera las rectas r y s de ecuaciones $x - 1 = y = 1 - z$ y $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(a) Determina su punto de corte.

(b) Determina la ecuación del plano que contiene a r y s.

2009-1 Considera el punto P(1, 0, 0), la recta r definida por $x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}$

y la recta s definida por $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0)$

Halla la ecuación del plano β que contiene a r y s

2007-5 Sea r la recta definida por $\frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5}$ y s la recta definida por $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$

(a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

(b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

2005-10 Se sabe que las rectas $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = b + t \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 6x + 2z = 2 \end{cases}$ están contenidas en un mismo plano.

(a) Calcula b.

(b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

2016-4 Considera las rectas "r" y "s" dadas por: $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$

2016-4 Considera las rectas "r" y "s" dadas por:

Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

Resolución

$$\vec{d}_r = (2, -1, 0); A(1, 1, 1) \in r$$

$$\vec{d}_s = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, -1, 0); \text{ Para } y=0, x=-1, z=-1. \Rightarrow B(-1, 0, -1) \in s.$$

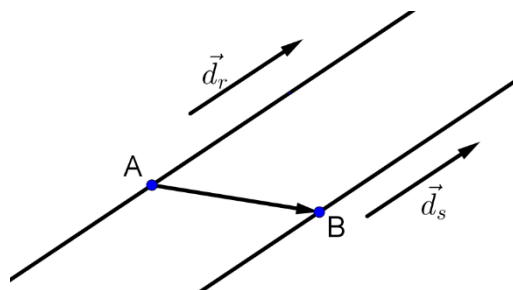
Como $\vec{d}_r = \vec{d}_s$ y $A \notin s$ (no cumple sus ecuaciones) $\Rightarrow r \neq s \Rightarrow r \parallel s$.

Por tanto, r y s están en el mismo plano (son coplanarias)

Plano que las contiene: $\pi(A; \vec{d}_r, AB); AB = (-2, -1, -2)$

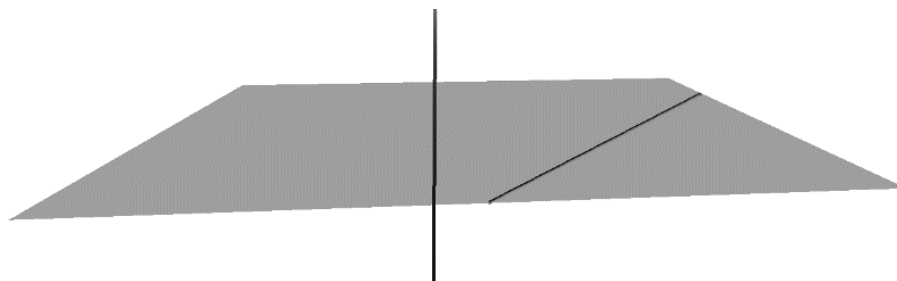
Un vector normal de π es $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r \times AB = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = (2, 4, -4) \parallel (1, 2, -2)$

Luego $\pi: 1(x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + 2y - 2z - 1 = 0}$



2005-5 Se sabe que las rectas $r: \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} ax + 6y + 6 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ son paralelas. Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

Plano π que contiene a una recta r y es perpendicular a otra recta s



Para que el problema tenga solución, r y s deben ser perpendiculares.

En tal caso, un vector normal de π es $\vec{n}_\pi = \vec{d}_s$. Además, el plano π pasa por cualquier punto A de r .

De esta forma, $\pi(A; \vec{n}_\pi)$

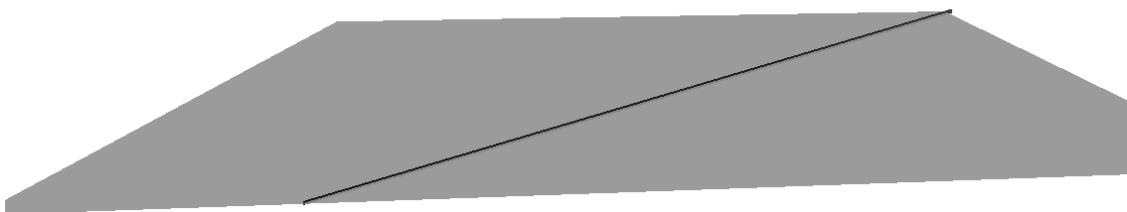
Actividades

Halla un plano que contenga a $r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ y sea perpendicular a $s \equiv \begin{cases} 4x+y+z-1=0 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}$

2009-2 Considera la recta r definida por $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} 2y+1=0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$
 ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s? Razona la respuesta.

Halla un plano que contenga a $r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ y sea perpendicular a $s \equiv \begin{cases} 4x+y+z-1=0 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}$

Plano π que contiene a una recta r y es paralelo a otra recta s



El plano π tiene como vectores directores $\vec{u} = \vec{d}_r$ y $\vec{v} = \vec{d}_s$.

Además, el plano π pasa por cualquier punto A de r. De esta forma, $\pi(A; \vec{u}, \vec{v})$

Actividades

Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta $x-3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ y es paralelo a la recta

$$\begin{cases} x-y-z+2=0 \\ y-2z=1 \end{cases}$$

SOLUCION

$$r \equiv x-3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}; P(3, 2, 1) \in r, \vec{r} = (1, 2, 3)$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ y-2z=1 \end{cases} \quad \vec{s} = (1, -1, -1) \wedge (0, 1, -2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (3, 2, 1)$$

El plano pedido pasa por P y tiene como vectores directores \vec{r} y \vec{s}

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot (-4) - (y-2) \cdot (-8) + (z-1) \cdot (-4) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$$

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos (2, 0, 0) y (0, 1, 0)

Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$

y contiene a la recta $s : \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$ Sol.: $8x + 6y + 11z - 18 = 0$

Sea r la recta que pasa por los puntos A(1, 0, 0) y B(1, -1, 0), y sea s la recta que pasa por los puntos C(0, 1, 1) y D(1, 0, -1). Calcula la ecuación del plano π que contiene a s y es paralelo a r. Sol.: $2x + z - 1 = 0$

Considera los puntos A(1, 0, -1); B(2, 1, 0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

- a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B. Sol.: $-x + z + 2 = 0$
 b) Determina si la recta que pasa por los puntos P(1, 2, 1) y Q(3, 4, 3) está contenida en dicho plano. Sol.: No

Halla la ecuación del plano que contiene a $\begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$ y es paralelo a $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z + 3$. Sol.: $5x - 6y + 3z - 11 = 0$

Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta $x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ y es paralelo a la recta

$$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

2014-3 Considera los puntos A(1, 1, 2) y B(1, -1, -2) y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$
 Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y por B.

2014-8 Sea r la recta dada por $\frac{x+2}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{-3}$ y sea s la recta dada por $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$
 Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

2011-2 Considera los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, 1, 0)$, y la recta r dada por
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

(a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B .

(b) Determina si la recta que pasa por los puntos $P(1, 2, 1)$ y $Q(3, 4, 1)$ está contenida en dicho plano.

2011-11 Dada la recta r definida por
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$$
 y la recta s definida por
$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r .

2010-5 Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 2, 4)$ y la recta r definida por
$$\frac{x+2}{2} = y-1 = \frac{z-1}{3}$$

Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene los puntos A y B .

2010-7 Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta r de ecuaciones
$$\begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$$

y contiene a la recta s definida por
$$\begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

2009-2 Considera la recta r definida por
$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$
 y la recta s definida por
$$\begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s

2009-4 Considera la recta r definida por
$$\begin{cases} y = -1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$$
 y la recta s definida por
$$\begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s

2009-11 Sea la recta r definida por $x - y = -2$ y $x - z = -3$ y la recta s definida por $x = 12y - z = -2$

Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r

2008-1 Sea la recta s dada por
$$\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y contiene a la recta r , dada por

$$x - 1 = -y + 2 = z - 3$$

2008-7 Considera la recta r definida por
$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$$
 y la recta s definida por
$$\begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

(a) Estudia la posición relativa de r y s .

(b) Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r .

2007-4 Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0, 1, 5) y (3, 4, 3) y es paralelo a la recta

definida por las ecuaciones
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

2006-7 Sea r la recta de ecuación $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4}$ y s la recta dada por
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

- (a) Determina la posición relativa de ambas rectas.
 (b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

2006-8 Considera la recta r de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y no corta al eje OZ.

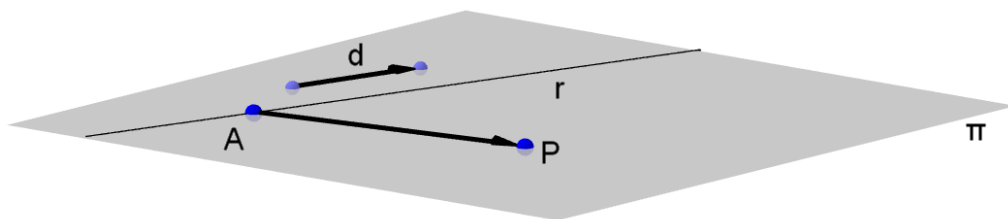
2002-2 Considera los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(1, 1, 0) y D(1, 0, 0).
 Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y no corta a la recta determinada por C y D.

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos (2, 0, 0) y (0, 1, 0)

Plano que contiene a una recta r y es paralelo a otro plano

Halla un plano paralelo a $\pi: 2x + y - z + 2 = 0$ que contenga a la recta $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$

Plano que pasa por un punto P y contiene a una recta r



Hallamos un punto A y un vector director \vec{d} de la recta. Observa que $\pi(A; \vec{AP}, \vec{d})$

Actividades

Halla la ecuación del plano que contiene a r:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$
 y pasa por el origen de coordenadas.

2017-2 Considera el punto P(1,- 1,0) y la recta "r" dada por
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$$

 Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a "r".

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

2016-9 Considera el punto $A(1, -1, 1)$ y la recta "r" dada por
 Determina la ecuación del plano que contiene a "r" y pasa por A.

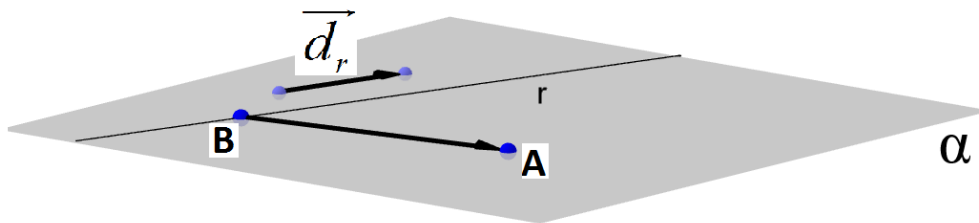
Resolución

Para determinar el plano α vamos a tomar un punto del plano y dos vectores l.i. paralelos al plano

Como $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$, $B(1,1,1) \in r$,

El plano α vendría determinado por $\begin{cases} \text{Punto de } \alpha: A(1,-1,1) \\ \text{Vectores: } \vec{d}_r = (2,-1,0) \text{ y } \vec{BA} = (0,-2,0) \times (0,1,0) \end{cases}$

Una ecuación vectorial de α sería: $\alpha: (x,y,z) = (1,-1,1) + \lambda(2,-1,0) + \mu(0,1,0)$



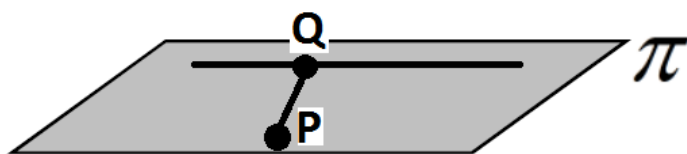
2015-2 Considera el punto $P(1,0,-1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$
 Determina la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r.

Resolución

El plano π que nos piden pasa por el punto $P(1,0,-1)$, es paralelo a $\vec{d}_r = (1,-1,0)$ y a $\vec{PQ} = (-1/2, -1/2, 2) \times (1,1,-4)$.

Un vector normal de π es $n_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (4,4,2) \times (2,2,1)$

$\pi: 2(x-1) + 2(y-0) + 1(z+1) = 0 \rightarrow \pi: 2x + 2y + z - 1 = 0$



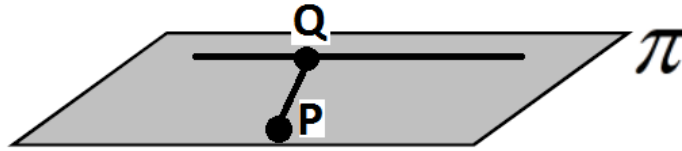
2015-12 Sean el punto $P(1,6,-2)$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$
 Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r.

