

1.- Sean dos sucesos, A y B, tales que $p(A) = 0,5$, $p(B) = 0,4$ y $p(A/B) = 0,5$

a) Halle la probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

Resolución

Como $p(A/B) = 0,5 = p(A)$ entonces A y B son independientes.

Luego, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$

Se pide $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$

b) Calcule la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.

Resolución

Como A y B son independientes, también lo son A y B^c .

Se pide $p(B^c/A) = p(B^c) = 1 - p(B) = 1 - 0,4 = 0,6$

c) ¿Son independientes los sucesos A y B? Razone la respuesta.

Resolución Ya hecho en el a)

2.- Una compañía aseguradora realiza operaciones de seguros médicos y de seguros de vida. El 20% de las operaciones corresponde a seguros médicos y el resto a seguros de vida. El porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos es del 10% en los seguros médicos y del 15% en seguros de vida.

a) Halle el porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos.

Resolución

Sean los sucesos M = “La operación es un seguro médico” V = “La operación es un seguro de vida”

R = “En la operación se producen retrasos en los pagos”

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	M	V	Total
R	$20\% - 2\% = 18\%$	$80\% - 12\% = 68\%$	86%
R^c	$10\% \text{ del } 20\% = 2\%$	$15\% \text{ del } 80\% = 12\%$	14%
Total	20%	$100\% - 20\% = 80\%$	100%

Como $p(R^c) = 14\%$, en el 14% de las operaciones no se producen retrasos en los pagos

b) De las operaciones que han sufrido retrasos en los pagos, ¿qué porcentaje corresponde a los seguros de vida?

Resolución

Como $p\left(\frac{V}{R}\right) = \frac{p(V \cap R)}{p(R)} = \frac{68\%}{86\%} \cong 0,7907 = 79,07\%$, el 79,07% de las operaciones son seguros de vida

3.- Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda.

a) Construya el espacio muestral de este experimento aleatorio.

Resolución

Espacio muestral: $E = \{1c, 2c, \dots, 6c, 1x, 2x, \dots, 6x\}$. Hay 12 casos posibles

b) Determine la probabilidad del suceso A: “El jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda”.

Resolución

$A = \{2x, 4x, 6x\}$ (3 casos favorables. Por la regla de Laplace, $p(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$)

c) Si sabemos que en la moneda ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado haya salido más de 3 puntos?

Resolución

Sean los sucesos $B = \text{“salir cara”} = \{1c, 2c, \dots, 6c\}$ y $C = \text{“salir más de 3 puntos”} = \{4c, 5c, 6c, 4x, 5x, 6x\}$

Observamos que $B \cap C = \text{“salir cara y más de 3 puntos”} = \{4c, 5c, 6c\}$

$$\text{Se pide } p\left(\frac{C}{B}\right) = \frac{p(C \cap B)}{p(B)} = \frac{3/12}{6/12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

4.- Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación, Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.

a) Calcule la probabilidad de que gane Ana.

Resolución

Sean los sucesos $B = \text{“la bola es blanca”}$, $R = \text{“la bola es roja”}$ y $N = \text{“la bola es negra”}$

Como la bola se devuelve a la bolsa, hay independencia de los sucesos.

Ana gana si las dos bolas extraídas tienen el mismo color.

$$p(\text{gane Ana}) = p(BB) + p(RR) + p(NN) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{50}{144} = \frac{25}{72} \cong 0,3472 = 34,72\%$$

b) Calcule la probabilidad de que gane Manolo.

Resolución

Manolo gana si sólo hay una bola blanca.

$$p(\text{gane Manolo}) = p(BR) + p(BN) + p(RB) + p(NB) = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{70}{144} = \frac{35}{72} \cong 0,4861 = 48,61\%$$

c) Calcule la probabilidad de que haya empate.

Resolución

$$p(\text{haya empate}) = p(RN) + p(NR) = \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{12} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6} \cong 0,1667 = 16,67\%$$

5.- En una ciudad, el 55% de la población consume aceite de oliva, el 30% de girasol, y el 20% ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:

a) Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol?

Resolución

Sean los sucesos $A = \text{"Consumir aceite de oliva"}$ $B = \text{"Consumir aceite de girasol"}$

Según el enunciado, $p(A) = 0,55$ $p(B) = 0,3$ $p(A \cap B) = 0,2$

$$\text{Se pide } p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,2}{0,55} \cong 0,3636 = 36,36\%$$

b) Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva?

Resolución

$$\text{Se pide } p\left(\frac{A^c}{B}\right) = \frac{p(A^c \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,3 - 0,2}{0,3} = \frac{0,1}{0,3} \cong 0,3333 = 33,33\%$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite?

