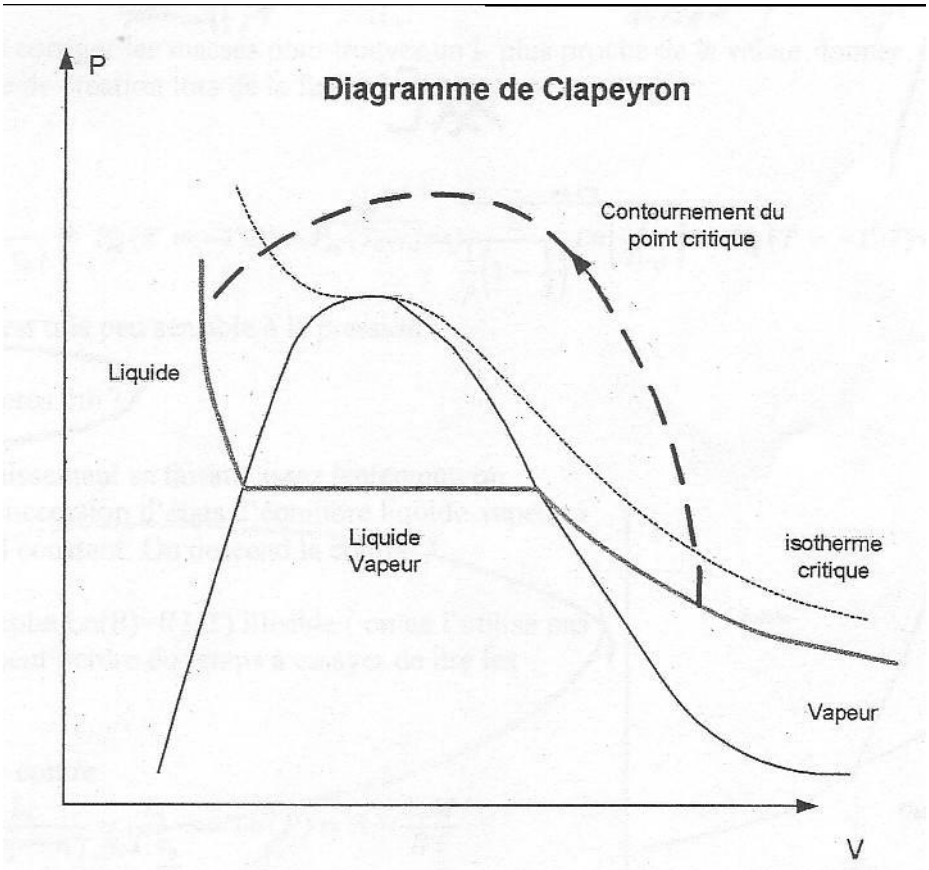
INA A 2004 (correction)

PROBLÈME 1 : Étude de l'eau en physique

A	**Préliminaire**
A-1	(1) : solide (2) : gaz (3) : liquide
A-2	C : point critique : pour $T = T_c$, le palier de changement d'état se réduit à un point ; au-delà de T_c, il n'y a plus de changement d'état liquide-gaz (fluide hypercritique) T' : point triple, où il y a coexistence du solide, du liquide et du gaz
A-3	les courbes du diagramme (T,P) montrent que, pour qu'il y ait coexistence entre deux phases, on est nécessairement sur une des courbes du diagramme, donc qu'il y a un lien entre P_{eq} et T. On peut aussi invoquer la variance et la règle des phases. l'enthalpie libre massique (ou, si on raisonne par nombre de moles, l'enthalpie libre molaire, cas particulier du potentiel chimique) est la même dans les deux phases en équilibre : $g_a = g_b$ donc, dans une transformation entre deux états d'équilibre infiniment voisins : $dg_a = dg_b$ or dans la phase a : $dg_a = v_a dP_{eq} - s_a dT$ où v_a et s_a sont respectivement le volume et l'entropie molaire dans la phase a et P_{eq} la pression lorsqu'il y a équilibre entre les phases a et b et T la température de même : $dg_b = v_b dP_{eq} - s_b dT$ donc : $v_a dP_{eq} - s_a dT = v_b dP_{eq} - s_b dT$ on en déduit : $\frac{dP_{eq}}{dT} = \frac{s_b - s_a}{v_b - v_a}$ or : $s_b - s_a = \frac{L_{a\to b}}{T}$ donc : $\frac{dP_{eq}}{dT} = \frac{L_{a\to b}}{T(v_b - v_a)}$ (relation de Clapeyron)
A-4	La pente de l'équilibre de fusion est négative, ce qui signifie, d'après la relation de Clapeyron : $v_{liquide} < v_{solide}$. Ceci peut être illustré par le fait que les glaçons flottent sur l'eau liquide ou par l'éclatement des conduites d'eau lors du gel de celles-ci