Resolución

Si tomamos $Q(5, -1, 0) \in r$, el plano π pasa por $P(1, 6, -2)$ y es paralelo a los vectores

$$\mathbf{d}_r = (6, -3, 2) \text{ y } \mathbf{PQ} = (4, -7, 2). \text{ Luego, } n_\pi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 2 \end{vmatrix} = (8, -4, -30) \wedge (-4, 2, 15)$$

Por tanto $\pi : -4(x-1) + 2(y-6) + 15(z+2) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : -4x + 2y + 15z + 22 = 0}$



2014-2 Sea r la recta definida por
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

2011-6 Dados el punto $P(1, 1, -1)$ y la recta r de ecuaciones
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P .

2011-11 Dada la recta r definida por
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$$

Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .

2009-12 Sea el punto $P(2, 3, -1)$ y la recta r definida por
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene r

2008-3 Dada la recta r definida por
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .

2006-6 Considera el punto $P(3, 2, 0)$ y la recta r de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .

2005-1 Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y la recta
$$r : \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r .

2005-9 Considera el punto $A(0, -3, 1)$, el plano $\pi : -2y + 3z = 0$ y la recta
$$r : x + 3 = y = \frac{z-3}{2}$$

Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r .

2003-5 Considera el punto $P(-2, 3, 0)$ y la recta $r: \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r .

Consideramos el plano $\pi \equiv 3x + 4y + 5z = 1$ y los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(-1, 4, 3)$

Hallar el plano que pasa por el punto A y que contiene a la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto medio del segmento AB

Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, -1, 2)$ y contiene a la recta $\{x + y - 2z = 2, x - 3y + z = 1\}$

Calcula la ecuación del plano que pasa por $P(0, 0, 1)$ y contiene a la recta $r \equiv \{5x - 3y + 2z = 0, 2x - y - z - 1 = 0\}$

Calcula la ecuación del plano que contiene a $r: \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y pasa por el origen de coordenadas.

Calcula la ecuación del plano que contiene a $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y pasa por $P(1, 1, -1)$. Sol: $y+z=0$

Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$

Sol: $-x+2y+z=0$

Sean los planos $\alpha: 2x - y + z = -2$ $\beta: -x + y + 3z = 1$.

a) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r donde se cortan

b) Calcula el plano que contiene a r y además pasa por el punto $A(2, 1, 5)$

Sean los planos $\alpha: x - y + 2z + 1 = 0$ $\beta: -x - y + z = 1$.

a) Halla las ecuaciones de la recta r donde se cortan Sol: $r \equiv (x,y,z) = (-1,0,0) + \lambda(-1,3,2)$

b) Calcula el plano que contiene a r y además pasa por el punto $A(5, -2, 0)$ Sol: $x+3y-4z+1=0$

Encuentra la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ y pasa además por el punto $A(1,0,1)$.

Halla la ecuación del plano que pasa por $P(0,0,1)$ y contiene a $r \equiv \{5x - 3y + 2z = 0, 2x - y - z - 1 = 0\}$.

Solución. $7x - 4y + z - 1 = 0$.

Halla la ecuación del plano que pasa por $A(2,0,1)$ y contiene a la recta $\frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z}{-1}$.

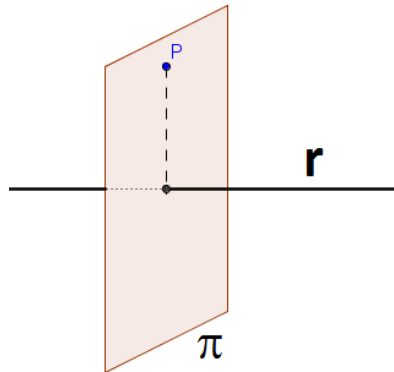
Solución. $4x-3y+5z-13=0$.

Sean los planos $\alpha: x - y + 2z + 1 = 0$ $\beta: -x - y + z = 1$.

a) Halla las ecuaciones de la recta r donde se cortan Sol: $r \equiv (x,y,z) = (-1,0,0) + \lambda(-1,3,2)$

b) Calcula el plano que contiene a r y además pasa por el punto A(5, -2, 0) Sol: $x+3y-4z+1=0$

Plano que pasa por un punto P y es perpendicular a una recta r



Como $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r$, entonces $\pi(P; \vec{d}_r)$

Actividades

Calcula la ecuación del plano que pasa por P(-3, 1, 6) y es ortogonal a la recta r: $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Halla la ecuación del plano π que es perpendicular a los planos $\pi_1 : 2z + 3y + z = 1$, y $\pi_2 : 6x + 3y + 2z = 3$ sabiendo que pasa por el punto A(4,1,2).

Solución:

Para determinar un plano necesitamos:

- Un punto
- Dos vectores paralelos al plano y no paralelos entre sí.

El punto lo tenemos.

Los vectores característicos de π_1 y π_2 , $v = (2,3,1)$ y $w = (6,3,2)$, son paralelos al plano y no paralelos entre sí. Por tanto,

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, $6(x-4) + 6(y-1) + 6(z-2) - 18(z-2) - 3(x-4) - 4(y-1) = 0$, es decir, $\pi : 3x + 2y - 12z + 10 = 0$

2016-2 Sea r la recta que pasa por los puntos A(1,1,0) y B(3,-1,1) y s la recta dada por $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$
 Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s.

Resolución

Como el plano debe ser perpendicular a la recta s , un vector normal de π es $n_\pi = d_s = (2, -1, 1)$

También debe contener al punto $B(3, -1, 1)$. Por tanto, la ecuación normal sería : $\pi' : 2(x-3) - 1(y+1) + 1(z-1) = 0 \rightarrow \pi' : 2x - y + z - 8 = 0$.

Para obtener unas ecuaciones paramétricas podemos resolver la ecuación $2x - y + z - 8 = 0$, $x = \lambda$, $y = \mu$; sustituyendo y despejando z obtenemos :

$z = 8 - 2\lambda + \mu$. Por tanto, $\pi' : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 8 - 2\lambda + \mu \end{cases}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2016-3 Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta "r" dada por $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.
 Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a "r".

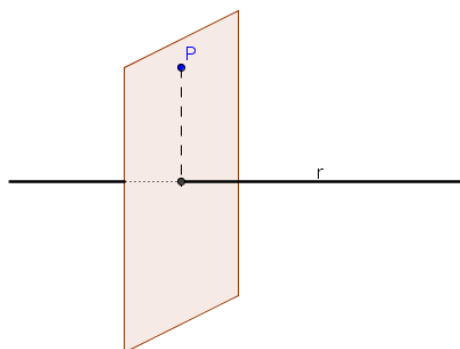
Resolución

Sea π el plano que buscamos. Como el plano debe ser perpendicular a la recta r,

un vector normal de π es $n_\pi = d_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2, -1)$

También debe contener al punto $P(1,0,5)$. Por tanto, la ecuación normal sería :

$\pi : 0(x-1) + 2(y-0) - 1(z-5) = 0 \rightarrow \pi : 2y - z + 5 = 0$



2014-2 Sea r la recta definida por $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto $(1, 1, 0)$.

2010-4 Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(2, 1, 2)$ y $D(t, -2, 2)$

Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por A y B, que contenga al punto C.

2010-5 Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 2, 4)$ y la recta r definida por $\frac{x+2}{2} = y-1 = \frac{z-1}{3}$
 Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y de B .

2010-9 Considera los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$.
 Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por A .

2009-10 Sea la recta r definida por $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$
 Determina la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$

2009-12 Sea el punto $P(2, 3, -1)$ y la recta r definida por $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$
 Halla el punto de r que está más cerca de P

2008-2 Considera los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(1, -1, 1)$. Halla la ecuación del plano que contiene al punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C .

2008-3 Dada la recta r definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$
 Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r .

2007-1 Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio, siendo $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$.

2003-5 Considera el punto $P(-2, 3, 0)$ y la recta $r: \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$
 Determina el punto de r más próximo a P .

2002-4 Sea π el plano de ecuación $3x - y + 2z - 4 = 0$

Halla la ecuación del plano π_2 que es perpendicular a ambos que contienen a la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}$

2002-5 Los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(-1, 0, -2)$ son vértices opuestos de un cuadrado.
 Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos A y B que pasa por su punto medio

2002-11 Halla el punto de la recta $r: \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1, -1, 0)$.

2001-5 Considera los planos $\pi_1: 2x + 5 = 0$ y $\pi_2: 3x + 3y - 4 = 0$
 Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

2001-6 Sea r la recta de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$
 Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$

$$x-1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}$$

2000-2 Calcula el punto de la recta de ecuaciones más cercano al punto A(1, -1, 1).

2000-8 Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (-1, 2, 1).

Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a los planos:

$y + z = 2$, $x + y = 1$. Solución. $x - y + z = 0$.

Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta $\{2x + y - z = 0, x - y + z + 3 = 0\}$ y pasa por el punto (3, 2, 1). Solución. $\pi \equiv y + z = 3$.

Calcula la ecuación del plano que pasa por P(-3, 1, 6) y es ortogonal a la recta r:
$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que pasa por P(1, 0, 2) y es perpendicular a
$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$
.

Sol: $x + 2y - z + 1 = 0$

Considera los puntos A(1, 2, 1) y B(-1, 0, 3). Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por A. Sol: $x + y - z - 2 = 0$

Sea r la recta que pasa por A(1, 1, 1) y B(1, 0, 0) y π el plano que pasa por C(0, 2, 1) y es perpendicular a r.

Sol: $P\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Calcula el punto P en el que se cortan r y π .

Halla la ecuación del plano π que es perpendicular a los planos $\pi_1 : 2z + 3y + z = 1$, y $\pi_2 : 6x + 3y + 2z = 3$ sabiendo que pasa por el punto A(4, 1, 2)

Calcula la ecuación del plano que es perpendicular al segmento que une los puntos P(1, 2, -1) y Q(3, 0, -3) y que pasa por su punto medio. Sol: $-x + y + z + 3 = 0$

Calcula la ecuación del plano que pasa por A(8, -1, 3) y es perpendicular a r
$$\frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{3}$$

Sol: $2x + y + 3z - 24 = 0$

Calcula la ecuación del plano que es perpendicular al segmento AB, siendo A(1, 1, 1), B(-1, 2, 0) y que contiene al punto C(2, 1, 2).

Sol: $2x - y + z - 5 = 0$

Calcula la ecuación del plano que corta perpendicularmente a
$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$
 en el punto (1, 1, 0).

Sol: $-x + 3y + 5z - 2 = 0$

Plano que pasa por un punto y es paralelo a dos rectas que se cruzan

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto (1, 1, 2) y es paralelo a las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$

y $s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$

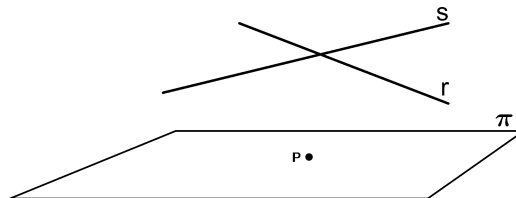
Halla la ecuación del plano que contiene al punto (4, 3, -5) y es paralelo a las rectas

$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$ $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$ Sol.: $x - y + z + 4 = 0$

Sean las rectas $r \equiv (x, y, z) = (3, 1, 3) + (-5, 2, 0)t$ y $s \equiv \{3x - y + z = 0, x + 2y - z - 2 = 0\}$

Halla la ecuación de un plano que pasa por A(-1, -1, 0) y es paralelo a las dos rectas. Halla la intersección de dicho plano con los ejes coordenados.

Plano π que pasa por un punto P y es paralelo a dos rectas r y s no paralelas



Tomamos como punto de paso de π el punto P y como vectores directores el de r y el de s, \vec{d}_r y \vec{d}_s .

De esta forma, $\pi(P; \vec{d}_r, \vec{d}_s)$

Actividades

2016-2 Sea r la recta que pasa por los puntos A(1,1,0) y B(3,-1,1) y s la recta dada por $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$

Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.