Resolución

$$\text{Calculamos } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,55 + 0,3 - 0,2 = 0,65$$

$$\text{Por una de las leyes de Morgan, } p(A^c \cap B^c) = p[(A \cup B)^c] = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,65 = 0,35 = 35\%$$

6.- El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión y de los que sí lo están, solamente un 5% fueron reparados anteriormente. Se elige un aparato al azar en el servicio técnico:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido reparado en otra ocasión?

Resolución

Sean los sucesos

$G = \text{"El aparato está en garantía"}$ $R = \text{"El aparato fue reparado anteriormente por el servicio técnico"}$

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	G	G ^c	Total
R	5% del 30% = 1,5%	20% del 70% = 14%	15,5%
R ^c	30% - 1,5% = 28,5%	70% - 14% = 56%	84,5%
Total	30%	100% - 30% = 70%	100%

$$\text{Se pide } p(R) = 15,5\%$$

b) Si es la primera vez que ha llegado al servicio técnico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en garantía?

Resolución

$$\text{Se pide } p\left(\frac{G}{R^c}\right) = \frac{p(G \cap R^c)}{p(R^c)} = \frac{28,5\%}{84,5\%} = \frac{28,5}{84,5} \cong 0,3373 = 33,73\%$$

7.- (prueba ordinaria) En una primera bolsa se han colocado 4 bolas blancas y 3 negras, y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y, sin verla, se introduce en la segunda. A continuación, se saca una bola de la segunda. Halle la probabilidad de que:

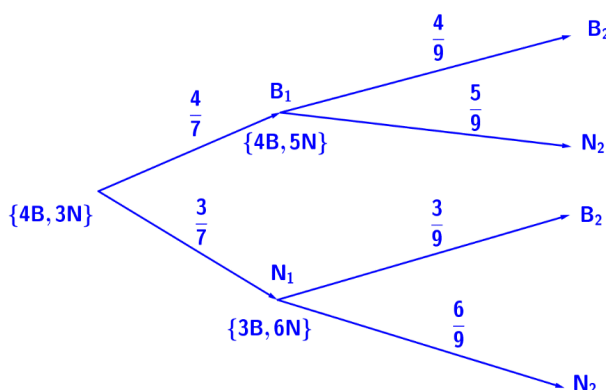
a) La bola extraída de la segunda bolsa sea negra.

Resolución

B_1 = “La bola de la 1ª bolsa es blanca” N_1 = “La bola de la 1ª bolsa es negra”

B_2 = “La bola de la 2ª bolsa es blanca” N_2 = “La bola de la 2ª bolsa es negra”

Hacemos un diagrama de árbol de probabilidades



$$\text{Se pide } p(N_2) = p(B_1 N_2) + p(N_1 N_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{9} = \frac{38}{63} \cong 0,6032 = 60,32\%$$

b) La bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca.

Resolución Se pide $p\left(\frac{N_1}{B_2}\right) = \frac{p(N_1 B_2)}{p(B_2)} = \frac{p(N_1 B_2)}{1 - p(N_2)} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{9}}{1 - \frac{38}{63}} = \frac{9}{25} = 0,36 = 36\%$

8.- (prueba ordinaria) Un libro tiene cuatro capítulos. El primer capítulo tiene 140 páginas, el segundo 100, el tercero 150 y el cuarto 50. El 5% de las páginas del primer capítulo, el 4% del segundo y el 2% del tercero tienen algún error. Las páginas del cuarto capítulo no tienen errores.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una página al azar, tenga algún error?

Resolución

Sean los sucesos A = “La página es del capítulo I” B = “La página es del capítulo II”

C = “La página es del capítulo III” D = “La página es del capítulo IV” F = “La página tiene error”

Usamos una tabla de contingencia con los datos

	A	B	C	D	Total
F	5% de 140 = 7	4% de 100 = 4	2% de 150 = 3	0	14
F ^c	140 - 7 = 133	100 - 4 = 96	150 - 3 = 147	50	426
Total	140	100	150	50	440

$$\text{Se pide } p(F) = \frac{14}{440} = \frac{7}{220} = 0,0318 = 3,18\%$$

b) Supongamos que elegimos una página al azar y observamos que no tiene ningún error, ¿cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

Resolución

$$\text{Se pide } p(B/F^c) = \frac{p(B \cap F^c)}{p(F^c)} = \frac{96/440}{426/440} = \frac{96}{426} = \frac{96}{426} = \frac{16}{71} \cong 0,2254 = 22,54\%$$

9.- (prueba extraordinaria) En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es 0,1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0,95. La probabilidad de que suene la alarma sin que haya incidente es de 0,03.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que suene la alarma?

