

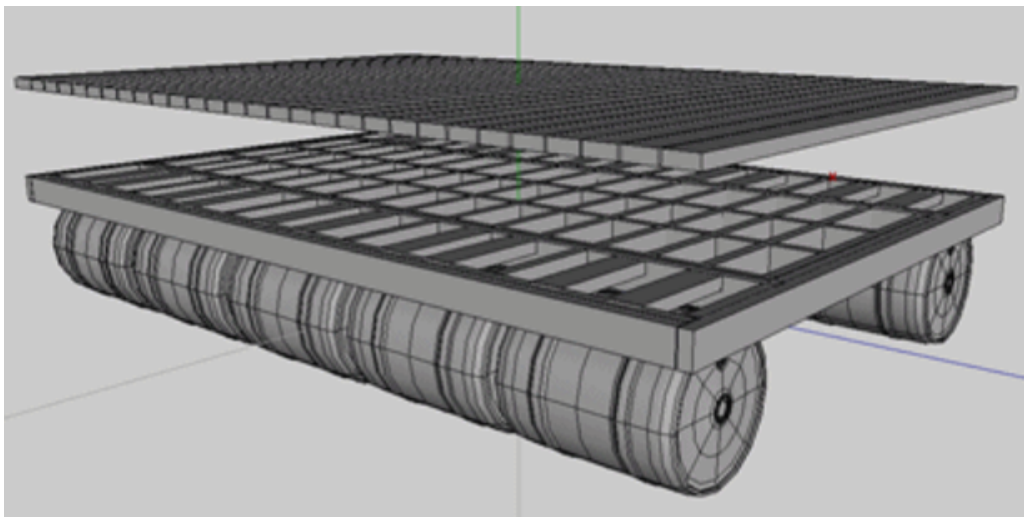
החומר, הכוח והחוזק

או:

מה קורה כאשר פיל עולה על
גלגש?

חלק ה': מרכז כובד

או: מה קורה כשבונים רפסודה מחבית



אחת?

פיתוח כתיבה ועריכה: דר' ירון דופלט – מפמ"ר מגמת הנדסת מכונות

מהדורת תשפ"ד - ינואר 2024

נקודת האחיזה של שקול כוחות הכובד

בפרק של שיווי משקל מומנטים, מצאנו מרחק מציר סיבוב אל נקודת אחיזה של כוח, שהוא השקול לסך כל הכוחות החיצוניים הפועלים על הגוף. אם כן, יודעים אנו למצוא שקול לסך כל הכוחות החיצוניים הפועלים על הגוף, וגם לחשב את נקודת האחיזה של שקול זה בגוף. נקודת האחיזה של השקול נקראת גם בשם "מרכז הכוח".

לפעמים הכוחות החיצוניים נובעים כתוצאה מכוח המשיכה של כדור הארץ. במצב זה נקודת האחיזה של שקול כוחות הכובד נקראת "מרכז כוחות הכובד" או בקיצור "מרכז הכובד". לפיכך נגדיר את מרכז הכובד כך:

הנקודה שבה פועל שקול כוחות הכובד,
נקראת: "מרכז הכובד".

אמנם זאת הגדרת מרכז הכובד, אך היא לא מפרטת כיצד למצוא את מרכז הכובד. זהו חיסרון משמעותי מאוד בהגדרה שהצענו, מכיוון שלמיקום מרכז הכובד חשיבות עצומה, כשבאים לדון בבעיות שיווי-משקל וציבות.

מיקום מרכז הכובד

אז איך מוצאים את מיקום מרכז הכובד? לשם כך משתמשים בהגדרת מצב שיווי המשקל ובהגדרת הכוח השקול ואומרים:

אם מרכז הכובד הוא נקודת האחיזה של שקול כוחות הכובד, אז המיקום הוא כזה, ששקול כוחות הכובד ייתן בדיוק את אותו מומנט (סביב נקודה כלשהי) כמו סך המומנטים של כל כוחות הכובד.

זוכר את המשוואה שפיתחנו בפרק של שיווי משקל מומנטים:

$$\underbrace{L_F \cdot F_{Eq}}_{MEq} = \underbrace{L_1 \cdot G_1}_{Mg1} + \underbrace{L_2 \cdot G_2}_{Mg2}$$

משוואה זו מבטאת בדיוק את הרעיון: מומנט, שיוצר הכוח השקול, שווה לסך כל המומנטים הנוצרים מכוחות הכבידה. ומהו L_F ? הוא בדיוק המרחק מציר הסיבוב אל נקודת האחיזה של השקול.

אבל זהו בדיוק הרעיון, שמבוטא בביטוי "מיקום מרכז הכובד". הרעיון הזה בדיוק מבוטא במשוואה המשמשת לחישוב המיקום:

$$L_F = \frac{L_1 \cdot G_1 + L_2 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$



הרחבת מושג הסכום

מובן שמשוואה זו טובה למקרה של שני כוחות בלבד. ונניח שאנחנו רוצים לפתח משוואה זו למקרה כללי יותר, נניח ל-13 כוחות? כמאמר חז"ל "סוף מעשה – במחשבה תחילה". אז בוא נתחיל לחשוב.

נתבונן במונה: הרי הוא בדיוק סכום של שתי מכפלות: מכפלת הזרוע הראשונה בכוח הראשון, ומכפלת הזרוע השנייה בכוח השני. הסכום הוא סך הכל של שניהם. אם נרצה להרחיב את החישוב ל-4 כוחות, המונה יהיה סכום של 4 מכפלות, ואם נרצה להרחיב למקרה של 13 כוחות אז המונה יהיה סכום של 13 מכפלות, ואלו הן:

$$L_1 \cdot G_1 + L_2 \cdot G_2 + L_3 \cdot G_3 + \dots + L_{13} \cdot G_{13}$$

הרישום הזה ארוך (כאורך הגלות), למזלנו היוונים סייעו לנו במושג הסכום ואנחנו נעזרים במתמטיקה (ידידתנו הותיקה, לפחות מתחילת שנה זו) בה מבטאים את מושג הסכום באות שאנחנו כבר מכירים מפרק הכוחות Σ .