Resolución

El plano que nos piden pasa por el punto $O(0,0,0)$ y es paralelo a \vec{d}_r y a \vec{d}_s .

$$\vec{d}_r = \vec{AB} = (3, -1, 1) - (1, 1, 0) = (2, -2, 1)$$

Como se viene dada como intersección de dos planos, $\vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 1)$

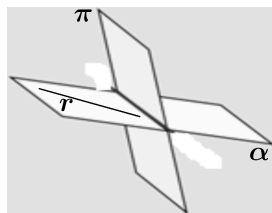
Observese que como $\vec{d}_r \wedge \vec{d}_s$, hay un único plano que pasa por O y es paralelo a \vec{d}_r y a \vec{d}_s . Su vector normal es:

$$\vec{n}_\pi = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 2) \Rightarrow \pi : -1(x-0) + 0(y-0) + 2(z-0) = 0 \rightarrow \boxed{\pi : -x + 2z = 0}$$

2009-1 Considera el punto $P(1, 0, 0)$, la recta r definida por $x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z + 1}{-2}$ y la recta s definida por $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0)$

Halla la ecuación del plano α que pasando por P es paralelo a r y s

Plano α que contiene a una recta r y corta a otro plano π



Hay infinitas soluciones: tomando A es un punto de r y B es un punto de π de forma que $\vec{d}_r \parallel \vec{AB}$, un plano sería $\alpha(\vec{A}; \vec{d}_r, \vec{AB})$.

Actividades

2003-4 Considera la recta $r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - 2y + z = 0$.

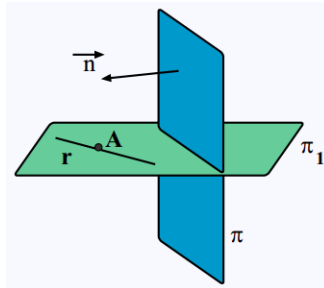
Halla el plano que contiene a la recta r y corta al plano π en una recta paralela al plano $z = 0$.

Plano π_1 que contiene a una recta r y es perpendicular a otro plano π

- Si r es perpendicular a π hay infinitas soluciones, el haz de planos de base la recta r.

- Si r no es perpendicular a π , sea A punto de r, \vec{d}_r un vector director de r y \vec{n} un vector normal de π .

Entonces, $\pi_1(A; \vec{d}_r, \vec{n})$



Actividades

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $x = y = z$ y es perpendicular al plano

$x + y - z - 1 = 0$ Sol: $x - y = 0$

Halla la ecuación del plano perpendicular a $\pi: 2x + y - z + 2 = 0$, y que contiene a la recta

$$\frac{x - 5}{-2} = y = \frac{z - 6}{-3}$$

Determina la ecuación del plano que contiene a $r \equiv \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2z \end{cases}$ y es perpendicular a $\pi: x + y - z = 2$

Sol: $y + z - 2 = 0$

Halla la ecuación del plano π que es perpendicular a $\pi_1: x - 6y + z = 0$ y contiene a la recta intersección

de $\pi_2: 4x - 2y + z = 2$ y $\pi_3: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(3, 2, -1) y B(4, 0, 2) y es ortogonal al plano $x - 5y + 2z - 6 = 0$.

Dados los puntos A(0, 1, 1) y B(1, 0, -2), halla la ecuación del plano que pasa por ellos y es perpendicular al plano $2x - y + z + 1 = 0$. Solución. $4x + 7y - z - 6 = 0$.

Dados los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 2, 0), y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Halla la ecuación del plano perpendicular a $\pi: 2x + y - z + 2 = 0$, y que contiene a la recta

$$\frac{x - 5}{-2} = y = \frac{z - 6}{-3}$$

Hállese la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv x = y = z$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$

Halla la ecuación del plano π que es perpendicular a $\pi_1: x - 6y + z = 0$ y contiene a la recta intersección

de $\pi_2: 4x - 2y + z = 2$ y $\pi_3: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$

Solución:

Ecuación general de π_3 :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + z + 1 = 0$$

$\pi_2 \cap \pi_3: \begin{cases} 4x - 2y + z - 2 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ que pasamos a paramétricas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2y + z - 2 = 0 \\ -x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \text{ Sumando se obtiene } x = 1$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones resulta $z = 2y - 2$ y haciendo $y = \lambda$,

$$\pi_2 \cap \pi_3: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

- Un punto del plano buscado puede ser el de la recta intersección: (1,0,-2)

Los dos vectores que necesitamos serán:

- El vector director de la recta intersección: $v = (0,1,2)$
- El vector característico del plano π_1 : $w = (1,-6,1)$

Ecuación del plano π :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 13x + 2y - z - 15 = 0$$

(Después de desarrollar el determinante y simplificar el resultado)

$$\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$$

2014-6 Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$, y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$.
Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

2009-8 Considera el plano π de ecuación $3x - 2y - 2z = 7$ y la recta r definida por $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

Halla la ecuación de plano ortogonal a π que contiene a r

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

2004-9 Considera el plano $\pi : 2x + y - z + 7 = 0$ y la recta

Halla la ecuación de un plano perpendicular a π y que contenga a la recta r .

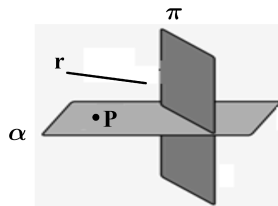
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + y - z = 2$.

Plano α que pasa por un punto P , es paralelo a una recta r y perpendicular a otro plano π

- Si r es perpendicular a π hay infinitas soluciones, un haz de planos.

- Si r no es perpendicular a π , si \vec{d} es un vector director de r y \vec{n} un vector normal de π , $\alpha(P; \vec{d}, \vec{n})$



Actividades

Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3, 1, -1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \{x = 2z + 3, y = z\}$ y perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + 3y - z + 5 = 0$.

Calcula la ecuación del plano que pasa por $P(1,1,1)$, y es perpendicular al plano $x - 2y + 3z + 1 = 0$ y

paralelo a la recta: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z}{-3}$.

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$ es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta: $\{x = 2y, z = 1\}$.

Se considera el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$, la recta $s \equiv \begin{cases} x - 3y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ y el punto $A(4, 0, -1)$. Hallar el plano que, pasando por A , es paralelo a la recta s y perpendicular al plano π .

2016-6 Considera el punto $P(1, 0, -1)$ y el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$.

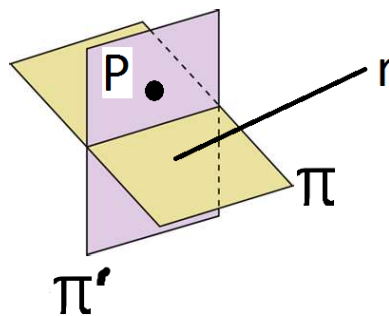
Determina la ecuación del plano que contiene al punto P, es perpendicular al plano π y es paralelo a la

recta dada por
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases} .$$

Resolución

Sea π' el plano que buscamos y $r: \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$,
$$d_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 0) \times (2, 1, 0)$$

Como d_r ni es paralelo ni perpendicular a $n_\pi = (2, -1, 1) \Rightarrow r$ y π son secantes (no perpendiculares)



$$\begin{cases} \pi' \perp \pi \Rightarrow n_{\pi'} \perp n_\pi \\ \pi' \parallel r \Rightarrow n_{\pi'} \perp d_r \end{cases}$$
 Tomamos
$$n_{\pi'} = n_\pi \times d_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, 4)$$

Como además $P(1, 0, -1) \in \pi' \Rightarrow \pi': -1(x-1) + 2(y-0) + 4(z+1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': -x + 2y + 4z + 5 = 0}$

2009-7 Considera el punto $P(1, 0, -2)$, la recta r definida por
$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$
 y el plano π de ecuación $2x + y + 3z - 1 = 0$

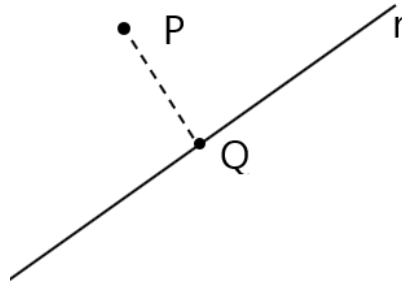
Halla la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a r y es perpendicular a π

2001-11 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$, es perpendicular al plano

$x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

Si r es una recta y P un punto cualquiera que no pertenezca a esa recta, un problema que nos podemos plantear es el de encontrar la proyección Q de ese punto P sobre la recta r .

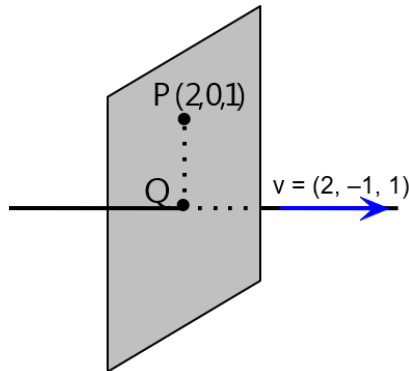


Para resolver el problema debemos hallar el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P (un vector director de la recta será un vector normal del plano).

Una vez hallado, el punto proyección será la intersección de π y r .

Ejemplo:

Hallemos la proyección ortogonal del punto $P(2, 0, 1)$ respecto de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$



1º) Hallamos el plano que es perpendicular a la recta y pasa por P :

Será de la forma $2x - y + z + D = 0$, ya que el vector director de la recta se convierte en el vector normal del plano.

Como dicho plano contiene al punto $P(2, 0, 1)$ entonces: $2 \cdot 2 + 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5$

El plano tiene de ecuación $\pi : 2x - y + z - 5 = 0$

2º) Hallamos el punto Q , que será la intersección de la recta con el plano calculado

Para ello, ponemos la recta en forma paramétrica:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \text{ y teniendo en cuenta que el plano es } \pi : 2x - y + z - 5 = 0$$

La intersección de la recta y el plano nos da: $4\lambda - 3 + \lambda + 2 + \lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Llevando λ a la recta obtenemos $Q(4, 2, 3)$

Actividades

Halla la proyección del punto $P(2, 0, 1)$ respecto de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$

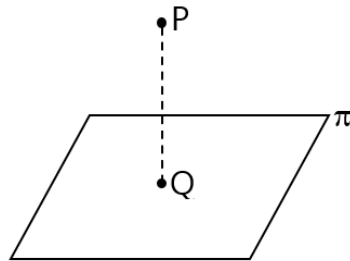
Determina un punto P sabiendo que sus proyecciones ortogonales sobre los planos $x+y=0$, $y+z=0$ son los puntos $P'(-1, 1, 5)$, $P''(1, -1, 1)$, respectivamente.

2006-8 Considera la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

Calcula la proyección ortogonal del punto $A(1, 2, 1)$ sobre la recta r .

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Dado un plano π y un punto P exterior al plano, el problema es hallar la proyección de dicho punto sobre el plano, como vemos en la figura.



Debemos calcular la recta perpendicular al plano (un vector normal del plano nos servirá como director de la recta) que pase por el punto P .

La proyección buscada será, una vez más, la intersección del plano y la recta.

Ejemplo:

Hallemos la proyección ortogonal del punto $P(4, -2, 3)$ sobre el plano $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$

1º) Hallamos la recta perpendicular al plano y que pasa por $P(4, -2, 3)$

En este caso, el vector director de la recta será el vector normal del plano $\vec{v} = \vec{n} = (2, -1, 1)$

$$\begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Por tanto, la recta perpendicular será:

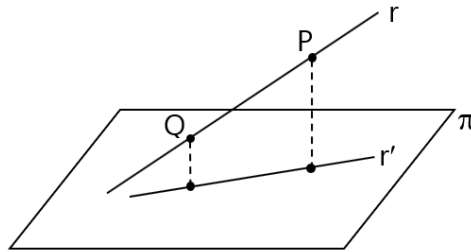
2º) El punto buscado será la intersección de esa recta con el plano:

$$2(4 + 2\lambda) - (-2 - \lambda) + (3 + \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ y llevando } \lambda \text{ a la recta obtenemos } Q(0,0,1)$$

Actividades

Halla la proyección del punto $P(4, -2, 3)$ sobre el plano $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$

Proyección ortogonal de una recta sobre un plano



Aun siendo éste un problema que es bastante improbable que se nos presente, daremos unas indicaciones.

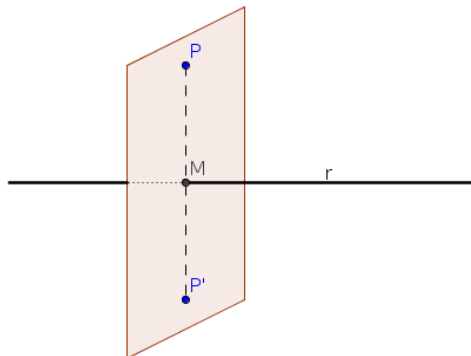
Una forma sería proyectar dos puntos de la recta sobre el plano como hemos visto antes y después unirlos en la recta proyección.

