E3A PC2006

PREMIERE PARTIE
DISPOSITIF INTERFERENTIEL ET METHODE DE DETECTION

A Interféromètre de Michelson

1 Interférences à deux ondes

A1 a

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s}_1(M,t) + \underline{s}_2(M,t) = ae^{j(\omega t - \varphi_1(M))} + ae^{j(\omega t - \varphi_2(M))}$$

$$\underline{s}(M,t) = ae^{j\omega t}e^{-j(\varphi_1+\varphi_2)/2}(e^{j(\varphi_2-\varphi_1)/2} - e^{-j(\varphi_2-\varphi_1)/2}) \Rightarrow \underline{s}(M,t) = ae^{j\omega t}e^{-j(\varphi_1+\varphi_2)/2}(2\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})$$

A1b L'éclairement est $I = \underline{s}\,\underline{s}^*$ soit $I = 4a^2\cos^2(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}) = 2a^2(1+\cos(\varphi_2-\varphi_1))$

Avec $I_0 = a^2$, représente l'intensité associée à chaque source ($I_0 = \underline{s}_1\underline{s}_1^*$)

A1c $I = 2I_0(1+\cos(\delta\varphi))$)

On observe des maxima d'éclairement pour $\delta\phi = 2p\pi$

et des minima d'éclairement pour $\delta\phi = (2p+1)\pi$

2 Source monochromatique

A2a contact optique : $\delta_0 = 0$

Pour déterminer le contact optique en TP, a partir d'un Michelson réglé en lame d'air, on fait « rentrer» les anneaux, puis avec une source blanche, on cherche le « blanc pur », c'est-à-dire le blanc entouré de s « teintes de Newton » par un infime chariotage.

A2b $I(\delta) = 2I_0(1+\cos(2\pi\frac{\delta_0}{\lambda}))$

A2c $\Delta I_{gr} = 2I_0(\cos(2\pi\frac{\delta}{\lambda}) - \cos(2\pi\frac{\delta_0}{\lambda})) = 2I_0(\cos(2\pi\frac{(\delta_0+\varepsilon L}{\lambda}) - \cos(2\pi\frac{\delta_0}{\lambda}))$

(avec $\cos(x+\alpha)=\cos x + \alpha \sin x$)

$$\Delta I_{gr} = 2I_0\ \frac{2\pi L}{\lambda}\varepsilon\ \ \sin(2\pi\frac{\delta_0}{\lambda}) = I_0[\frac{4\pi L}{\lambda}\sin(2\pi\frac{\delta_0}{\lambda})]\varepsilon$$

A2d La variation d'éclairement est la plus grande si $\left|\sin(2\pi\frac{\delta_0}{\lambda})\right| = 1$,

donc si $2\pi\frac{\delta_0}{\lambda} = (2p+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta_0 = \frac{2p+1}{4}\lambda$

A2e $\frac{\Delta I_{gr}}{I_0} = \frac{4\pi L}{\lambda}\varepsilon = \frac{4*\pi*10^5}{1.0610^{-6}}10^{-21} = 1.210^{-9}$

Cette variation relative d'éclairement est très faible

3 Influence de la largeur spectrale du LASER

A3a Les deux ondes de fréquences différentes sont incohérentes : les éclairements associés s'additionnent.

$$I_0 = \int dI_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(\omega)\,d\omega = K\Delta\omega$$

A3b $dI = 2dI_0(1+\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}) = 2Kd\omega(1+\cos\omega\frac{\delta}{c}) = 2I_0\frac{d\omega}{\Delta\omega}(1+\cos\omega\frac{\delta}{c})$

(erreur d'énoncé , le résultat est fonction de ω et non pas ω_0)

A3c $I = \int dI = \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} 2I_0(1+\cos\omega\frac{\delta}{c})\frac{d\omega}{\Delta\omega} = 2\frac{I_0}{\Delta\omega_0}\left[\omega+\frac{c}{\delta}\sin\omega\frac{\delta}{c}\right]_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}$

$$I = 2\frac{I_0}{\Delta\omega}[\Delta\omega+\frac{c}{\delta}2\cos\omega_0\frac{\delta}{c}\sin\Delta\omega\frac{\delta}{2c}]$$

$$I = 2I_0[1+\frac{\sin\Delta\omega\frac{\delta}{2c}}{\omega\frac{\delta}{2c}}\cos\omega_0\frac{\delta}{c}] = 2I_0[1+\sin c(\Delta\omega\frac{\delta}{2c})\cos\omega_0\frac{\delta}{c}]$$