A-5



B — **Mesure de la chaleur latente de fusion**

B-1

On essuie les glaçons pour enlever au mieux la phase liquide

B-2

$m_e = 140,3 - 48,8 = 91,5$ g

$m_e + m_g = 140,3 - 39,9 = 100,4$ g

donc : $m_g = 100,4 - 91,5 = 8,9$ g

B-3

on lit sur le graphe : $T_e = 19,4$ °C

$T_f = 10,6$ °C

B-4

La transformation est isobare et quasi adiabatique, donc isenthalpique ; On a donc, pour l'ensemble eau-glace :

$$\Delta H_{eau-glace} = m_e C_{eau}\left(T_f - T_e\right) + m_g\left(L + C_{eau}\left(T_f - T_g\right)\right) = 0$$

où T_g est la température d 0 °C

$$L = \frac{1}{m_g}\left(m_e C_{eau}\left(T_e - T_f\right) - m_g C_{eau}\left(T_f - T_g\right)\right)$$

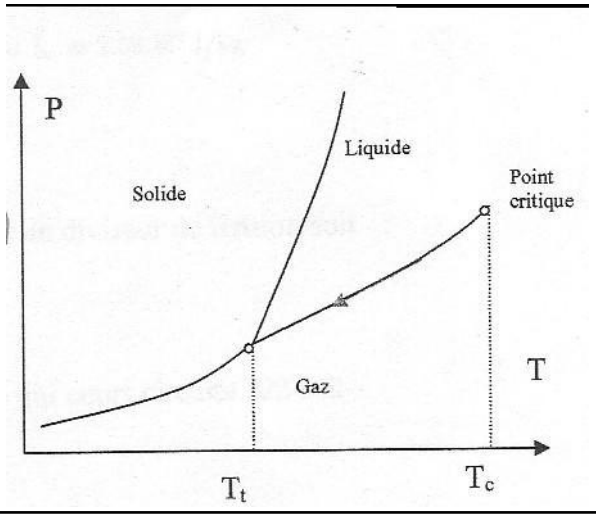
On en déduit :

AN : $L = 339$ kJ.kg^{-1}

B-5

Il n'y a pas d'entropie échangée, donc l'entropie créée s'identifie à la variation d'entropie :

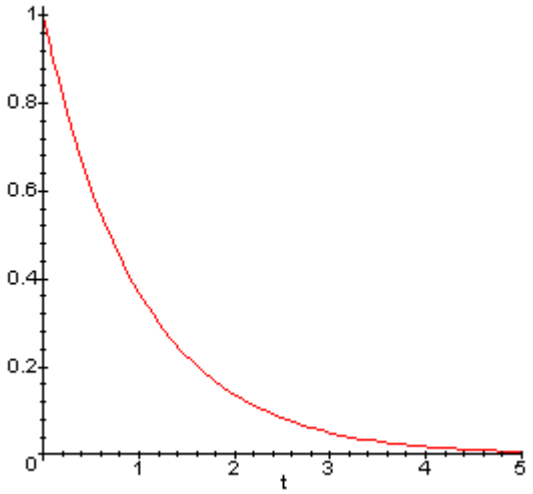
$$\Delta S_{eau-glace} = S_c = m_e C_{eau} \ln\frac{T_f}{T_e} + m_g\left(\frac{L}{T_g} + C_{eau}\ln\frac{T_f}{T_g}\right)$$