Pero es más sencillo hallar el plano perpendicular al plano dado que contiene a la recta (cualquier vector perpendicular al plano dado, junto con un vector director y un punto de la recta nos sirven para hallarlo) y hallar la intersección de los planos, es decir, que esas dos ecuaciones serían las implícitas de la recta buscada.

Actividades

Calcula la proyección ortogonal de la recta $y-x=1, z=-1$ sobre el plano $x+y+z=0$.

Simétrico de un punto P respecto de una recta r



Hallamos el punto de corte, M, entre la recta r y el plano que pasa por P y es perpendicular a r.

Después, calculamos P' usando que M es el punto medio de $\overline{PP'}$

Actividades

Calcula el simétrico del punto $P(-3, 1, 6)$ respecto de la recta r:
$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Calcula el punto simétrico de $A(8, -1, 3)$ respecto de la recta r:
$$\frac{x+1}{2} = y-2 = \frac{z-1}{3} \quad \text{Sol.: } P'(-4, 8, 8)$$

Halla el punto simétrico de $P(2, 1, -5)$ respecto de la recta
$$r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{Sol.: } P'(-6, -1, 1)$$

Halla el simétrico de $A(-3, 1, -7)$ respecto de la recta
$$r \equiv x+1 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2} \quad \text{Sol.: } A'(-3, -3, -3)$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

Halla el simétrico de A(2,0,1) respecto de la recta

Halla el simétrico del punto P(1, 2, 1) respecto de la recta r: $x = -1 + \lambda, y = 2 + \lambda, z = 3 + 4\lambda$

Los planos $x + 2y + az = 1, 2x + y + az = 0, 3x + 3y - 2z = 1$ se cortan en una recta, ¿cuánto vale a? Determina el simétrico del punto P(1,0,1) respecto de la recta determinada en el apartado anterior

Halla el punto Q simétrico del punto P(2,0,1) respecto de la recta r que pasa por el punto A(0,3,2) y es

$$s \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

paralela a la recta s de ecuaciones

Calcula el simétrico del punto P(-3, 1, 6) respecto de la recta r: $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

Halla el simétrico de A(2, 0, 1) respecto de la recta

Solución:

Plano perpendicular a la recta que pasa por A:

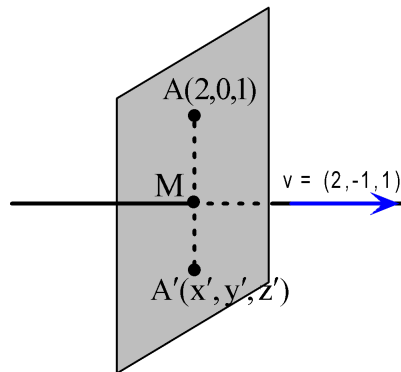
$$2x - y + z + D = 0$$

Como dicho plano contiene al punto A,

$$2 \cdot 2 + 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

El plano tiene de ecuación

$$\pi : 2x - y + z - 5 = 0$$



Ecuación de la recta dada en paramétricas:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

La intersección de la recta y el plano nos da el punto M:

$$4\lambda - 3 + \lambda + 2 + \lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Llevando λ a la recta obtenemos M(4,2,3)

Como M es el punto medio de A y A', si aplicamos las fórmulas del punto medio, resulta:

$$\frac{2 + x'}{2} = 4 \Rightarrow x' = 6$$

$$\frac{0 + y'}{2} = 2 \Rightarrow y' = 4$$

$$\frac{1+z'}{2} = 3 \Rightarrow z' = 5$$

Las coordenadas del simétrico de A son: A'(6,4,5)

Determina las coordenadas del punto simétrico de A(-3,1,-7), respecto de la recta $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$

Solución:

Hallamos un plano perpendicular a la recta que pasa por A.

A continuación, buscamos la intersección de la recta y el plano. El punto de intersección es el punto medio de A y su simétrico A'

A'(-3,-3,-3)

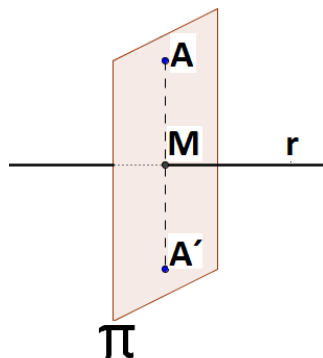
2017-2 Considera el punto P(1,-1,0) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$

Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto a "r".

2016-9 Considera el punto A(1, -1, 1) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$

Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a "r".

Resolución



Calculamos el plano $\pi \perp r$ que pasa por A(1,-1,1)

$n_\pi = d_r = (2, -1, 0) \Rightarrow \pi : 2(x-1) - 1(y+1) + 0(z-1) = 0 \Rightarrow \pi : 2x - y - 3 = 0$

Hallamos el punto de corte, M, entre π y r: $2(1+2\lambda) - (1-\lambda) - 3 = 0$

$$5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{2}{5} \\ y = 1 - \frac{2}{5} \\ z = 1 \end{cases} \text{ . Luego, } M \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right)$$

Para calcular el punto simétrico, A'(x, y, z), de A respecto de r podemos usar que M es el punto medio del segmento AA'. Por tanto, $\overline{AA'} = 2 \overline{AM} \Rightarrow (x-1, y+1, z-1) = 2 \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 0 \right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}, 0 \right)$

Igualando las componentes y despejando se obtiene: $x = \frac{13}{5}$, $y = \frac{11}{5}$, $z = 1$. Luego, $A' \left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1 \right)$

2015-9 Considera el punto $P(-3, 1, 6)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

- a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .
- b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r .

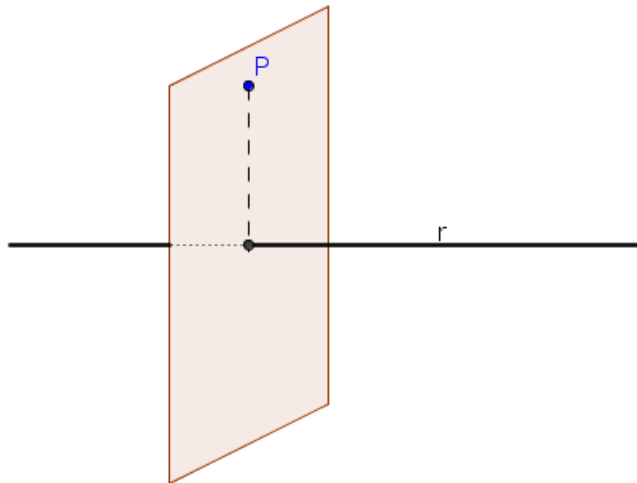
Resolución

a) Sea π el plano que buscamos. Como el plano debe ser perpendicular a la recta r ,

un vector normal de π es $n_\pi = d_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, 2)$

También debe contener al punto $P(-3, 1, 6)$. Por tanto, la ecuación normal sería:

$\pi : 1(x+3) + 2(y-1) + 2(z-6) = 0 \rightarrow \pi : x + 2y + 2z - 11 = 0$



b) Primero hallamos el punto de corte, Q , entre r y π , resolviendo el sistema formado

por las ecuaciones de r y la ecuación de π :
$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \\ x + 2y + 2z - 11 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow Q(3, 1, 3)$$

Para calcular el punto simétrico, $P'(x, y, z)$, de $P(-3, 1, 6)$ respecto de r podemos usar que $Q(3, 1, 3)$ es el punto medio del segmento PP' . Por tanto, $PP' = 2PQ \Rightarrow (x+3, y-1, z-6) = 2(6, 0, -3) = (12, 0, -6)$

Igualando las componentes y despejando se obtiene: $x = 9, y = 1, z = 0$. Luego, $P'(9, 1, 0)$

2014-12 Considera el punto $A(8, -1, 3)$ y la recta r dada por
$$\frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{3}$$

- a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r .
- b) Halla el punto simétrico de A respecto de r .

2009-10 Halla el punto simétrico de $P(2, 1, -5)$ respecto de la recta r definida por
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

2009-12 Considera el punto $P(1, 0, 2)$ y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$

- (a) Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .
- (b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r .

2011-1 Determina el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto de la recta r de ecuaciones

$$x - 1 = \frac{y + 3}{2} = \frac{z + 1}{2}$$

2010-11 Halla el punto simétrico de $P(1, 1, 1)$ respecto de la recta r de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$

2006-6 Considera el punto $P(3, 2, 0)$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r .

2005-1 Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$

Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r .

2005-3 Sea el punto $P(1, 0, -3)$ y la recta $r: \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

- (a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r .
- (b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

2002-3 Considera los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(1, 3, 0)$ y $C(0, 0, 1)$. Halla el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C .

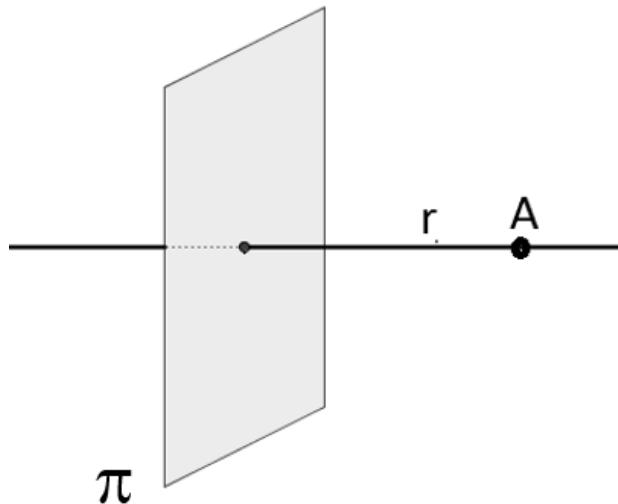
2001-7 Halla las coordenadas del punto simétrico de $A(0, -1, 1)$ con respecto a la recta

$$\frac{x-5}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

2000-12 Calcula las coordenadas del punto simétrico del $(1, -3, 7)$ respecto de la recta dada por las

ecuaciones $x - 1 = y + 3 = \frac{z - 4}{2}$

Recta r que pasa por un punto A y es perpendicular a un plano π



Tomamos como vector director de r cualquier vector normal del plano. Como $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi$, entonces $r(A; \vec{n}_\pi)$

Actividades

Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, 2, 1)$ y es perpendicular al plano que contiene a los puntos $(1, 0, 3)$, $(5, -1, 1)$ y $(3, 2, -3)$.

Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, 2, 1)$ y es perpendicular al plano que contiene a los puntos $(1, 0, 3)$, $(5, -1, 1)$ y $(3, 2, -3)$.

2014-11 Sean $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ los vértices de un triángulo.

Halla la ecuación de la recta perpendicular al plano que contiene al triángulo y que pasa por el origen de coordenadas.

2012-7 De un paralelogramo ABCD conocemos tres vértices consecutivos: $A(2, -1, 0)$, $B(-2, 1, 0)$ y $C(0, 1, 2)$. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

2010-6 Considera los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, -2, 2)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, -1, 2)$.

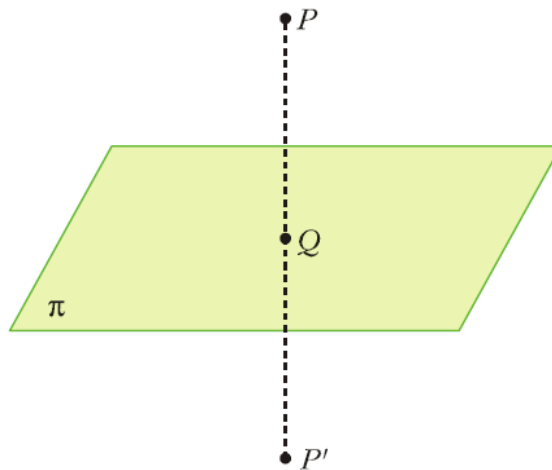
Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A , B y C .

2005-8 Sean $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ los vértices de un triángulo.

(a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

(b) Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por el origen de coordenadas.

Simétrico de un punto P respecto de un plano π



Hallamos el punto de corte, Q, entre el plano y la recta que pasa por P y es perpendicular al plano. Después, calculamos P' usando que Q es el punto medio de $\overline{PP'}$

Actividades

Halla el simétrico del punto P(1, 2, 4) respecto al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$. Solución. P'(-3,-2,0).

Calcula el simétrico del punto P(2,-1, 5) respecto del plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$.