Soit encore

$$V(\delta) = \sin c(\Delta\omega\frac{\delta}{2c})$$

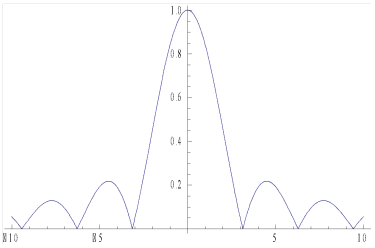
Le facteur de visibilité est donc

Si Δω = 0 , le facteur de visibilité vaut 1 : on retrouve le résultat du A2b

A3d V(δ) = facteur de visibilité ou contraste

```
Plot[Abs[Sin[x]/x],{x,-10,10}]
```

Les zéros de la fonction sont en $\delta = p\frac{2\pi c}{\Delta\omega} = pl_c$



A3e La visibilité est très réduite si on sort du pic central, donc si on est au delà du premier zéro de la fonction V , soit pour δ>lc

A3f $\delta_{0max} \approx lc$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi c}{l_c\omega_0} = 2\pi\frac{\lambda_0}{l_c} = 2\pi\frac{10^{-6}}{10} = 610^{-7}$$

B PRISE EN COMPTE DES FLUCTUATIONS DE PUISSANCE DU LASER

B1a $(\Delta I)_{flu} = 2\Delta I_0(1+\cos 2\pi\frac{\delta_0}{\lambda})$

B1b $(\Delta I)_{flu}$ est minimal si le cos vaut -1 donc $2\pi\frac{\delta_0}{\lambda} = (2k+1)\pi \Rightarrow \delta_0 = (k+\frac{1}{2})\lambda$

Cette condition (multiple impair de λ/2) est incompatible avec la condition obtenue en A2d (multiple impair de λ/4)

$d'_1 = d_1 + (n_1 - 1)e$

B2a $\delta'_0 = 2(d'_2 - d'_1)$ et $d'_2 = d_2 + (n_2 - 1)e$ => $\delta'_0 = \delta_0 + 2(n_2 - n_1)e$

Donc $\delta' = \delta'_0 + L\varepsilon = \delta_0 + 2(n_2 - n_1)e + L\varepsilon$

Soit encore $\delta' = \delta'_0 + L\varepsilon = \delta_0 + + L\varepsilon + 2(2a_0 \cos\Omega t)e$

B2b $I = 2I_0(1 + \cos 2\pi\frac{\delta'}{\lambda}) = 2I_0(1 + \cos 2\pi\frac{\delta_0}{\lambda} + 2\pi\frac{L\varepsilon}{\lambda} + 2\pi\frac{4ea_0\cos\Omega t}{\lambda})$

$\Phi_0 = 2\pi\frac{\delta_0}{\lambda}$ $\alpha = 2\pi\frac{L}{\lambda}$ et $m = +\pi\frac{4e\,a_0}{\lambda}$

B3a Le signal V(t) comporte
-une composante continue proportionnelle à m^2

-une composante de fréquence Ω/2π proportionnelle à 2mαε

-une composante de fréquence 2Ω/2π proportionnelle à m^2

Pour ne garder que la composante de fréquence Ω/2π , il faut un <u>filtre passe–bande</u>

B3bSans calculs = en regardant le comportement haute et basse fréquence du filtre proposé
Haute fréquence : on remplace les capa par des fils : la résistance kR est shuntée : $V_s=V_-=V_+=0$
Basse fréquence : on remplace les capa par des interrupteurs ouverts : dans kR , i=0 => $V_s=V_-=V_+=0$
C'est bien un passe-bande

B3c AO idéal $V_-=V_+$ et $V_+=0$

Th de Millman en V- $0 = V_- = \frac{V_A\,jC\omega + V_s/kR}{jC\omega + 1/kR} => V_A = -\frac{V_s}{jkRC\omega}$

Th de Millman en A $V_A = \frac{Ve/R + 0/R + jC\omega Vs + jC\omega * V-}{2/R + 2jC\omega} => V_A = \frac{Ve + jRC\omega Vs}{2(1 + jRC\omega)}$

D'où $\frac{Ve + jRC\omega Vs}{2(1 + jRC\omega)} = -\frac{V_s}{jkRC\omega} => jkRC\omega(Ve + jRC\omega Vs) = -2(1 + jRC\omega)V_s$

$jkRC\omega Ve = -2(1 + jRC\omega)V_s - kjRC\omega jRC\omega Vs = -[2 + 2jRC\omega + k(jRC\omega)^2]$

$\frac{V_s}{V_e} = \frac{k/2}{1 + \frac{k}{2}jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$