	AN : $\Delta S = 0{,}45\ J.K^{-1}$
B-6	en intégrant la relation de Clapeyron, on obtient, pour une variation de température de -1 °C : $$P_{eq}(T) - P_{eq}(T_g) = \frac{L_{fusion}}{v_{liquide}(1-\frac{1}{d})} \ln\frac{T}{T_g}$$ AN : $$P_{eq}(T)_{bars} = -30060 \ln\frac{T}{T_g} + 168622$$ $P_{eq}(T=-1°C) = 111$ bars
C	**Mesure de la chaleur latente de vaporisation**
C-1	Le refroidissement se fait de façon isochore, on assiste à une succession d'états d'équilibre liquide-vapeur à volume global constant : on se déplace dons le long de la courbe de vaporisation, qualitativement du point critique vers le point triple.
C-2	
C-3	Si on néglige le volume massique du liquide devant celui du gaz et si on assimile le gaz à un gaz parfait, la relation de Clapeyron devient : $$\frac{dP_{eq}}{dT} = \frac{L_{vap}}{T(v_{gaz} - v_{liquide})} \approx \frac{L_{vap}}{Tv_{gaz}} \approx \frac{L_{vap}}{T\left(\frac{RT}{MP_{eq}}\right)} = \frac{L_{vap}MP_{eq}}{RT^2}$$ qui s'intègre en : $$\ln P_{eq} = A - \frac{L_{vap}M}{RT}$$ où : A = constante On ne peut pas toujours négliger le volume massique du liquide devant celui du gaz car le volume massique du liquide rejoint celui du gaz lorsqu'on s'approche du point critique.
C-4	d'après la question précédente, on obtient : $\frac{L_{vap}M}{R} = 5068$,

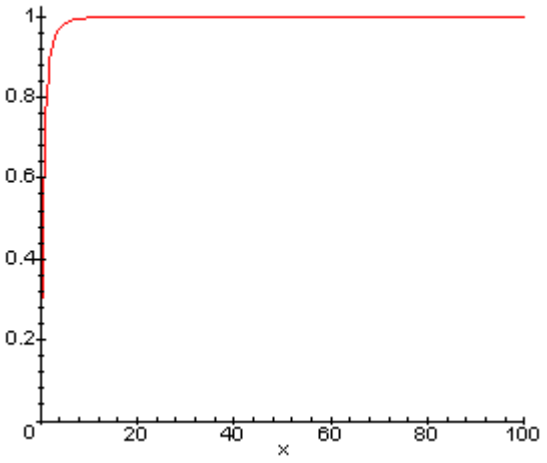
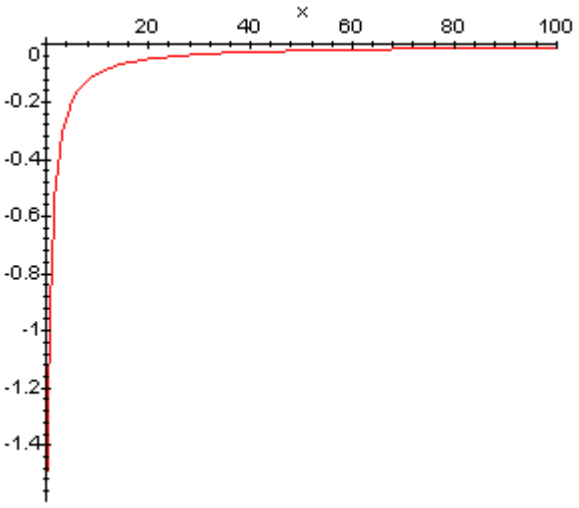
	d'où, d'après les résultats expérimentaux : $\ln P_{eq} = 13{,}5 - \frac{5068}{T}$ d'où enfin : $L_{vap} = 2{,}341.10^3$ kJ.kg^{-1}
C-5	On peut imaginer que l'air n'a pas été entièrement chassé du ballon tricol, ce qui peut créer une surpression, cette surpression devenant négligeable à haute température
C-6	au point triple, la température de l'équilibre de vaporisation doit être égale à la température de l'équilibre de fusion ; on a donc, en admettant la validité du modèle pour la courbe de vaporisation : $\ln P_{eq} = 13{,}5 - \frac{5068}{T} =$ $P_{eq}(T)_{bars} = -30060 \ln \frac{T}{T_g} + 168622$ avec : AN : $T' = 273{,}01$ K $P_{T'} = 0{,}068$ bar = 5 mm Hg remarque : on constate qu'on n'est pas dans l'intervalle [70°C ;100°C] pour la température : le modèle utilisé pour l'équation de la courbe de vaporisation n'est donc qu'approché, ce qui fait qu'on ne trouve qu'un ordre de grandeur pour les grandeurs du point triple
C-7	$\ln P_{eq} = 13{,}5 - \frac{5068}{T}$; donc pour la cocotte-minute : $T_{eq} = 387$ K = 114 °C La cocotte-minute permet d'obtenir une cuisson en milieu aqueux à plus haute température, d'où un gain de temps pour la cuisson.
C-8	au point triple, on a : $h_{vapeur} - h_{liquide} = L_{vap}$ $H_{vapeur} - h_{solide} = L_{sublimation}$ $H_{liquide} - h_{solide} = L_{fusion}$ par addition de ces trois équations, on obtient : $L_{vap} + L_{fusion} = L_{sublimation} = 2{,}59.10^3$ kJ.kg^{-1}