Calcula el punto simétrico del punto (1, 0, 4) respecto del plano $x - y - 5z + 9 = 0$. Sol. P'($\frac{47}{27}, \frac{-20}{27}, \frac{8}{27}$)

Calcula el punto simétrico del punto P(1, -2, 3) respecto del plano $\pi: x + 2y - z = 0$. Sol. P'(3, 2, 1)

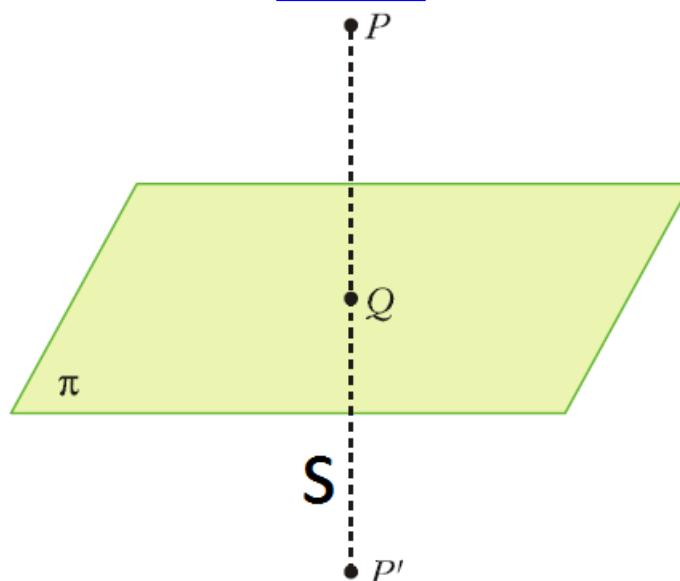
Halla el simétrico del punto A(0, 1, -2) respecto al plano de ecuación $\pi : 2x - y - z + 5 = 0$

Calcula el simétrico del punto P(2,-1, 5) respecto del plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$.

2016-6 Considera el punto P(1, 0, -1) y el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$.

Halla el simétrico del punto P respecto al plano π .

Resolución



1º) Hallamos la ecuación de la recta $s \perp \pi$ que pasa por P

$$d_s = n_\pi = (2, -1, 1) ; P(1, 0, -1) \in r \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

2º) Hallamos Q resolviendo el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de s y la ecuación de π :

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) + (-1 + \lambda) + 1 = 0 \rightarrow 6\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Luego } \begin{cases} x = 1 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) \\ y = -\left(-\frac{1}{3}\right) \\ z = -1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases} . \text{ Por tanto, } Q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

3º) Para calcular el punto simétrico, $P'(x, y, z)$, de P respecto de π podemos usar que Q es el punto medio

$$\text{del segmento } PP'. \text{ Por tanto, } \overrightarrow{PP'} = 2 \overrightarrow{PQ} \Rightarrow (x - 1, y - 0, z + 1) = 2\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Igualando las componentes y despejando se obtiene: } x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{5}{3}. \text{ Luego, } P'\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

Halla el simétrico del punto $A(0, 1, -2)$ respecto al plano de ecuación $\pi : 2x - y - z + 5 = 0$

Solución:

Si la ecuación del plano es

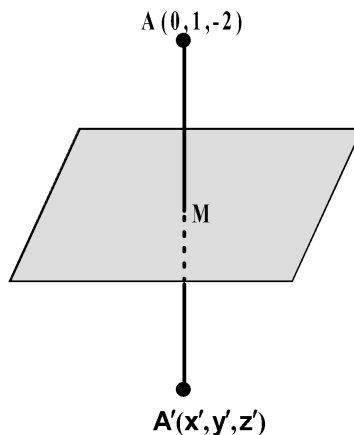
$$\pi : 2x - y - z + 5 = 0, \text{ el vector}$$

característico del plano $n = (2, -1, -1)$

será vector director de la recta que pasa por A y A' , por tanto,

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1} = \lambda$$

$$\text{Y en paramétricas: } \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$



La intersección de la recta y el plano nos da las coordenadas del punto M:

$$2 \cdot 2\lambda - (1 - \lambda) - (-2 - \lambda) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Sustituyendo λ en la ecuación de la recta obtenemos el punto $M(-2, 2, -1)$

El punto M es el punto medio del segmento AA' :

$$\frac{0 + x'}{2} = -2 \Rightarrow x' = -4$$

$$\frac{1 + y'}{2} = 2 \Rightarrow y' = 3$$

$$\frac{-2 + z'}{2} = -1 \Rightarrow z' = 0$$

Coordenadas del punto simétrico de A: $A'(-4,3,0)$

2015-8 Sea el plano $\pi: 2x + y - z + 8 = 0$.

Calcula el punto P' , simétrico del punto $P(2, -1, 5)$ respecto del plano π .

Resolución

1º) Hallamos la ecuación de la recta $s \perp \pi$ que pasa por P

$$d_s = n_\pi = (2, 1, -1) ; P(2, -1, 5) \in s \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

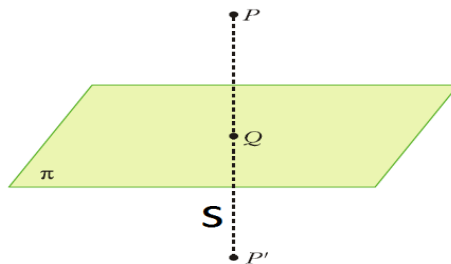
2º) Hallamos Q resolviendo el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de s y la ecuación de π :

$$2(2 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - (5 - \lambda) + 8 = 0 \rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$$\text{Luego, } \begin{cases} x = 2 + 2(-1) \\ y = -1 - 1 \\ z = 5 - (-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 6 \end{cases}. \text{ Por tanto, } Q(0, -2, 6)$$

3º) Para calcular el punto simétrico, $P'(x, y, z)$, de P respecto de π podemos usar que Q es el punto medio del segmento PP' . Por tanto, $PP' = 2PQ \Rightarrow (x - 2, y + 1, z - 5) = 2(-2, -1, 1) = (-4, -2, 2)$

Igualando las componentes y despejando se obtiene: $x = -2, y = -3, z = 7$. Luego, $P'(-2, -3, 7)$



2013-12 Halla el punto simétrico de $D(1, 0, 4)$ respecto del plano $x - y - 5z + 9 = 0$.

2011-8 Dados el plano π de ecuación $x + 2y - z = 0$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$

- (a) Halla el punto de intersección del plano π y la recta r.
- (b) Halla el punto simétrico del punto $Q(1, -2, 3)$ respecto del plano π .

2008-12 Considera los puntos $A(2, 0, 1), B(-1, 1, 2), C(2, 2, 1)$ y $D(3, 1, 0)$.

Halla el punto simétrico de A respecto del plano que contiene a B, C y D.

2007-11 Considera el plano π de ecuación $2x + 2y - z - 6 = 0$ y el punto $P(1, 0, -1)$.

- (a) Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π .
- (b) Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π .

2005-12 Sean los planos $\pi_1: 2x + y - z + 5 = 0$ y $\pi_2: x + 2y + z + 2 = 0$.

- (a) Calcula las coordenadas del punto P sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1, 0, -3)$.
- (b) Calcula el punto simétrico de P respecto del plano π_2 .

2002-6 Considera el plano $\pi: x - y + 2z = 3$ y el punto $A(-1, -4, 2)$

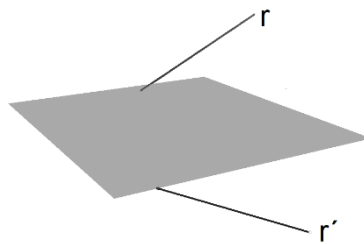
(a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A.

(b) Halla el punto simétrico de A respecto de π .

2001-14 Considera los puntos A(1, 2, 3), B(3, 2, 1) y C(2, 0, 2). Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A, B y C.

2000-7 Halla las coordenadas del punto simétrico del punto P(1, 2, -2) respecto al plano de ecuación $3x + 2y + z - 7 = 0$.

Recta r' simétrica de una recta r respecto de un plano



Hallamos dos puntos A y B de r y sus simétricos A' y B' respecto del plano. Entonces $r' \equiv (A'; \vec{A'B'})$

Actividades

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$$

Calcula la recta simétrica de la recta r respecto del plano

$$\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0.$$

Determina la recta simétrica r' de la recta $r \equiv \{x = 0, z = 3\}$ respecto al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$.

2015-8 Sea el plano $\pi: 2x + y - z + 8 = 0$.

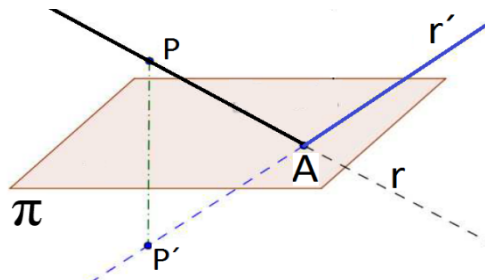
$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$$

Calcula la recta r', simétrica de la recta r respecto del plano π .

Resolución

Podemos comprobar que $P \in r$, pues cumple sus ecuaciones; también r y π son secantes pues

como $n_\pi = (2, 1, -1)$ $d_r = (-2, 3, 1)$, se observa que $n_\pi \not\perp d_r$



La recta simétrica r' que nos piden pasa por P' y por el punto de corte, A , entre r y π

Hallamos A resolviendo el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de r y la ecuación de π :

Como r :
$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 2(2 - 2\lambda) + (-1 + 3\lambda) - (5 + \lambda) + 8 = 0 \rightarrow -2\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda = 3$$

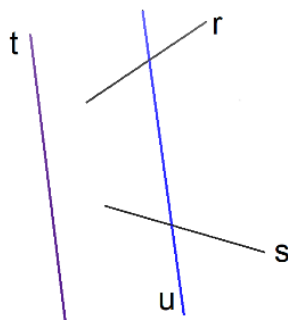
Luego,
$$\begin{cases} x = 2 - 2.3 \\ y = -1 + 3.3 \\ z = 5 + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 8 \\ z = 8 \end{cases}$$
 . Por tanto, $A(-4, 8, 8)$;
$$\vec{d}_{r'} = \vec{P'A} = (-4, 8, 8) - (-2, -3, 7) = (-2, 11, 1)$$

r' pasa por $A(-4, 8, 8)$ y un vector de dirección es $\vec{d}_{r'} = (-2, 11, 1) \Rightarrow r': (x, y, z) = (-4, 8, 8) + \lambda(-2, 11, 1)$

Recta perpendicular a dos rectas secantes que pasa por su punto de corte

Encuentra la ecuación de la recta ortogonal a las rectas $\frac{x-1}{-3} = y-1 = \frac{z-1}{2}$ y $\frac{x-2}{2} = y = \frac{z-5}{-4}$ que pase por su punto de intersección.

Recta u que corta a dos rectas r y s y es paralela a otra recta t



Tomamos un punto genérico P_λ de r y otro punto Q_μ de s y exigimos que el vector $\vec{P_\lambda Q_\mu}$ sea paralelo a un vector director de la recta t , \vec{d}_t . Llegamos así a un sistema de ecuaciones con incógnitas λ y μ .

- Si el sistema tiene solución, los valores obtenidos se sustituyen en P_λ y en Q_μ dando lugar a dos puntos P y Q . Entonces, $u(P; \vec{PQ})$.
- Si el sistema no tiene solución, no es posible que haya una recta que cumpla lo que se pide.

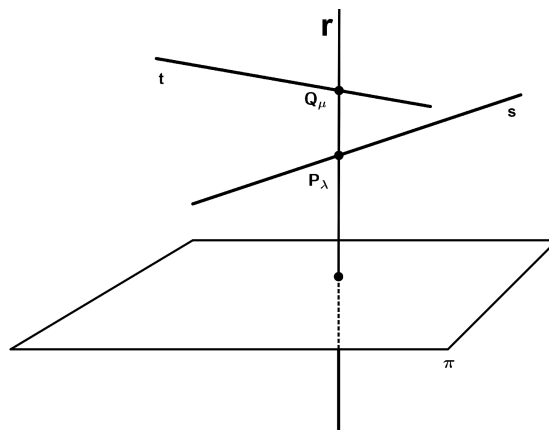
Actividades

2013-2 Considera las rectas $r: x = y = z$, $s: x = 2, y = 1$ y $t: x = 1 + 2\lambda, y = 3\lambda, z = -1 + \lambda$. Halla la recta que corta a r y a s y es paralela a t .

Recta r paralela a un plano π y que corta a dos rectas s y t

Determina una recta que sea paralela al plano de ecuación $x + y + z = 3$, que corte a la recta de ecuaciones $x = 0, z = 0$, y que también corte a la recta de ecuaciones $z = 1, y = 0$.