הביטויים: $L_1 \cdot G_1 + L_2 \cdot G_2$ דומים מאוד בצורת כתיבתם, אבל שונים במספר הסידורי שלהם. במקום המספר הסידורי נכתוב משתנה, שתפקידו לספור את מיקום הביטוי בשרשרת הביטויים הדומים. משתנה זה הוא "משתנה סופר", ונסמנו באות i (מהמילה האנגלית לסופר – Index).

ואם לספור, אז מכמה ועד כמה. ובכן התשובה נמצאת על סימן פעולת הסיכום, סימן הסכום במשמעותו הנרחבת נראה כך:

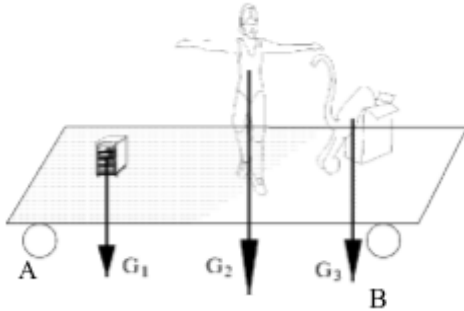
$$\sum_{i=1}^n L_i \cdot G_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{13} L_i \cdot G_i$$

מציאת מיקום מרכז הכובד בבעיה חד-מימדית

נו, אז בשביל מה צריך את זה? בואו נפתור דוגמא:

אתה הכלב וארגז ספרים (שלקחת כדי לשים בארונות בבית הספר) נוסעים לבית הספר על גלגשך:

נשרטט דג"ח (המתארת את הכוחות בלבד ללא כל הגופים עליהם פועלים הכוחות. וכמובן שנרשום נתונים ומה צריך למצוא:



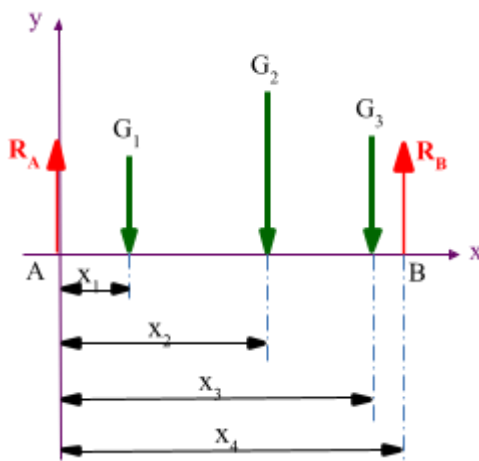
נתונים:

$$x_1=0.3m \quad G_1=30N$$

$$x_2=0.8m \quad G_2=400N$$

$$x_3=1.2m \quad G_3=60N$$

$$x_4=1.6m$$



שים לב, הפעם סימנו את המרחקים יחסית לראשית מערכת הצירים (שיטה זו נקראת מידות ביחס לקו ייחוס, בניגוד לשרשרת מידות).

צ"ל:

$$x_{Feq}=?$$

כמובן שניתן לפתור בעיה זו כפי שהראנו בדוגמא בפרק הקודם של כלבך, אחותך ואתה על הגלגש, אך הפעם דווקא נפתור אותה בעזרת הסימון החדש שהראנו...

$$x_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^3 G_i} = \frac{x_1 \cdot G_1 + x_2 \cdot G_2 + x_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{0.3 \cdot 30 + 0.8 \cdot 400 + 1.2 \cdot 60}{30 + 400 + 60} = 0.818m$$

משמעות התוצאה שקיבלנו $x_{Feq} = 0.818m$ היא שמרכז הכובד ממוקם במרחק של 0.818 מטרים מהסמך

$$A. \text{ ומהו מרחק מרכז הכובד מנקודה } B? \quad 1.6 - 0.818 = 0.782m$$

כבר אמרנו, שהגלגש יכול להסתובב סביב כל אחת מנקודות המגע שלו עם הקרקע. כלומר סביב נקודה A או סביב נקודה B. אנחנו בחרנו (שרירותית) למקם את ראשית מערכת הצירים בנקודה A. עכשיו נראה אותך פותר את הבעייה, כאשר ראשית הצירים ממוקמת בנקודה B, ומשווה את תוצאת חישוב המרחק שתצא לך עם

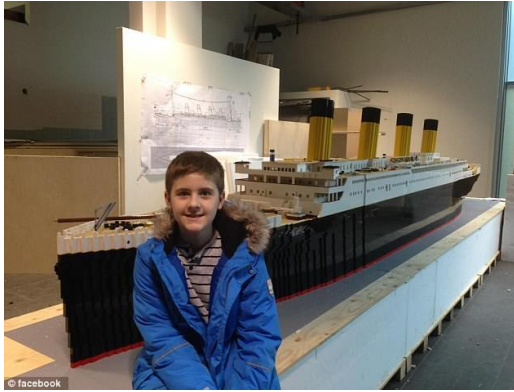


התוצאה שיצאה לנו.