PROBLÈME 2 : Électricité

A	**Étude d'un circuit RL**
A-1	**Étude en régime transitoire**
A-1-1	on ne peut pas affirmer <u>a priori</u> la continuité de la tension aux bornes de la bobine à t = 0. Mais le courant dans la bobine est continu, donc nul à t = 0 ; on a donc un courant (de même valeur) non nul dans R et dans R/2 à $t = 0^+$; il y a donc discontinuité du courant dans R à t = 0. Plus précisément, on a un pont diviseur de tension :

	$s(t=0^+) = \frac{R/2}{R + R/2} E = \frac{E}{3}$ il y a donc discontinuité de la tension s à t = 0. Le courant dans R est le même que dans R/2, à $t = 0^+$; il vaut donc : $i(t=0^+) = \frac{E/3}{R/2} = \frac{3}{2}\frac{E}{R}$;
A-1-2	lorsque t tend vers l'infini, les signaux tendent vers des limites continues ; la bobine devient équivalente à un fil ; donc :s(t) tend vers 0
A-1-3	en notation complexe : $\underline{s} = \frac{\underline{z_{eq}}}{\underline{z_{eq}} + R}\underline{E}$ où : $\underline{z_{eq}} = \frac{jL\omega . R/2}{jL\omega + R/2} = \frac{jLR\omega}{2jL\omega + R}$ Donc : $\underline{s} = \frac{jLR\omega}{jLR\omega + R(2jL\omega + R)}\underline{E} = \frac{jL\omega}{3jL\omega + R}\underline{E}$ On déduit de cette fonction de transfert l'équation différentielle régissant l'évolution du circuit en régime variable : $R.s + 3L\frac{ds}{dt} = L\frac{dE}{dt} = 0 \quad si \quad t > 0$ ou encore : $\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau}s = 0$ avec : $\tau = \frac{3L}{R}$
A-1-4	l'intégration de cette équation différentielle donne, compte tenu de la condition initiale : $s(t=0^+) = E/3$ (cf question A-1-1) : $s(t) = \frac{E}{3}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
A-1-5	