Recta r perpendicular a un plano π y que corta a dos rectas s y t



Tomamos un punto genérico P_λ de s y otro punto Q_μ de t y exigimos que el vector $\vec{P_\lambda Q_\mu}$ sea paralelo a un vector normal del plano π , \vec{n}_π .

Llegamos así a un sistema de ecuaciones con incógnitas λ y μ .

- Si el sistema tiene solución los valores obtenidos se sustituyen en P_λ y en Q_μ dando lugar a dos puntos P y Q. Entonces, $r(P; \vec{PQ})$.

- Si el sistema no tiene solución entonces no es posible que haya una recta que cumpla lo que se pide.

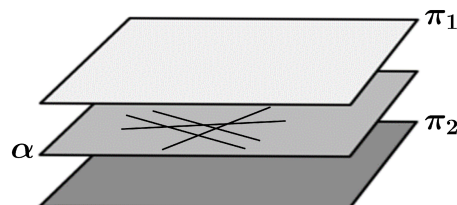
Actividades

2004-5 Considera las rectas $r: \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

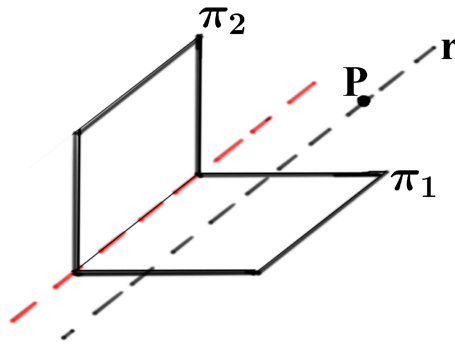
Halla la ecuación de una recta que corte a r y s y sea perpendicular al plano $z = 0$.

Recta r que pasa por un punto P y es paralela a dos planos distintos π_1 y π_2

- Si los planos son paralelos hay infinitas rectas: cualquier recta que pase por P y está contenida en el plano α que pasa por P y es paralelo a los planos π_1 y π_2 .



- Si los planos son secantes, sean \vec{n}_1 y \vec{n}_2 los vectores normales de π_1 y π_2 , respectivamente.



Entonces, la recta r que se pide pasa por P y tiene de vector director $\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

Actividades

Calcula la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 0, 2)$ y es paralela a los planos $x - 2y + 3z + 1 = 0$ y $2x - 3y + z + 6 = 0$

Calcula la ecuación de la recta que pasando por el origen es paralela al plano $x - 2y + z = 1$ y al plano que pasa por los puntos $(2, 0, 1)$; $(0, 2, 1)$ y $(1, -1, 0)$. Sol.: $(x,y,z)=\lambda(1, 1, 1)$

Sean α el plano que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$; $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$, y β : $x + 2y + 3z = 0$.

a) Comprueba que el punto $P(0, 1, 0)$ no pertenece a ninguno de los planos

b) Halla la ecuación de la recta r paralela a los dos planos que pasa por P . Sol.: $(x,y,z)=(0, 1, 0)+\lambda(1, -2, 1)$

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta $\{2x + 3y - z = -1, x - y + 3z = 4\}$.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 5 - 7t \end{cases}$$

Calcula la ecuación de la recta que pasa por $(0, 2, -1)$ y es paralela a la recta

Sol.: $(x,y,z)=(0,2,-1)+\lambda(2,3,-7)$

Calcula la ecuación de la recta paralela a $(x, y, z)=(1, 2, 3) + t(4, 5, 6)$ que pasa por el origen de coordenadas.

Calcula la ecuación de las rectas que pasan por el punto $(2, 3, 4)$ y son paralelas a cada uno de los ejes.

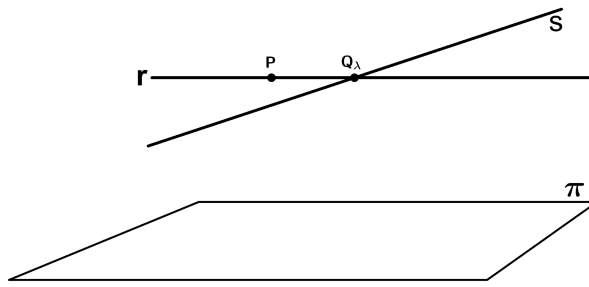
Sean los puntos $A(1, 3, 2)$, $B(2, 5, 1)$ y $C(3, 0, -4)$. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto C y es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B . Sol.: $(x,y,z)=(3,0,-4)+\lambda(1,2,-1)$

2007-3 Considera los planos de ecuaciones $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$.

Determina la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.

2007-9 Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de ecuación $x + y + z = 3\sqrt{3}$ y π_2 de ecuación $-x + y + z = 2$.

Recta r que pasa por un punto P, es paralela a un plano π y corta a otra recta s



Tomamos un punto genérico Q_λ de s y exigimos que el vector \vec{PQ}_λ sea paralelo a π , o lo que es lo mismo, que $\vec{PQ}_\lambda \perp \vec{n}_\pi$. Llegamos así a una ecuación de incógnita λ .

- Si tiene solución, el valor obtenido se sustituye en Q_λ dando lugar a un punto Q. Entonces, $r(P; \vec{PQ})$.
- Si no tiene solución, no es posible que haya una recta que cumpla lo que se pide.

Actividades

Consideramos el punto $A(1, 4, 2)$, la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$. Calcula la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

2011-4 Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones $3x - y + z - 4 = 0$; $x - 2y + z - 1 = 0$ y $x + z - 4 = 0$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 1, -1)$, es paralela al plano π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 y π_3 .

2009-7 Considera el punto $P(1, 0, -2)$, la recta r definida por $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$

y el plano π de ecuación $2x + y + 3z - 1 = 0$

Halla la ecuación de la recta que pasa por P, corta a r y es paralela a π

2009-9 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 1, -1)$, es paralela al plano de ecuación $x - y + z = 1$ y corta al eje Z

2006-12 Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuación $x = y = z$, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto $A(1, 2, -1)$

2005-9 Considera el punto $A(0, -3, 1)$, el plano $\pi : -2y + 3z = 0$ y la recta $r : x + 3 = y = \frac{z-3}{2}$

Determina la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

2004-2 Considera el punto $A(0, 1, -1)$, la recta $r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - z = -4 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - 2y - z = 2$.

Halla la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

2003-3 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 1, -1)$, es paralela al plano $3x - y + z = 4$ y corta a la recta intersección de los planos $x + z = 4$ y $x - 2y + z = 1$.

Determina una recta que sea paralela al plano de ecuación $x + y + z = 3$, que corte a la recta de ecuaciones $x = 0, z = 0$, y que también corte a la recta de ecuaciones $z = 1, y = 0$.

Considera los planos $\pi_1: 3x - y + z - 4 = 0$; $\pi_2: x - 2y + z - 1 = 0$ y $\pi_3: x + z - 4 = 0$
 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 1, -1)$, es paralela al plano π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 y π_3 .

Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ es paralela al plano $\pi \equiv x - 2y - z = 0$ y está en un mismo plano que la recta $s \equiv \{3x - y + z = 0, x + 2y - z - 2 = 0\}$.

¿Cuál es la ecuación de la recta s que pasa por un punto $A(-1, -1, -1)$, es paralela al plano

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} ?$$

$\pi: 2x - 3y - z = 0$ y está situada en el mismo plano que la recta r :

Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(1,1,1)$ es paralela al plano $\pi \equiv x-2y-z=0$ y está en

$$x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} .$$

un mismo plano que la recta $s \equiv$

Solución.

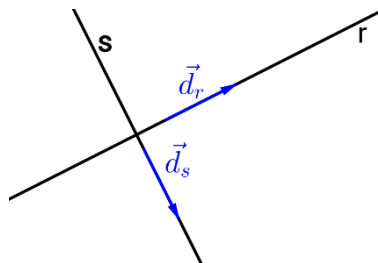
- 1) Plano π' que contiene a A y a s .
- 2) $\pi \cap \pi' =$ recta t paralela a r .
- 3) La recta t es $t \equiv (x,y,z) = (1,1,1) + (1,0,1)t$.

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4,5,0)$, es paralela al plano π de ecuación

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

$x+2y-3z = 1$ y corta a la recta r dada por

Recta r que pasa por un punto P y corta perpendicularmente a otra recta s



Tomamos un punto genérico Q_λ de s y exigimos que el vector \vec{PQ}_λ sea perpendicular a s , o lo que es lo mismo, que $\vec{PQ}_\lambda \cdot \vec{d}_s = 0$. Llegamos así a una ecuación de incógnita λ .

La solución de la ecuación se sustituye en Q_λ dando lugar a un punto Q . Entonces, $r(P; \vec{PQ})$.

De otra forma:

- Calculamos la ecuación del plano π que pasa por A y es perpendicular a s
- Hallamos el punto de corte del plano y la recta, B

- La recta que buscamos, r, es la que pasa por A y B

Actividades

Halla la ecuaciones de la recta r, que contiene al punto P(3,-5, 4) y corta perpendicularmente

$$s \equiv \frac{x - 4}{5} = \frac{y - 8}{-3} = \frac{z}{4}$$

a la recta

Calcular unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P(3, -1, 0) y corta

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

perpendicularmente a la recta :

$$r : \frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{z}{6}$$

Considera el punto P(5, -2, 9) y la recta

a) Calcula la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por P.

b) Halla el punto de corte de las dos rectas.

Solución:

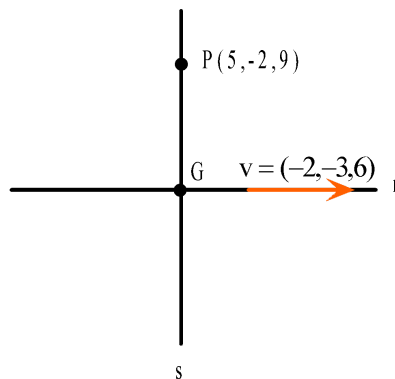
a) Expresamos r en paramétricas y tomamos un punto genérico de la misma:

$$G(1 - 2\lambda, -1 - 3\lambda, 6\lambda)$$

Como el producto escalar de \vec{PG} y v ha de ser nulo, obtenemos $\lambda = 1$

Obtenido \vec{PG} , la ecuación de la recta s

$$\text{será: } \frac{x - 5}{-6} = \frac{y + 2}{-2} = \frac{z - 9}{-3}$$



b) Punto de corte: G(-1,-4,6)

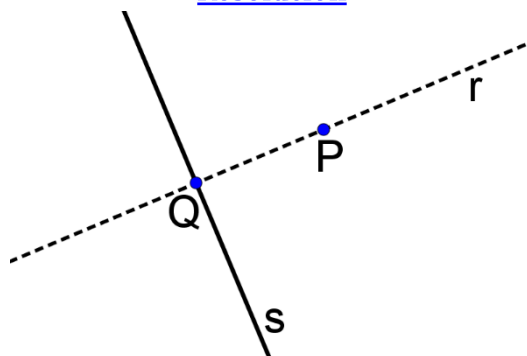
Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto C(1, 1, 1) y corta perpendicularmente a la recta determinada por los puntos A(1, -1, 2) y B(2, 1, -1).

2015-3 Halla unas ecuaciones paramétricas para la recta r, que contiene al punto

$$s \equiv \frac{x - 4}{5} = \frac{y - 8}{-3} = \frac{z}{4}$$

P(3, -5, 4) y corta perpendicularmente a la recta

Resolución



Sea Q un punto cualquiera de s, $Q(4 + 5\lambda, 8 - 3\lambda, 4\lambda) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \vec{d}_s \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d}_s = 0$

Dado que $\overrightarrow{PQ} = (1 + 5\lambda, 13 - 3\lambda, 4\lambda - 4)$, $\vec{d}_s = (5, -3, 4)$

$$(1 + 5\lambda)5 + (13 - 3\lambda)(-3) + (4\lambda - 4)4 = 0 \Rightarrow 50\lambda - 50 = 0 \Rightarrow \lambda = 1. \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (6, 10, 0) \parallel (3, 5, 0)$$

La recta r pasa por $P(3, -5, 4)$ y un vector director es $\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ} = (3, 5, 0)$, luego $r: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -5 + 5\lambda \\ z = 4 \end{cases}$

2007-10 Considera el punto $P(1, 0, -2)$ y la recta r definida por $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{cases}$
 Determina la recta perpendicular a r que pasa por P.

$$r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{6}$$

Considera el punto $P(5, -2, 9)$ y la recta

- a) Calcula la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por P.
- b) Halla el punto de corte de las dos rectas.