היציבות של גופים בראי שיווי-משקל ומרכז כובד

סיפור קצר לקבלת אפקט דרמטי:

לפני מספר שנים שחקן מפורסם גילם דמות אמיתית שהייתה על ספינה מפורסמת – טיטניק. האונייה הפליגה מתעלת למאנש. לפתע השתנה מזג האוויר והספינה החלה להתנדנד. האנשים שהיו על הסיפון רצו – בפאניקה אדירה – לצד אחד של הספינה, ואז הנידנד גבר. כתוצאה מכך נבהלו האנשים ורצו כולם לצידה האחר של הספינה. מיקום מרכז הכובד של הספינה ומטענה השתנה בצורה דרסטית, והספינה התהפכה וטבעה. (גם אם הסיפור האמיתי שונה במקצת, העיקרון המתואר כאן חשוב)



לגו-טיטניק הגדולה בעולם 56,000 רכיבי לגו

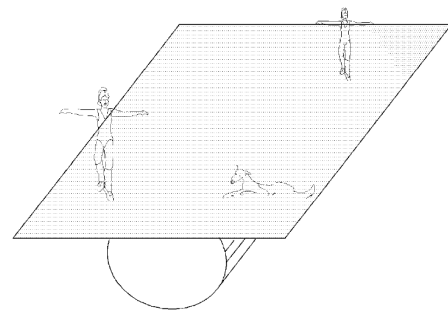
הספינה האמיתית

מחקרים גילו שאחת הסיבות לטביעתה של הטיטניק היא כשל במסמרות (ועל כך נלמד בכיתה יא')

היציבות של גופים בראי שיווי-משקל ומרכז כובד

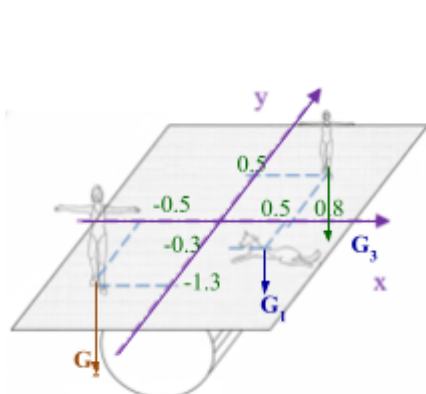
נרצה כעת לטפל בבעיה דומה, אבל פשוטה קצת יותר. נתאר לעצמנו רפסודה, כלומר משטח עץ על חבית (אפשר אפילו לבנות אחת כזאת), ונרכיב עליה את אחינו הקטן ואת הכלב, וננצא לשיט קצר:

מכיוון שלרפסודה שלנו חבית אחת בלבד, המצב עדין: משקל עודף באחד מצידוי הרפסודה יכול לגרום להתהפכותה. כאן יש לנו בעיה קטנה: עד עכשיו בדקנו את מיקומו של מרכז הכובד על גבי ציר אחד, אך בבעיה זו מרכז הכובד יכול להתרוצץ על פני כל הרפסודה: גם לאורך: קדימה ואחורה, וגם לרוחב: ימינה ושמאלה (כאן למזלנו מרכז הכובד אינו יכול להתרוצץ למעלה ולמטה, אבל יש גם בעיות כאלו). לכן נצטרך לטפל במיקום מרכז הכובד בשני כיוונים (בדיוק כמו שמושב



בקולנוע ממוקם לפי מספר שורה ומספר כיסא בשורה).

בבעיה הקודמת מצאנו רק את מרחק מרכז הכובד מנקודה A, וסימנו אותו בסימון X_{Feq} . הפעם הזאת נצטרך לחשב גם את X_{Feq} וגם את Y_{Feq} . ראשית חוכמה נרשום מה נתון ומה צריך להוכיח (צ"ל) ונצייר דג"ח (דיאגרמת גוף חופשי):



צ"ל:

נתונים:

$x_1 = +0.5m$	$y_1 = -0.3m$	$G_1 = 30N$
$x_2 = -0.5m$	$y_2 = -1.3m$	$G_2 = 400N$
$x_3 = +0.8m$	$y_3 = +0.5m$	$G_3 = 60N$
$L_x = 1.6m$	$L_y = 1.6m$	

פתרון:

תחילה נרשום את הנוסחאות, שבהן נשתמש, ואחר-כך נציב בנוסחאות את נתוני הבעיה:

$$x_{Feq} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^3 G_i} = \frac{0.5 \cdot 30 - 0.5 \cdot 400 + 0.8 \cdot 60}{30 + 400 + 60} = \frac{-137}{490} = -0.28m$$

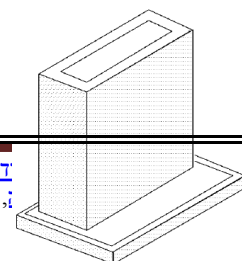
$$y_{Feq} = \frac{\sum_{i=1}^3 y_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^3 G_i} = \frac{-0.3 \cdot 30 - 1.3 \cdot 400 + 0.5 \cdot 60}{30 + 400 + 60} = \frac{-499}{490} = -1.02m$$

אובדן יציבות

יופי, מצאנו את קואורדינטות (שיעורי הנקודה על מערכת צירים) מרכז הכובד של המטען שעל הרפסודה (שים לב שלא התחשבנו במשקל הרפסודה וזאת משום שאם פלטת הרפסודה עשויה מחומר אחד אז מיקום מרכז הכובד שלה הוא במרכז הצורה הגיאומטרית). אבל מה זה נותן לנו? נוכל, למשל, לקחת "טרמפ" חברים נוספים עליה. במרחקים סימטריים שווים מנקודת מרכז הכובד לכל כיוון. בתנאי שמשקל החברים דומה פחות או יותר (אם יש לנו שני חברים אחד כבד ואחד קל, איך נמקם אותם?).

למה זה טוב? ובכן, זוכר את בעיית הספינה שטבעה (ולא חייבים להגיע לצרפת ואנגליה, אפשר להתהפך גם עם סירת משוטים, סירת מנוע או יאכטה קטנה כאן בכינרת או בחופי ישראל. הכרת מרכז הכובד תאפשר לתכנן בקלות את השיט).? בעיה זו שייכת לסוג הבעיות של אובדן יציבות, וכולן עוסקות בהתהפכות או בשינוי דרמטי של מצב הגוף או המערכת.