A-1-6	on veut : $s(t_0) = E/30$; on en déduit : $\exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) = 0{,}1$; d'où : $t_0 = \tau.\ln(10)$
A-1-7	il suffit, pour visualiser s(t), de brancher l'oscilloscope entre l'extrémité inférieure droite du circuit (où on met la masse de l'oscilloscope, reliée à la masse du générateur) et l'extrémité supérieure droite du circuit ; on règle l'affichage sur l'écran de telle sorte que le signal passe de $s(t=0^+)$ à 0 sur toute la hauteur de l'écran de l'oscilloscope, puis on lit sur l'axe horizontal (échelle de temps) le temps au bout duquel on a $s(t_0) = s(t=0^+)/10$.
A-1-8	AN : L = 0,4 mH
A-1-9	il faut que l'on ait : $\tau \ll T$, c'est-à-dire : $f \gg 1/\tau = 1$ MHz (par exemple, typiquement, f = 1 kHz).
A-2	**Étude en régime sinusoïdal**
A-2-1	en haute fréquence, la bobine est équivalente à un coupe-circuit ; en basse fréquence, la bobine est équivalente à un court-circuit Donc : En haute fréquence, si v_e est la tension d'entrée et v_s la tension de sortie : $v_s = \frac{R/2}{R + R/2} v_e = \frac{v_e}{3}$ En basse fréquence : $v_s = 0$ Le filtre est un filtre passe-haut
A-2-2	dans le cas général : on a le calcul déjà utilisé à la question A-1-3 : $\underline{v_s} = \frac{jLR\omega}{jLR\omega + R(2jL\omega + R)} \underline{v_e} = \frac{jL\omega}{3jL\omega + R} \underline{v_e}$ $\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1 + \frac{f_0}{jf}}$ qui peut se mettre sous la forme : avec : $H_0 = 1/3$ $f_0 = \frac{R}{6\pi L}$
A-2-3	la fréquence de coupure à -3db est définie par : $\left\|\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right\| = \frac{\left\|\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right\|_{max}}{\sqrt{2}}$ $\frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f_c}\right)^2}}$ Donc : , ce qui donne immédiatement : $f_c = f_0$

	Expérimentalement, on visualise simultanément à l'oscilloscope e(t) et s(t) ; on règle l'amplitude de e(t) à 2 carreaux par exemple et on fait varier f jusqu'à ce que l'amplitude s(t) soit $2.\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ carreau (avec la même échelle pour e(t) et s(t) !)
A-2-4	$\lvert H\rvert = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{f_0}{f}\right)^2}}$ $\arg(H) = -\text{Arc}\tan\left(\frac{f_0}{f}\right)$ donc :  et 
B	**Étude d'un circuit plus complexe**
B-1	à $t = 0^-$: $i_4(t=0^-) = 0$

	la bobine se comportant comme un court-circuit : $i_2(t=0^-) = 0$ $i(t=0^-) = i_1(t=0^-) = i_3(t=0^-) = E/(2R)$ à $t = 0^+$: il y a continuité des courants dans les bobines ; donc : $i_1(t=0^+)= E/(2R)$ $i_4(t=0^+) = 0$ on écrit alors : $E = R.i(t=0^+) + R.i_2(t=0^+) + R.i_3(t=0^+) = R.i(t=0^+) + R(i(t=0^+)-E/(2R)) + R(i(t=0^+)- i_4(t=0^+))$ $= 3R.i(t=0^+) – E/2$ d'où : $i(t=0^+) = E/(2R)$ puis : $i_2(t=0^+) = i(t=0^+)-E/(2R) = E/(2R) – E/(2R) =0$ $i_3(t=0^+) = i(t=0^+)- i_4(t=0^+) = E/(2R) – 0 = E/(2R)$ et enfin : $s(t=0^+) = R.i_3(t=0^+) = E/2$
B-2	au bout d'un temps infini, les deux bobines sont équivalentes à des courts-circuits ; donc : $s \to 0$ $i \to E/R$ $i_3 \to 0$ $i_2 \to 0$ $i_4 = i \to E/R$ $i_1 = i – i_2 \to E/R$
B-3	l'équation caractéristique de l'équation différentielle décrivant le circuit est : $3r^2 + \frac{4}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0$ le discriminant est : $\Delta = \frac{16}{\tau^2} - \frac{12}{\tau^2} = \frac{4}{\tau^2} > 0$ les racines sont donc : $r_1 = \frac{-\frac{4}{\tau} + \frac{2}{\tau}}{6} = -\frac{1}{3\tau}$ $r_2 = \frac{-\frac{4}{\tau} - \frac{2}{\tau}}{6} = -\frac{1}{\tau}$ la solution la plus générale de l'équation différentielle est donc : $s(t) = A.\exp\left(-\frac{t}{3\tau}\right) + B.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ où A et B sont deux constantes d'intégration