$H_0 = -k/2$

$Q = \sqrt{k/2}$

$\Omega_0 = \sqrt{2/k}\,\frac{1}{RC}$

On identifie avec l'expression canonique proposée

$$G_{dB} = 20\log|H| = 20\log\left|\frac{V_s}{V_e}\right|$$

B3d

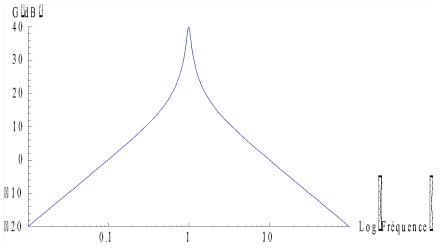


Diagramme de Bode en amplitude

Ici, si Q = 10 , H_0 = -100

Asymptotes de pente 20 dB/décade et -20 dB/décade , se croisant en x= 1, y=20 log $|H_0/Q|$=20

En x= 1 , le Gain vaut 20 log$[H_0]$=40 dB

```
H[x_]=-100/(1-I*10*(x-1/x))
LogLinearPlot[20*Log[10,Abs[H[x]]], {x,10^-2,10^2},PlotRange→All]
```

B3e Bande passante : $[\omega_1,\omega_2]$ dans lequel $H>H_{max}/\sqrt{2}$ donc $G<G_{max}-3$

Les valeurs $\omega_1$et $\omega_2$sont donc les solutions de $1+Q^2(x-1/x)^2=2 \Rightarrow x-1/x=\pm 1/Q$

Soit encore $x^2 \pm x/Q-1=0$

On retient la racine positive de chacune de ces équations : $x_1=-\frac{1}{2Q}+\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$ et $x_2=\frac{1}{2Q}+\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$

D'où la largeur de la bande passante : $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=\frac{\Omega_0}{Q}$

B3f Le filtre est bien adapté si $\Omega_0=\Omega$

B4a En sortie du filtre : $\underline{Vs}=\gamma I_0[m^2\,\underline{H}(0)+2m\alpha\varepsilon\underline{H}(\Omega)e^{j\Omega t}+m^2\underline{H}(2\Omega)e^{j2\Omega t}]$

$$\underline{Vs}=\gamma I_0[2m\alpha\varepsilon\ H_0e^{j\Omega t}+m^2\frac{H_0}{1+jQ(2-\frac{1}{2})}e^{j2\Omega t}]$$

Soit

$$A_{2\Omega}=\gamma I_0\ m^2\frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{9}{4}Q^2}}$$

D'ou les amplitudes $A_\Omega=\gamma I_0\ 2m\alpha\varepsilon\ H_0$ et

$$(\Delta V)_{flu}=V(I_0+\Delta I_0,0)-V(I_0,0)=b\frac{m^2H_0}{\sqrt{1+\frac{9}{4}Q^2}}\gamma\Delta I_0$$

B4b

$$(\Delta V)_{Og}=V(I_0,\varepsilon)-V(I_0,0)=2m\alpha\varepsilon H_0\ I_0$$

B4c

$$\frac{(\Delta V)_{Og}}{(\Delta V)_{flu}}=\frac{2m\alpha\varepsilon H_0\ I_0}{bm^2H_0}\sqrt{1+\frac{9}{4}Q^2}=\frac{I_0}{\Delta I_0}\frac{2\alpha\varepsilon}{bm}\sqrt{1+\frac{9}{4}Q^2}$$

Ce rapport est d'autant plus grand que b est petit (bon filtrage de Vs) , et que le facteur de qualité du filtre est élevé .

On peut "rattraper" une valeur de m pas trop petite(m lié à la qualité des lames= optique, sûrement coûteux) avec un bon filtre (bonne électronique= pas trop onéreux)

A.N $\frac{(\Delta V)_{Og}}{(\Delta V)_{flu}} == \frac{I_0}{\Delta I_0}\frac{2\alpha\varepsilon}{bm}\sqrt{1+\frac{9}{4}Q^2} = 1.7$

Ce rapport n'est pas très élevé, il est encore difficile de s'affranchir des fluctuations du laser.

B4d Pour ce filtre G(Ω)= 0 et G(2Ω)= -43 dB alors qu'avec le précédent : G(Ω)=0 et G(2Ω)= -23.5dB G(2Ω)= -43 dB au lieu de -23 dB => écart de 20 log (10) Le filtrage est donc meilleur : le rapport d'amplitude (donc b) entre les deux composantes est augmenté d'un facteur 10 . (G(2Ω)= -43 dB au lieu de -23 dB => écart de 20 log (10))

$\frac{(\Delta V)_{Og}}{(\Delta V)_{flu}} \approx 17$ tout à fait suffisant pour permettre la détection des ondes gravitationnelles



Détecteur interférométrique VIRGO sur le site de Cascina, près de Pise [CNRS/INFN]