בעית היציבות קשורה קשר הדוק למרכז הכובד. כי **לבדוק** אם גוף יציב או לא, צריך לבדוק בעצם את מיקום מרכז הכובד שלו. כדי **לבנות** גוף או מערכת **יציבים**, יש למקם את מרכז הכובד באזור מסוים של הגוף שבזכותו הגוף יהיה יציב.



תכנון מערכות שימושיות: החל ממחזיק עטים, משחק מנהלים וכלה במטוסים וספינות לסוגיהם – חייב להתחשב במיקום של מרכז הכובד. כדי שלא לתכנן ולטעות, לתכנן ולטעות, לתכנן ולטעות, עד שמגיעים למיקום הסופי של מרכז הכובד, **כדאי מאוד לתכנן מראש** ולחשב את מיקומו של מרכז הכובד.

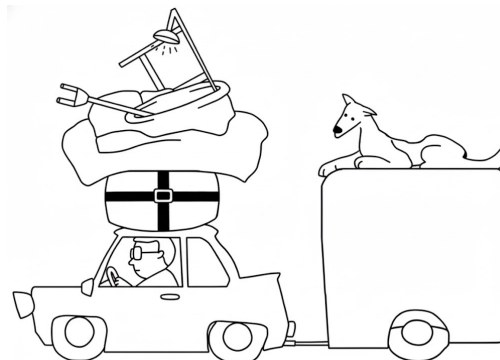
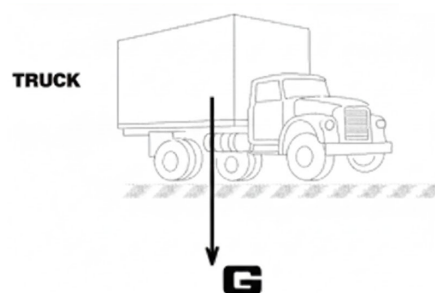
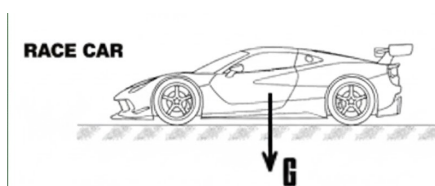


מחזיק עטים יעיל

לכל תלמיד פעיל

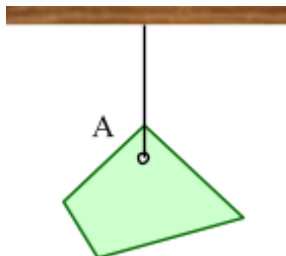
גם תלמידים יכולים – משחק מנהלים

דוגמאות לבעיות שיווי-משקל ויציבות אפשר למצוא בחיי היום-יום. משאית בעלת ארגז מטען גבוה (או שהעמיסו אותה מעל למותר), הנוסעת בכביש פתלתל (בעל סיבובים) עשויה להתהפך ביתר קלות ממכונית ספורט מדגם "פרארי". כוח הכובד פועל בנקודת מרכז הכובד. אפשר לראות (וגם לחשב) שנקודת מרכז הכובד הכובד במשאית – ממוקמת גבוה יותר מעל פני הקרקע מאשר ב"פרארי".

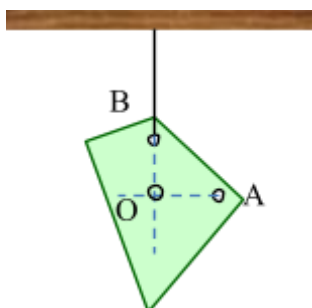


עובדה זו חשובה ביותר בזמן נסיעה בעיקול של הכביש. דוגמא נוספת אפשר לראות במשימה בעמוד הבא.

- קח בריסטול בגודל בינוני (ניתן גם קרטון ביצוע או פלטת עץ) וגזור ממנו מרובע שונה צלעות.
- צור קדח (חור) באחד מהקודקודים של המרובע (למשל קודקוד A), ותלה את הבריסטול המרובע בעזרת חוט, כמתואר בציור הבא:



- לאחר שהבריסטול התייצב. כלומר הגיע למצב של שיווי-משקל צייר על הבריסטול קו בהמשך לחוט.
- כעת חזור על שלב א, והפעם תלה את הבריסטול בקודקוד הסמוך, כמתואר בציור הבא:



- לאחר שהבריסטול התייצב שוב, צייר קו בהמשך לחוט.
- לאחר שסימנת גם הפעם קו בהמשך לחוט, תקבל על הבריסטול נקודת מפגש של שני הקווים אותה סימנו באות O. נקודה זו היא מרכז הכובד של הבריסטול. מדוע? משום שבכל אחד ממצבי שיווי המשקל סכום המומנטים הוא אפס ולכן החוט וכוח הכובד חייבים להיות על אותו קו פעולה. ואיפה אוחד מרכז הכובד? במילים אחרות היכן על הבריסטול פועל כוח המשיכה של כדור הארץ?

- כעת צור קדח נוסף בנקודה O שסימנת ותלה את הבריסטול דרך נקודה זו. הפלא ופלא, הבריסטול נשאר יציב, נכון?
- תן מכה קטנה לבריסטול. הוצאת אותו ממצב שיווי משקל וגרמת לו לנוע. לאחר זמן מה הוא יתייצב שוב בדיוק במצב בו הוא היה לפני שנתת את המכה והוצאת אותו משיווי משקל.

מרכז הכובד של עומס מחולק

או: כיצד מתכננים משאית חצץ?