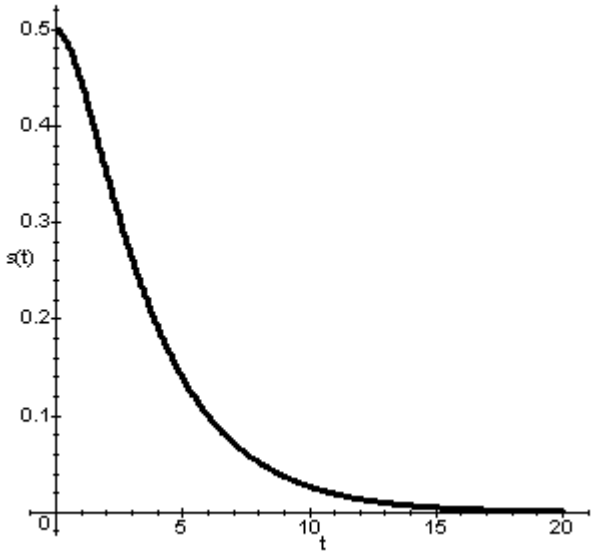
allure de s(t) :
$s(t=0^+) = E/2$
pour étudier $ds/dt(t=0^+) = 0$, il suffit d'intégrer l'équation différentielle entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$:

$$3\left(\frac{ds}{dt}(t=0^+) - \frac{ds}{dt}(t=0^-)\right) + \frac{4}{\tau}\left(s(t=0^+) - s(t=0^-)\right) + \frac{1}{\tau^2}\int_{u=0^-}^{u=0^+} s(u)du = 0$$

donc : $$3\left(\frac{ds}{dt}(t=0^+) - 0\right) + \frac{4}{\tau}.(0) + \frac{1}{\tau^2}.0 = 0$$

d'où : $$\frac{ds}{dt}(t=0^+) = 0$$

on a donc l'allure suivante :



B-4-a

en haute fréquence, les bobines étant équivalentes à des coupe-circuits, on a :

$s = (1/3)E$

en basse fréquence, les bobines étant équivalentes à des courts-circuits, on a :

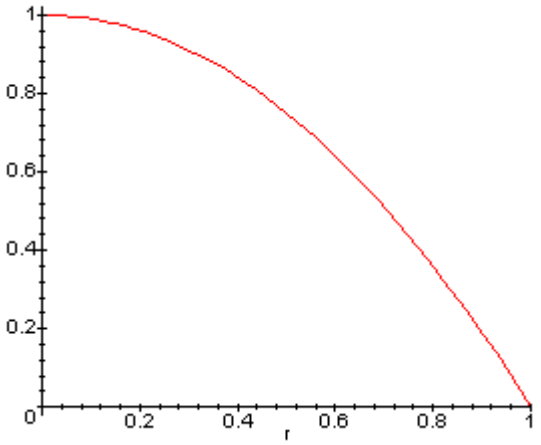
$s = 0$

il s'agit d'un filtre passe-haut

B-4-b	en appelant $\underline{z_{eq}}$ l'impédance équivalente à L en parallèle avec R/2, on a immédiatement (diviseur de tension) : $\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{z_{eq}}}{2\underline{z_{eq}} + R}$, avec : $\underline{z_{eq}} = \frac{jL\omega R}{jL\omega + R}$ après calculs, on obtient : $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jL\omega R(R + jL\omega)}{(R + jL\omega)(3jLR\omega + R^2)}$ en simplifiant par : $(R + jL\omega)$, on obtient : $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jL\omega R}{(3jLR\omega + R^2)}$ on constate que l'équation différentielle qu'on peut déduire de la première forme de la fonction de transfert diffère de celle fournie à la question B-3 : ceci est lié à la simplification par le facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fonction de transfert, simplification légitime en régime sinusoïdal permanent mais pas lorsque le signal d'entrée et un échelon ou, plus généralement, en régime quelconque