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z \quad \text{Sol.: } (x, y, z) = (2, 1, 1) + \lambda(1, 1, -4)$$

Halla la ecuaciones de la recta r, que contiene al punto $P(3, -5, 4)$ y corta perpendicularmente

$$s \equiv \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4}$$

a la recta

2017-1 Considera la recta r dada por $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{cases}$ y el punto $P(-3, 1, 6)$.

- (a) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r.
- (b) Encuentra la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por P.

Resolución

(a) Como r viene dada como intersección de dos planos, un vector director de r es el producto vectorial de los vectores normales a los planos

$$\vec{d}_r = (2, -1, 0) \times (2, 1, -4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (4, 8, 4) \parallel (1, 2, 1). \text{ Tomamos como } \vec{d}_r = (1, 2, 1)$$

Calculamos un punto de r . Por ejemplo si $x=0$ sustituyendo $\begin{cases} 2 \cdot 0 - y = 5 \\ 2 \cdot 0 + y - 4z = 7 \end{cases} \rightarrow y = -5, z = -3$

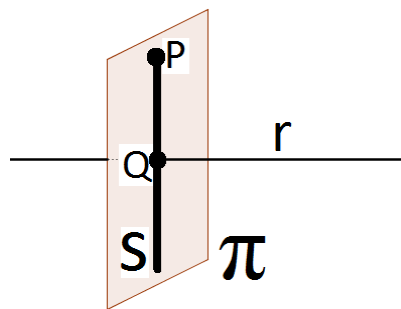
Luego, $A(0, -5, -3) \in r$. Unas ecuaciones paramétricas de r serían $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$

(b) Para hallar la recta s :

1º) Hallamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r

2º) Calculamos el punto de corte, Q , entre r y π

3º) Determinamos la recta s usando que s pasa por P y por Q



1º) $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r = (1, 2, 1)$; $P(-3, 1, 6) \in \pi \rightarrow \pi: 1(x+3) + 2(y-1) + 1(z-6) = 0 \rightarrow \pi: x + 2y + z - 5 = 0$

2º) Hallamos Q resolviendo el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de r y la ecuación de π : $\lambda + 2(-5 + 2\lambda) + (-3 + \lambda) - 5 = 0 \rightarrow \lambda - 10 + 4\lambda - 3 + \lambda - 5 = 0 \rightarrow 6\lambda - 18 = 0 \rightarrow \lambda = 3$.

Luego $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 + 2 \cdot 3 \\ z = -3 + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. Por tanto, $Q(3, 1, 0)$

3º) Hallamos las ecuaciones de la recta s : $Q(3, 1, 0) \in s$, $\vec{PQ} = (3, 1, 0) - (-3, 1, 6) = (6, 0, -6) \parallel (1, 0, -1)$

Tomamos $\vec{d}_s = (1, 0, -1) \Rightarrow s: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 \\ z = -k \end{cases}, \text{ con } k \in \mathbb{R}$

2014-4 Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, -1, 3)$.

Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

Recta que corta a una recta y es paralela a otra recta

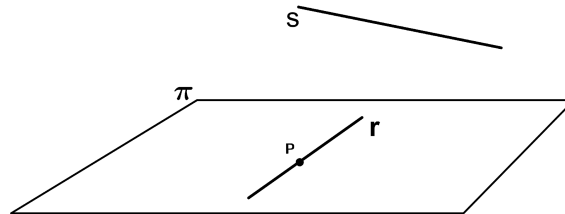
$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Halla la recta que corta a $r \equiv x = y = z$ y a $s \equiv x = 2 \quad y = 1$ y es paralela a

Recta r que pasa por un punto P, contenida en un plano π y perpendicular a otra recta s

- Si s es perpendicular a π cualquier recta r contenida en π que pase por P es solución

- Si s no es perpendicular a π , la recta que se pide pasa por P y tiene vector director $\vec{d}_r = \vec{d}_s \times \vec{n}_\pi$



Actividades

Halla la ecuación de la recta contenida en el plano $y + z = 0$, que es perpendicular a r: $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y pasa por $P(1, 1, -1)$.

Halla la ecuación de la recta, s, que pasa por $P(2, 1, -1)$, está contenida en el plano $\pi: x - 3y - 3z = 2$, y

es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{cases}$ Sol: $(x,y,z) = (2, 1, -1) + \lambda(0, 1, -1)$

De una recta r se sabe que está contenida en el plano de ecuación $x - y = 0$, que $(0, 0, 0)$ pertenece a r, y que el vector $(0, 0, 1)$ es perpendicular a r. Determina la ecuación de la recta r. Sol: $(x,y,z) = \lambda(1, 1, 0)$

2011-6 Dados el punto $P(1, 1, -1)$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y + z = 0$, que es perpendicular a r y pasa por P.

2007-6 Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x + 2y + 3z - 1 = 0$ que corta

perpendicularmente a la recta definida por $\begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ en el punto $(2, 1, -1)$.

Calcula la ecuación de la recta, s, que pasa por $P(2, 1, -1)$, está contenida en el plano $\pi: x - 3y - 3z = 2$

y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{cases}$

Como $s \subset \pi \Rightarrow d_s \perp n_\pi$ Podemos tomar como $d_s = d_r \times n_\pi$
 Como $s \perp r \Rightarrow d_s \perp d_r$

Como $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$, $d_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 1, 1)$; $n_\pi = (-1, 3, 3)$

Observa que r y π son secantes no perpendiculares pues $d_r \not\perp n_\pi$ ni $d_r \perp n_\pi$

$d_s = d_r \times n_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (0, -7, 7) \wedge (0, -1, 1)$ y como $P(2, 1, -1) \in s \Rightarrow s: (x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(0, -1, 1)$

Se considera el triángulo $A(1, 4, 2)$ $B(3, 1, -1)$ $C(-2, 3, 5)$. Halla la recta contenida en dicho plano que, pasando por el punto medio del segmento AB , es perpendicular a dicho segmento.

Halla la ecuación de la recta contenida en el plano $y + z = 0$, que es perpendicular a $r: \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y pasa por $P(1, 1, -1)$.

Recta paralela a un plano y corta perpendicularmente a otra recta en un punto dado

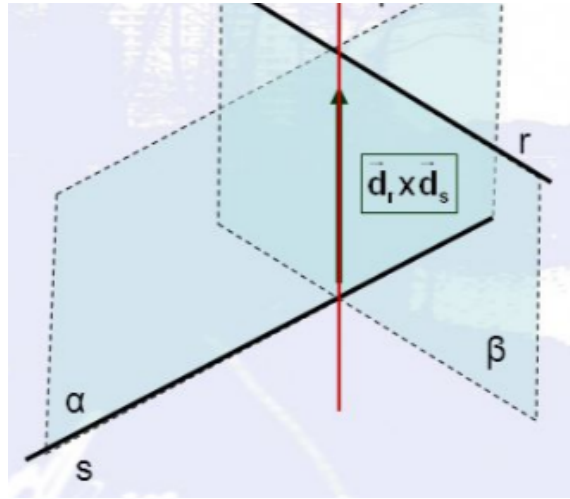
Calcula la ecuación de la recta paralela al plano $x + z = 2$ y corta perpendicularmente a la recta

$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$ en el punto $(-2, 2, 0)$. Sol: $(x, y, z) = (-2, 2, 0) + \lambda(1, 0, -1)$

Recta contenida en un plano, paralela a otro plano y corta a otra recta

2008-8 Sea la recta r definida por $\begin{cases} x = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ y sean los planos π_1 , de ecuación $x + y + z = 0$, y π_2 , de ecuación $y + z = 0$. Halla la recta contenida en el plano π_1 , que es paralela al plano π_2 y que corta a la recta r .

Recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan perpendicularmente



- Se calcula el plano α perpendicular a r y que contiene a s
- Se calcula el plano β perpendicular a s y que contiene a r

La recta perpendicular común es $t = \alpha \cap \beta$

Si r y s no fuesen perpendiculares $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_s \times \vec{d}_t$, $\vec{n}_\beta = \vec{d}_r \times \vec{d}_t$, siendo $\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s$

Actividades

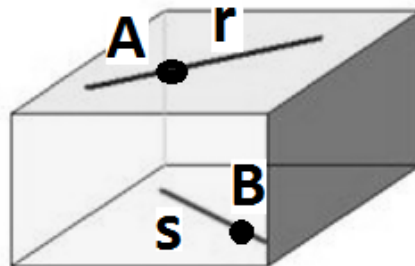
$$s \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{z-1}{2} \quad y \quad t \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$$

Halla la perpendicular común a

2016-7 Sea "r" la recta dada por $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ y sea "s" la recta definida por $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$
 Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

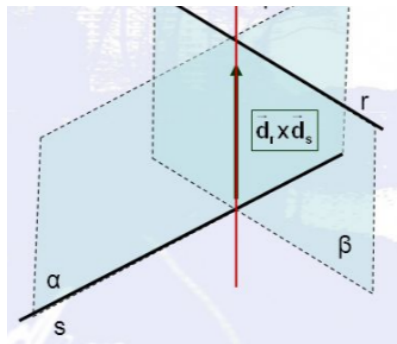
Resolución

$$\vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1) ; A(0, -1, 1) \in r ; \quad \vec{d}_s = (1, 0, 2) ; B(2, 2, 2) \in s ; \quad \vec{AB} = (2, 3, 1)$$



Se cruzan cuando los vectores \vec{d}_r , \vec{d}_s y \vec{AB} son l.i.; veámos si lo son:

$$\det \begin{bmatrix} \vec{d}_r & \vec{d}_s & \vec{AB} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \vec{d}_r, \vec{d}_s \text{ y } \vec{AB} \text{ son l.i., luego } r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$



Sea t la recta que las corta perpendicularmente. $\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0,3,0) \wedge (0,1,0)$

α pasa por $B(2,2,2)$ y su vector normal es $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_s \times \vec{d}_t = (-2,0,1) \Rightarrow \alpha: -2(x-2) + 0(y-2) + 1(z-2) = 0$

β pasa por $A(0,-1,1)$ y su vector normal es $\vec{n}_\beta = \vec{d}_r \times \vec{d}_t \wedge (1,0,1) \Rightarrow \beta: 1(x-0) + 0(y+1) + 1(z-1) = 0$

$$t: \begin{cases} -2x + z + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

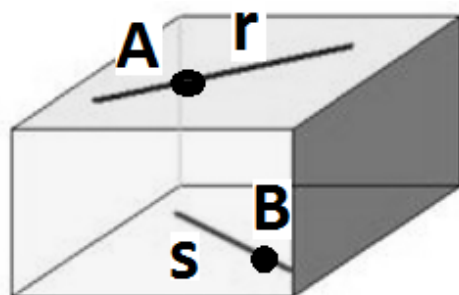
2015-5 Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y s la recta dada por $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$
 Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.

Resolución

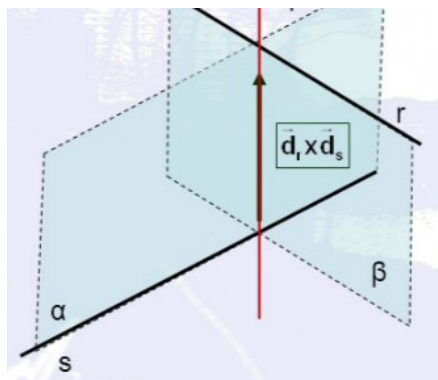
$\vec{d}_r = (0,0,1) ; A(1,1,-2) \in r$

$\vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,0) \wedge (1,1,0) ;$ Por ejemplo, dando $y = 0 \rightarrow x = 1$, luego $B(1,0,-1) \in s$

$\vec{AB} = (0,-1,3)$



$$\det \begin{bmatrix} \vec{d}_r & \vec{d}_s & \vec{AB} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan perpendicularmente}$$



Sea t la recta que las corta perpendicularmente. Calculamos: $\begin{cases} \text{Plano } \alpha \text{ que contiene a } s \text{ y es perpendicular a } r \\ \text{Plano } \beta \text{ que contiene a } r \text{ y es perpendicular a } s \end{cases} \Rightarrow t = \alpha \cap \beta$

α pasa por $B(1,0,-1)$ y su vector normal es $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_r = (0,0,1) \Rightarrow \alpha: 0(x-1) + 0(y-0) + 1(z+1) = 0$

β pasa por $A(1,1,-2)$ y su vector normal es $\vec{n}_\beta = \vec{d}_s = (1,1,0) \Rightarrow \beta: 1(x-1) + 1(y-1) + 0(z+2) = 0$

$$t: \begin{cases} z+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$$

2014-5 Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y s la recta dada por $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$
 Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

2009-5 Se considera la recta "r" definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y la recta "s" definida por $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$
 Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

2004-4 Halla la perpendicular común a las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 1 \\ z = -1 \end{cases}$

2003-10 Halla la perpendicular común a las rectas $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$ y $\begin{cases} x = \beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 0 \end{cases}$

2000-5 Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas

respectivamente por
$$x-1 = y-2 = \frac{z-1}{-2} \quad y \quad \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

Halla la recta que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -2x + 2y - z = 3 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Hallar la recta que pasa por el punto (1, 0, 2) y que corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 3y - 6 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$

De los planos que contienen a la bisectriz del cuadrante positivo del plano coordenado XY, determina la ecuación del que contiene al eje OZ.