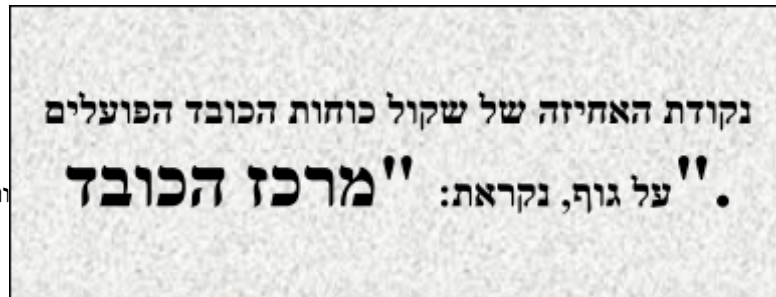
בעיית אתגר למחשבה...

נניח שאנחנו קבלנים גדולים ובבעלותנו משאית. כדי לחסוך בהוצאות נסיעה בעת הובלת חצץ נרצה כמובן להעמיס על המשאית חצץ או חול או כל מטען אחד ככל האפשר. אבל אם נעמיס על המשאית יותר מדי חול, המנגנון המרים את הארגז (הנקרא גם: **מנגנון הרכינה**) לא ייצור מספיק כוח, כדי להרים את הארגז ולשפוך את החול (ומה תעזור לנו משאית חול, העומדת באתר?).

נשאלת השאלה: איך מחשבים את הכוח, הדרוש להרמת הארגז? אכן, זו בעיה – כי אין כאן מצב של עומס הפועל בנקודה אחת על הארגז, אלא העומס מחולק בצורה שווה בכל נפח הארגז. לעומס כזה קוראים: **"עומס מחולק"** (או **"עומס מפורס"**, למרבה הפלא כי הוא מתפרס על כל שטח הפנים או הנפח). השיטה, בה נשתמש כדי להתחשב בעומס כזה, היא **מציאת הכוח השקול של העומס המפורס**. העומס הוא העוצמה, שבה נמשך החול לכדור הארץ, והכוח השקול הוא סך כל המשקל של החול. ומיקום פעולת שקול כוחות הכובד הזה הוא...

אכן ניחשת: מקום פעולת השקול של עומס מפורס הוא מרכז הכובד של העומס המחולק.

אם כך, אפשר לתת עוד הגדרה למרכז הכובד:



ורכבת מהרבה

בהמשך, תוכל לקבל חלקים.

מרכז הכובד – מרכז המסה

כעת נשתמש במה שכבר למדנו על כוח הכובד, מסת הגוף ותאוצת הכובד שכוח המשיכה של כדור הארץ (הוא כוח הכובד) גורם לגוף לשאוף לנוע מטה בכיוון מרכז כדור הארץ.

זוכרים את הנוסחה לכוח הכובד? $G = mg$

תאוצה: קצב שינוי המהירות. תאוצת הכובד היא גודל קבוע. אולם כאשר מדברים על תנועה של מכונית ממהירות אפס למהירות 100 קמ"ש מדברים על תנועה מואצת. כלומר התאוצה גדלה והמהירות משתנה. כאשר המהירות קבועה התאוצה שווה לאפס ולכן אנחנו אומרים שהמצב של תנועה במהירות קבועה הוא מצב של שיווי משקל של כוחות. אם התאוצה שלילית אז התנועה מואטת.

כבר סיפרנו לכם, וכעת נרחיב קצת, שנוהגים לסמן את תאוצת הכובד באות g , ושיש לה ערך קבוע, משום שכדור הארץ מושך את כל הגופים באותו כוח ליחידת מסה, כלומר באותה תאוצה. האם פיל נופל מהר יותר ממשקולת קטנה של לגו? האם בלוק לבנים, קובית דלרין, או קופסת גפרורים נופלים מהר יותר, לאט יותר או אותו דבר. **תשובה:** מהירות נפילת הגוף אינה תלויה בחומר ממנו עשוי הגוף וגם לא במסתו. נזכיר גם שתאוצת הכובד שווה בדיוק: $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$ (מטרים לשנייה בריבוע). האמת שהגודל הזה הוא גודל ממוצע שכן תאוצת הכובד שונה על פסגת הר האוורסט (הנקודה הגבוהה ביותר בעולם) לעומת חוף ים המלח (הנקודה הנמוכה ביותר בעולם). וכמובן שתאוצת הכובד שונה מאוד על הירח (פיצפון) לעומת צדק (ענק). עוצמת כוח הכובד, תלויה, בוודאי, בתכולת החומר שבגוף הנמשך אל מרכז כדור הארץ. לתכולת החומר, קראנו מסה - Mass (כמות החומר) וסימנו אותה באות m . וכבר סיפרנו לכם שיחידות המידה שלה הן ק"ג. כעת בואו נשתמש במסה ובתאוצת הכובד כדי לחשב את עוצמת כוח הכובד הפועלת על גוף. נחזור לנוסחה המוכרת לנו ונציב במקום G את mg :

$$x_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{x_1 \cdot G_1 + x_2 \cdot G_2 + \dots + x_n \cdot G_n}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{x_1 \cdot m_1 \cdot g + x_2 \cdot m_2 \cdot g + \dots + x_n \cdot m_n \cdot g}{m_1 \cdot g + m_2 \cdot g + m_3 \cdot g} =$$

$$= \frac{g \cdot (x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots + x_n \cdot m_n)}{g \cdot (m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

מגניב, קיבלנו נוסחה של מיקום מרכז הכובד אך ורק כתלות במסה של כל עומס ומרחק של כל עומס מראשית הצירים. נוסחא זאת נוחה יותר לשימוש, כי בדרך כלל הגדלים, הנתונים בבעיות הנדסיות שונות, הן **המסות** של הצורות השונות – ולא **הכוחות**.