PROBLÈME 3 : Viscosimètre

1	1) le système est le fluide contenu à l'intérieur du volume de contrôle de rayon r et de longueur L. les forces s'exerçant sur ce système sont : ▪ les forces pressantes : $P_1\pi r^2\vec{u}_z$; $-P_2\pi r^2\vec{u}_z$ ▪ le poids : $\mu g\pi r^2\vec{u}_z$ ▪ la force de viscosité : $+2\pi rL\eta\frac{\partial v}{\partial r}\vec{u}_z$
2	2) en régime permanent, la somme de toutes les forces précédentes est nulle : $P_1\pi r^2\vec{u}_z - P_2\pi r^2\vec{u}_z + \mu g\pi r^2\vec{u}_z + 2\pi rL\eta\frac{\partial v}{\partial r}\vec{u}_z = \vec{0}$ on en déduit, puisque v ne dépend que de r et donc que $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{dv}{dr}$: $\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2 + \mu gL}{2L\eta}r$ soit, en posant : $k = -\frac{P_1 - P_2 + \mu gL}{2L\eta}$ $\frac{dv}{dr} = kr$
3	l'équation précédente s'intègre immédiatement en : $v(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \alpha$ la constante d'intégration α s'obtient à partir de la condition aux limites : v(R) = 0 ; donc : $\alpha = -\frac{1}{2}kR^2$ et, finalement : $v(r) = \frac{P_1 - P_2 + \mu gL}{4L\eta}\left(-r^2 + R^2\right)$

4	
5	$dQ = v(r).2\pi r dr = \frac{1}{2}k\left(r^2 R^2\right)2\pi r dr$
6	$Q = \int_{r=0}^{r=R} \frac{1}{2}k\left(r^2 - R^2\right)2\pi r dr = -\pi k \frac{R^4}{4}$ donc : $Q = \frac{P_1 - P_2 + \mu g L}{L}\frac{\pi R^4}{8\eta}$ si la pesanteur est négligeable : $Q = \frac{P_1 - P_2}{L}\frac{\pi R^4}{8\eta}$ c'est la loi de Poiseuille
7	au sommet et à la base (en négligeant la courbure du jet), il y a continuité de la pression, qui est donc égale à la pression atmosphérique P_0 : $P_2 = P_3 = P_0$ dans le récipient supérieur, large, le liquide est quasiment au repos : on a donc la loi de l'hydrostatique : $P_1 - P_3 = P_1 - P_0 = \mu g h$
8	immédiatement : $Q = -\pi R'^2 \frac{dh}{dt}$
9	le débit Q est aussi donnée par son expression dans le capillaire inférieur, expression obtenue plus haut : $Q = \frac{P_1 - P_2 + \mu g L}{L}\frac{\pi R^4}{8\eta}$ en égalant ces deux expressions du débit, on obtient donc : $\frac{P_1 - P_2 + \mu g L}{L}\frac{\pi R^4}{8\eta} = -\pi R'^2 \frac{dh}{dt}$ et, puisque : $\mu g h = P_1 - P_3 = P_1 - P_0 = P_1 - P_2$, $\frac{\mu g h + \mu g L}{L}\frac{\pi R^4}{8\eta} = -\pi R'^2 \frac{dh}{dt}$

	qui se réécrit : $\frac{dh}{dt}+\frac{\mu g}{L}\frac{R^4}{R'^2}\frac{1}{8\eta}(h+L)$ si on pose : $\frac{1}{\tau}=\frac{\mu g}{L}\frac{R^4}{R'^2}\frac{1}{8\eta}$, on obtient : $\frac{dh}{dt}+\frac{1}{\tau}(h+L)=0$ qui s'intègre en : $h+L=A.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ la constante d'intégration A étant obtenue par la condition initiale : $h_0+L=A$ donc : $h(t)=(h_0+L)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)-L$ homogénéité de τ : $[\tau]=\frac{[F]}{[L]^2}[T][L]\frac{1}{\frac{[F]}{[L]^3}[L]^2}=[T]$
10	10) si t_1 est l'instant au bout duquel le niveau a baissé de $\Delta h = 5cm$ (t_1 = 7 minutes) : $h_0-\Delta h=(h_0+L)\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)-L$ on en déduit numériquement : $\tau = 1{,}46.10^3$ s puis on déduit de : $\frac{1}{\tau}=\frac{\mu g}{L}\frac{R^4}{R'^2}\frac{1}{8\eta}$ $\nu=\frac{\eta}{\mu}=1{,}40.10^{-4}$ SI