Resolución

Sean los sucesos I = “Hay incidente” S = “Suena la alarma”

Según el enunciado, $p(I) = 0,1$; $p(S/I) = 0,95$ y $p(S/I^c) = 0,03$. Como $p(I) = 0,1$ entonces $p(I^c) = 0,9$.

Se pide $p(S)$. Por el teorema de la probabilidad total,

$$p(S) = p(S \cap I) + p(S \cap I^c) = p(I) \cdot p(S/I) + p(I^c) \cdot p(S/I^c) = 0,1 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,03 = 0,122 = 12,2\%$$

b) Si ha sonado la alarma, calcule la probabilidad de que no haya habido incidente.

$$\text{Resolución} \quad \text{Se pide } p(I^c/S) = \frac{p(S \cap I^c)}{p(S)} = \frac{p(I^c) \cdot p(S/I^c)}{p(S)} = \frac{0,9 \cdot 0,03}{0,122} \cong 0,2213 = 22,13\%$$

10.- (prueba extraordinaria) Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$p(A) = 0,4, \quad p(B) = 0,5 \quad \text{y} \quad p(A \cap B) = 0,2$$

a) Calcule las siguientes probabilidades: $p(A \cup B)$, $p(A/B)$ y $p(B/A^c)$

Resolución

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 \qquad p(B/A^c) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0,5 - 0,2}{1 - 0,4} = 0,5$$

b) Razone si A y B son sucesos incompatibles.

Resolución No son incompatibles porque $p(A \cap B) \neq 0$

c) Razone si A y B son independientes.

Resolución

$$p(A) \cdot p(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 = p(A \cap B) \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son independientes.}$$

También se podría haber deducido observando que $p(A/B) = p(A)$

11.- Un examen consta de una parte teórica y una parte práctica. La probabilidad de que se apruebe la parte teórica es 0,7 y la de que se apruebe la parte práctica 0,75. Se sabe que el 50% de los alumnos ha aprobado ambas.

a) Calcule la probabilidad de aprobar alguna de las dos partes.

Resolución

Sean los sucesos T = “El alumno aprueba la parte teórica” P = “El alumno aprueba la parte práctica”

Según el enunciado, $p(T) = 0,7$; $p(P) = 0,75$ y $p(T \cap P) = 0,5$

$$\text{Se pide } p(T \cup P) = p(T) + p(P) - p(T \cap P) = 0,7 + 0,75 - 0,5 = 0,95$$

b) Calcule la probabilidad de aprobar la parte práctica sabiendo que no se ha aprobado la parte teórica.

Resolución Se pide $p(P/T^c) = \frac{p(P \cap T^c)}{p(T^c)} = \frac{p(P) - p(P \cap T)}{1 - p(T)} = \frac{0,75 - 0,5}{1 - 0,7} \cong 0,8333 = 83,33\%$

c) ¿Son independientes los sucesos “aprobar parte teórica” y “aprobar parte práctica”?

Resolución $p(T) \cdot p(P) = 0,7 \cdot 0,75 = 0,525 \neq p(T \cap P) = 0,5 \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son dependientes.}$

12.- Pedro vive en una ciudad donde el 40% de los días del año hay riesgo de lluvia y el resto no lo hay. Cuando hay riesgo de lluvia, Pedro coge el paraguas un 98% de las veces y cuando no lo hay, un 5% de las veces. Si se selecciona un día del año al azar,

a) ¿cuál es la probabilidad de que Pedro no haya cogido el paraguas ese día?

Resolución

Sean los sucesos $R = \text{“Hay riesgo de lluvia”}$ $P = \text{“Pedro coge el paraguas”}$

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	R	R ^c	Total
P	98% del 40% = 39,2%	5% del 60% = 3%	42,2 %
P ^c	40% - 39,2% = 0,8%	60% - 3% = 57%	57,8 %
Total	40%	100% - 40% = 60%	100%

$$\text{Se pide } p(P^c) = 57,8\%$$

b) ¿cuál es la probabilidad de que exista riesgo de lluvia, si sabemos que ese día Pedro ha cogido el paraguas?

Resolución

$$\text{Se pide } p\left(\frac{R}{P}\right) = \frac{p(R \cap P)}{p(P)} = \frac{39,2\%}{42,2\%} = \frac{39,2}{42,2} \cong 0,9289 = 92,89\%$$