אולם, למרות שמאוד התלהבנו מכך שמספיק לדעת את המסות יש מקרים רבים שנרצה לדעת את מיקום מרכז הכובד של הגוף בלי שמסת הגוף ידועה לנו. למרות זאת הדבר, אפשרי, משום שברוב המקרים אנחנו יכולים למדוד את נפחו של הגוף. אולם כיצד תעזור ידיעת הנפח של גוף אם בנוסחת מרכז הכובד שכרגע פיתחנו חייבים לדעת את מסת הגופים?

זוהי שאלה מצוינת, כאן המקום להרחיב קצת את הדיבור על המושג **מסת הגוף**. ניזכר שוב, מסה היא מידה לכמות החומר הנמצאת בגוף. מכאן שכל שנפח הגוף גדול יותר כן מסתו גדולה יותר! משפט הגיוני זה כמעט קרוב למציאות. וזאת משום, שמסת הגוף אינה תלויה רק בנפח הגוף היא תלויה גם בכמה החלקיקים ממנו מורכב החומר צפופים. האם דלי חול שוקל אותו דבר כמו דלי בעל אותו נפח מלא בפופקורן, קלקר או אפילו כמו אותו דלי מלא בחציץ?

שוב אנחנו נתקלים בתופעה (אחת מיני רבות בעולמנו) שמשהו אחד תלוי בשני גורמים אחרים. כבר דיברנו על זה... כל פעם שמשהו תלוי בשני גורמים אחרים שנמדדים ביחידות מידה שונות אז אנו אומרים שהמשהו האחד הוא פונקציה של שני הגורמים האחרים. והקשר המתמטי של פונקציה כזאת התלויה בשני משתנים הוא כמעט תמיד מכפלה.

ומסיפורים, נעבור למילים, אח"כ לאותיות וליחידות מידה כדי שבאמת נבין לעומק את המושג עליו אנחנו מדברים (אחת הטעויות הגדולות ביותר של אנשים היא לדבר על מה שהם לא מבינים).

נפח הגוף צפיפות החומר = מסת הגוף

$$m = \rho \cdot V$$

שים לב לבדיקת היחידות. משני הצדדים של סימן השוויון התקבלה אותה יחידת מידה (לאחר הצימצום) קילוגרם. זאת הוכחה די טובה שהמשוואה נכונה.

אם כך נתקדם שלב אחד קדימה ונציב את הביטוי $\rho \cdot V$ במקום כל המסות שבנוסחה שקיבלנו.

$$x_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots + x_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

הפעם בואו נקצר את הדרך בפיתוח: נציב את הביטוי $\rho \cdot v$ ישירות בנוסחה עם סימני הסכומים:

$$x_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \rho \cdot v_i}{\sum_{i=1}^n \rho \cdot v_i}$$

ואכן קיבלנו נוסחה שתלוייה בצפיפות החומר ונפח החומר במקום במסה.

מאחר שרוב הבעיות שבהן נטפל הן בעיות מישוריות, העוסקות בגופים דו-מימדיים, הרי שבמקום לדבר על "נפח – נתעניין דווקא ב"שטח". אם כך, נותר לנו לזכור שנפח הוא בעצם שטח חתך כפול גובה הגוף.
נפח מבוטא באמצעות הנוסחה הבאה

$$\begin{array}{lcl} \text{שטח החתך} & \cdot & \text{אורך או מידת הגובה בציר} \\ \text{במישור } xy \text{ (בהיטל פנים)} & & z \text{ (בהיטל פנים)} \\ \hline V & = & z \cdot A_{xy} \\ \text{mm}^3 & = & \text{mm} \cdot \text{mm}^2 \end{array}$$

הערה: סימנו נפח (Volume) באות V. חשוב לזכור שמהירות (Velocity) מסומנת באות הקטנה v ולכן נגמרו האפשרויות וכאשר נצטרך בהנדסת מכונות להשתמש בסימון למתח (Voltage) נשתמש באות U (ויחידות המידה של מתח הן וולט – Volt – לכן רושמים U=12V).

ניתן להציב את הביטוי $V = z \cdot A_{xy}$ להציב בביטוי שקיבלנו למרכז הכובד עם נפחים:

$$x_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot z \cdot A_{xy_i}}{\sum_{i=1}^n z \cdot A_{xy_i}} = \frac{z \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot A_{xy_i}}{z \cdot \sum_{i=1}^n A_{xy_i}}$$

אם הגובה z הוא אחיד בכל השטחים שאנחנו מטפלים בהם אז ניתן לצמצם אותו ונקבל:

$$x_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_{xy_i}}{\sum_{i=1}^n A_{xy_i}}$$

קיבלנו נוסחה שתלויה רק בצפיפות החומר, שטח החתך של החלק והמרחק של מרכז הכובד שלו מציר y.

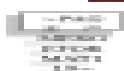
$$y_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_{xy_i}}{\sum_{i=1}^n A_{xy_i}}$$

קיבלנו נוסחה שתלויה רק בצפיפות החומר, שטח החתך של החלק והמרחק של מרכז הכובד שלו מציר x.