Dados los planos $\alpha : x + y - 5z = -4$, $\beta : 3x - y + 2z = 1$.

- Estudia la posición relativa de ambos planos.
- Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A (1 , 1 , 1) y es paralelo al plano α .
- Halla el punto de intersección de la recta : $x = 2t$, $y = 3t + 1$, $z = t$ con el plano β .

Las rectas $r : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ se cruzan en el espacio.

Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas. Halla un punto de r y otro punto de s tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro, sea perpendicular a ambas rectas.

¿Cuál es la perpendicular común a las rectas r: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$ y s: $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{-3}$?

Halla la perpendicular común a $s \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{z-1}{2}$ y $t \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$

Dadas las rectas $r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad y \quad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$

a) Halla un punto de cada una de ellas, de tal forma, que el vector que los una sea perpendicular a ambas.

Sol.: $P(5, 1, 6) \in r$, $Q(2, -5, 6) \in s$

b) Calcula la ecuación de la recta que las corta perpendicularmente Sol.: $(x,y,z) = (5, 1, 6) + \lambda(1, 2, 0)$

Calcula la perpendicular común a las rectas: $r \equiv \{x + 2y - z = 1, x - y = 1\}$, $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-3}$

Considera las rectas $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$

a) Comprueba que r y s son secantes.

b) Obtén la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s. Sol: $(x,y,z)=(2, -2, 1)+\lambda(1, 1, 0)$

$$r \equiv \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$$

Dadas las rectas

Para $a = 1$, calcula la recta que pasa por $(1, 1, 1)$ y se apoya en r y s.

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x - y + z = -8 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Dadas las rectas:

Halla las ecuaciones de la recta que corta a las dos y pasa por el punto $P(3,5,4)$.

Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1,-1,2)$ y se apoya en las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en las rectas:

$$r: x = 2y = z - 1, \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z \quad \text{Solución.} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

VARIADO

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - \mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = 3 + \mu \end{cases}$$

Sean las rectas

a) Si P es un punto genérico de la recta r, hallar en función de λ las coordenadas del punto Q de s tal que la recta PQ es paralela al plano $x + y + z = 3$.

b) Hallar el lugar geométrico que describe el punto medio del segmento PQ.

Dado el plano π de ecuación $x + 2y + 3z - 1 = 0$, la recta r de ecuación $r: \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{cases}$ y el punto $P(2, 1, 1)$, calcula:

a) Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a π

b) Ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r

$$\text{Considera las rectas} \quad r: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

a) Obtén la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. Sol: $x=0$

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a s. Sol: $z=0$

c) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s. Sol: $(x,y,z)=\lambda(1, 0, 0)$

Sea π el plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,1,1)$. Sea A el punto $(1, 2, 3)$ y sea B el simétrico de A respecto del plano π .

- a) Halla la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento AB.
- b) Halla la recta paralela a la anterior que pasa por el punto $(2,2,2)$.

$$r: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - ay + 3z = 4 \end{cases}; \quad s: \begin{cases} 3x - 3y + 4z = 7 \\ 5x - (a + b)y + 7z = 8 + b \end{cases}$$

En el espacio afín se consideran las rectas donde a y b son números reales. Discutir, según los valores de a y b la posición relativa de r y s.

- i) Escribe las ecuaciones de una recta contenida en el plano π : $x + y + z = 1$.
- ii) Y que además pase por el punto $P = (1, 0, 0)$.
- iii) Y que además sea perpendicular al plano π' : $x - 2y + z = 3$.
- iv) Escribe la ecuación de un plano que corte a π en la recta que has obtenido en iii).

¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?

- i) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas de R^3 se corten en un punto es que sean coplanarias.
- ii) Si dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares, entonces toda recta contenida en π_1 es perpendicular a toda recta contenida en π_2 .
- iii) Si la recta r es perpendicular al plano π , entonces es perpendicular a toda recta contenida en π .
- iv) Si los planos π_1 y π_2 se cortan a lo largo de una recta, entonces no existen rectas paralelas $r_1 \subset \pi_1$ y $r_2 \subset \pi_2$.

Halla el lugar geométrico de los puntos desde los que se ven los puntos $A(5, 3, 4)$ y $B(7, 1, 2)$ bajo un ángulo recto. (similitud con el mismo problema en el plano)

Dada la recta $r: \{x = 1, y = 3\}$ y el plano $p: x + y + z = 0$, halla el plano que contenga a r y corte a p en una recta paralela al plano OXY

Dadas las rectas $r: x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$, $r': \begin{cases} y + z + 2 = 0 \\ y + x + 2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$

- a) Calcular el plano que contiene a r y es paralelo a la recta r'.
- b) Calcular el plano que contiene a r y es perpendicular al plano π .

- a) ¿Cuántas rectas hay paralelas al plano $2x - y + 3z = 4$ y que pasen por el punto $P(1, 0, 1)$
- b) ¿Cuántos planos hay que sean perpendiculares al plano y que pasen por P? Escribir la ecuación de uno de ellos que además sea paralelo a uno de los ejes coordenados.

Dados los planos a: $2x - z = 3$, b: $x - y + 2z = 1$, se pide :

¿Cuántas rectas hay paralelas a ambos a la vez?

De ellas escribe la ecuación de la que pasa por el origen de coordenadas.

Halla la ecuación del plano simétrico de a respecto al origen de coordenadas.

Dada la familia de planos $2mx + (m+1)y - 3(m-1)z + 2m + 4 = 0$

Calcula la ecuación del plano de esta familia que pasa por el punto $(1, -1, 2)$

$$s \equiv \begin{cases} x + 3z - 1 = 0 \\ y - 5z - 2 = 0 \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano de esta familia perpendicular a la recta

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} y = x + 3 \\ z = 2x + 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y = -1/2 \\ x = 2z + 3 \end{cases}$ decir si existen, y hallar en ese caso:

- a) El plano paralelo a la recta s que contenga a la recta r .
- b) El plano perpendicular a s que contenga a r .
- c) La recta de dirección perpendicular a ambas que pasa por el origen.

Dado el plano π de ecuación $x + 2y + 3z - 1 = 0$, la recta r de ecuación $r: \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{cases}$ y el punto $P(2, 1, 1)$, calcula:

- a) Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a π
- b) Ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r

Solución:

a) El vector normal del plano es un vector director de la recta, es decir, $v = (1, 2, 3)$
 Y teniendo en cuenta que la recta pasa por $P(2, 1, 1)$,

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$$

b) En la recta r , hacemos $z = \lambda$ y queda de la siguiente forma:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El vector director de la recta es un vector característico del plano buscado.

$$2x + y + z + D = 0$$

Como el plano contiene al punto $P(2, 1, 1)$, $2 \cdot 2 + 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -6$

Ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r : $2x + y + z - 6 = 0$

Dada la recta $r: \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ y el punto $P(1, 3, 1)$

(a) Averigua si el punto P pertenece a r Solución: $P \notin r$

(b) Calcula un vector director de r Solución: $(0, 1, 1)$

$$\text{Solución: } r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r

(d) Determina la ecuación general del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r

Solución: $A(2, 1, 0) \in r$, El plano es el que pasa por $P(1, 3, 1)$ y tiene vector normal $n = AP \times d_r$. La ecuación es: $x + y - z - 3 = 0$

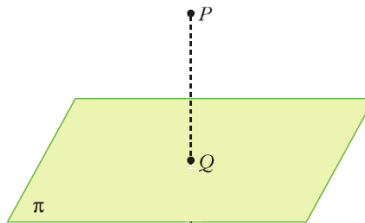
Considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 1$.
 Halla el punto de π más próximo al punto $(3, 1, 2)$.

Solución

El punto más próximo a $P(3, 1, 2)$ es el punto Q (proyección ortogonal de P sobre π)

1º) Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular a π

2º) Calculamos el punto de corte, Q , entre r y π



1º) $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1, 2, 1)$; $P(3, 1, 2) \in r \rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

2º) Hallamos Q resolviendo el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de r y la ecuación de π :
 $3 + \lambda + 2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) = 1 \rightarrow 3 + \lambda + 2 + 4\lambda + 2 + \lambda = 1 \rightarrow 6\lambda + 7 = 1 \rightarrow \lambda = -1$.

Luego $\begin{cases} x = 3 - 1 \\ y = 1 + 2(-1) \\ z = 2 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$. Por tanto, $Q(2, -1, 1)$

Dada la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

- a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.
- b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

Solución:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

Dado que la recta es $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$, un punto de la misma será (1, -1, 2), siendo el vector director $u = (2, 3, 1)$.

Apartado a)

$$\text{Det}(x-0, A0, u) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7x - 3y - 5z = 0$$

Es decir, el plano que pasa por el origen y contiene a la recta r es:

$$7x - 3y - 5z \equiv 0$$

Apartado b)

El vector normal del plano $u = (2, 3, 1) = n$, coincide con el vector director puesto que el plano es perpendicular a la recta.

Un plano perpendicular a la recta sería $2x + 3y + z + C = 0$, como pasa por el punto (0, 0, 0) entonces $0 + 0 + 0 + C = 0$. Por tanto, $C = 0$.

El plano será por tanto: $2x + 3y + z \equiv 0$

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$, determina una recta que corte al eje OZ, a las dos dadas, y sea paralela al plano OXY.

Para $a \neq 0$ se consideran los planos $-x + 2ay - 2az = 0$ y $x + ay - az = 0$.

- Hallar la posición relativa de ambos planos en función de a .
- Determinar la recta paralela a ambos pasando por el punto $(0,0,0)$.
- ¿Existe el plano paralelo a ambos pasando por $(0,0,0)$? Razonar la respuesta.

Hallar el valor del parámetro "a" para que los planos de ecuaciones:
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + az = 4 \end{cases}$$
 se corten en una recta r. Obtén la ecuación del plano que pasa por el punto P $(2, 1, 3)$ y contiene a la recta r del apartado anterior.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$.

- Escríbese la recta en forma paramétrica
- Para cada punto P de r, determínese la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ

Sea m un número real y sean r y π la recta y el plano dados respectivamente por

$$r \equiv \begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}, \pi \equiv 3x + 2z = 2 - m = 0$$

- Estúdiase la posición relativa de r y π en función del valor de m
- Para el valor $m=1$, hállese la ecuación del plano que pasa por el punto de corte de r y π y es perpendicular a la recta $t \equiv x = y = z$.

Calcúlense los valores de a para los cuales las rectas $r \equiv \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$ son perpendiculares.

Para $a = 1$, calcúlese la recta que pasa por $(1,1,1)$ y se apoya en r y s.

Dados el punto $A(3,5,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z+1}{4}$, hállese el punto B perteneciente a r tal que el vector de extremos A y B es paralelo al plano π de ecuación $3x - 2y + z + 5 = 0$.

Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{cases}$.

- Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.
- Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Dado el plano $\pi \equiv x + 3y - z = 1$ y la recta $r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ se pide:

- Hallar la ecuación general del plano π' , que contiene a r y es perpendicular a π .
- Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π' .

Se consideran el plano $\pi \equiv x + y - 2z = 6$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

- a) Hallar el punto simétrico de M(1,1,1) respecto del plano.
- b) Hallar el punto simétrico de M(1,1,1) respecto de la recta.

Sean las rectas $r \equiv x - 2 = \frac{y-1}{k} = \frac{z+1}{-2}$ $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

- a) Hallar k para que r y s sean coplanarias.
- b) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
- c) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = 3 - \mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = 3 + \mu \end{cases}$

- a) Si P es un punto genérico de la recta r, hallar (en función de λ) las coordenadas del punto Q de s tal que la recta PQ es paralela al plano $x + y + z = 3$
- b) Hallar el lugar geométrico que describe el punto medio del segmento PQ.

Dados el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 10)$, se pide:

- a) Hallar la ecuación de una recta s que sea perpendicular a r y pase por P.
- b) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.
- c) Hallar el punto P'', simétrico de π .