בעמוד הבא נפתור דוגמא בה נחשב את מרכז הכובד של גוף העשוי שני חלקים העשויים מחומרים שונים בעזרת הנוסחאות:

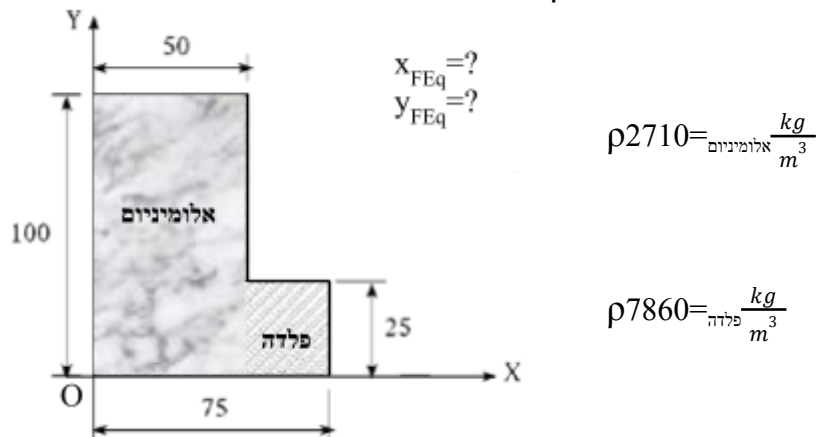
$$x_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \bullet_i \bullet_{xy_i} A}{\sum_{i=1}^n \bullet_i \bullet_{xy_i} A}$$

$$y_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \bullet_i \bullet_{xy_i} A}{\sum_{i=1}^n \bullet_i \bullet_{xy_i} A}$$



תרגיל דוגמא: חומרים שונים

מנספח: חומרים וצפיפויות הנמצא בסוף הספר נוציא את הנתונים הבאים:



פתרון:

N	אור ך	גובה	A_i	x_i	y_i	$\rho_i [kg/m^3]$	$\rho_i A_i$	$x_i \rho_i A_i$	$y_i \rho_i A_i$
1	100	50	5000	25	50	2710	13550000	338750000	677500000
2	25	25	625	62.5	12.5	7860	4912500	307031250	61406250
			5625				18462500	645781250	738906250
							0	0	0

$$x_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{645781250}{18462500} = 34.978mm$$

$$y_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{738906250}{18462500} = 40.022mm$$

כלומר, שהכוח השקול של כוח הכובד שפועל על המשקלים של החלקים שמרכיבים את הגוף שלנו פועל במרחק של 35 מ"מ בציר x מראשית מערכת הצירים (נקודה O) ובמרחק של 40 מ"מ בציר y מראשית מערכת הצירים (נקודה O).

שימו לב, הערך של שיעור הנקודה על ציר x מייצג את מרחק הנקודה מציר y ולהפך הערך של שיעור הנקודה על ציר y מייצג את מרחק מציר x .

מקובל לסמן זאת גם כך:

סימון שיעורי הנקודה בה נמצא מרכז הכובד $(x_c, y_c) = (35, 40)$

כלומר, מרכז הכובד מרוחק 35 ס"מ מציר y ו-40 ס"מ מציר x .

מרכז הכובד – נוסחה שימושית

הצפיפות היא **גודל קבוע** לכל חומר (בתנאים שווים של לחץ וטמ"פ). אם נרצה למצוא את מרכז הכובד של גוף העשוי מחומרים שונים נשתמש בנוסחה שפיתחנו. אבל אם כל החלקים עשויים חומר זהה (כלומר צפיפות זהה של כל החלקים) נוכל להוציא את הצפיפות מחוץ לסימן הסכום ולצמצם אותה:

$$x_{F_{Eq}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

קיבלנו נוסחה התלויה רק בשטחים ובמרחקים של שטחים אלו מראשית הצירים.

הנוסחה הבאה היא הנוסחה השימושית למרכז כובד. מאחר שהמושג מכיל את המילה מרכז (Center), החלפנו את הסימון F_{Eq} באות C. כמו כן, מקובל לוותר בנוסחה על הסימון A_{xy} .

נוסחה זו מאפשרת לנו איפה למצוא את מיקום מרכז הכובד (של צורה מישורית או של היטל או של חתך) בלי לדעת את התכונות הפיסיקליות של החומר שממנו הם עשויים (תכונות פיסיקליות הן תכונות של חומרים למשל צפיפות אותה הזכרנו קודם). כלומר מספיק לדעת נתונים גיאומטריים של הגופים – כלומר את מידות הגופים על-מנת למצוא את מיקום מרכז הכובד.

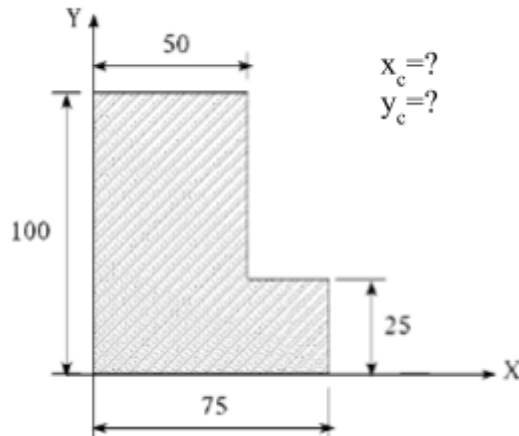
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

ובאופן דומה נקבל:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

בעמוד הבא נראה דוגמא לפתרון תוך שימוש ביישום של גיליון אלקטרוני (Excel) של מציאת מרכז הכובד של בעיה עבור גוף דו-מימדי העשוי חומר אחד.

שאלת דוגמא 1:



חשב את מיקומו של מרכז הכובד ביחס לצירים של הגוף המישור המתואר בציור:

פתרון:

נחלק את שטח הצורה הנתונה לשני שטחים, שלגביהם אנחנו ויודעים את מיקום מרכז הכובד:

נבנה כעת את הטבלה הבאה בגיליון אלקטרוני שיחשב לנו באופן אוטומטי את מיקום מרכז הכובד על-סמך הנתונים שיוזנו בעמודות:

- עמודה A – מספר תת-החלקים בגוף (N);
- עמודה B – אורך (מידת החלק בציר x);
- עמודה C – גובה (מידת החלק בציר y);
- עמודה D – y_i – שיעור מרכז הכובד של תת-חלק בציר y);
- עמודה E – x_i – שיעור מרכז הכובד של תת-חלק בציר x).

העמודות $A_i x_i$ ו- $A_i y_i$ מחושבות לפי הנתונים. בשורה התחתונה מתבצע הסיכום של שלושת הטורים שאנחנו צריכים להכניס לנוסחה. מתחת לטבלה נמצא גם החישוב של הנוסחה למציאת המיקום של מרכז הכובד בשני הצירים.

הטבלה הועתקה מתוך גיליון Excell (שנמצא בתיקיית המורים של המגמה):

N	אורך	גובה	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	100	50	5000	25	50	125000	250000
2	25	25	625	62.5	12.5	39062.5	7812.5
			5625			164062.5	257812.5

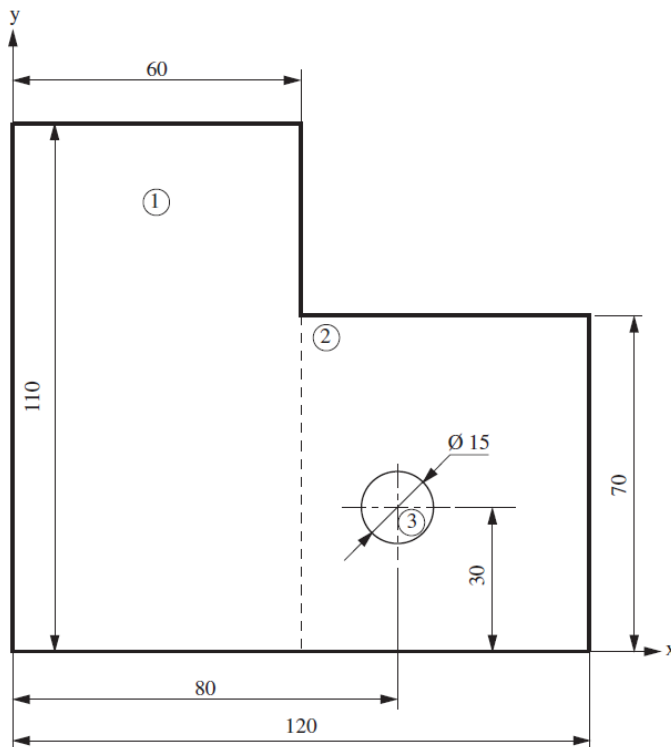
$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{164062.5}{5625} = 29.167mm$$

$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i \cdot y_i)}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{257812.5}{5625} = 45.833mm$$

שימו לב, שמיקום מרכז הכובד של חלק העשוי חומר אחד שונה מהתוצאות שיצאו לנו בעמוד 133.

שאלת דוגמא 2:

חשב את מיקומו של מרכז הכובד ביחס של הגוף המישור המתואר בציור:



פתרון:

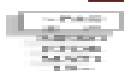
נחלק את שטח הצורה הנתונה לשלושה שטחים, (1, 2, 3) שלגביהם אנחנו ויודעים את מיקום מרכז הכובד:

נשתמש בטבלה שהכרנו כדי להכין את החישובים להצבה בנוסחת מרכז הכובד שלמדנו.

N	אורך	גובה	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	60	110	6,600	30	55	198,000	363,000
2	60	70	4,200	90	35	378,000	147,000
3	D=15		-177	80	30	-14,160	-5,310
			10,623			561,840	504,690

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{561,840}{10,623} = 52.889mm$$

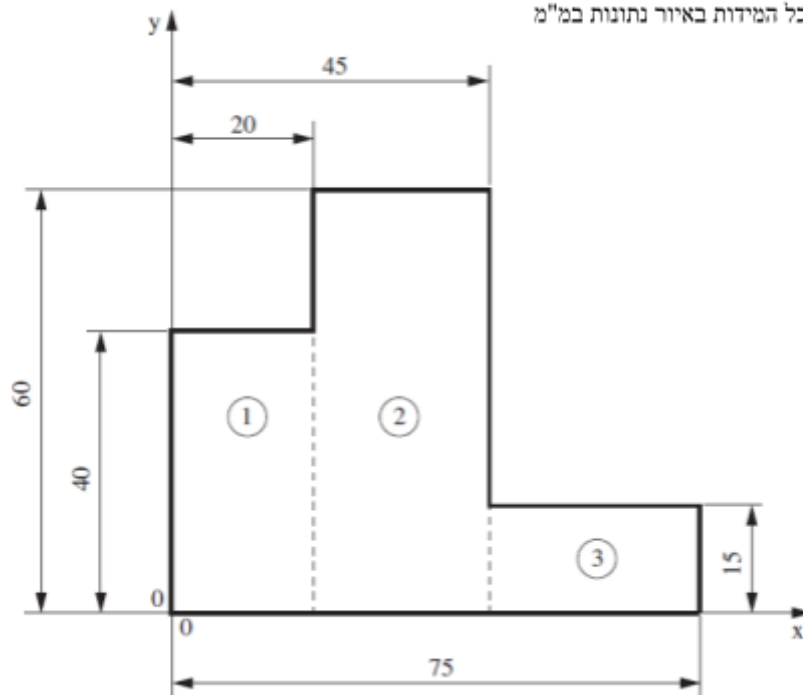
$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i \cdot y_i)}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{504,690}{10,623} = 47.509mm$$



תרגילי סיכום

1. מצא את קורדינטות מרכז הכובד של הגוף המתואר באיור לשאלה זו.

כל המידות באיור נתונות במ"מ.



2. לפניך שני גופים, א ו-ב, כמתואר בציור. הוכח שמרכז כובד בשני הגופים נמצא באותו מקום.

