

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
ІНСТИТУТ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ ТА РОБОТОТЕХНІКИ
КАФЕДРА ПРОГРАМНИХ ТА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ
ТЕХНОЛОГІЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт
**“ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ НА ОСНОВІ
МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ”**
з дисципліни
“Сучасні технології управління”
для магістрів зі спеціальності 174 – “Автоматизація та
комп'ютерно-інтегровані технології”

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни "Сучасні системи керування" ч.1 "Побудова моделей об'єктів керування на основі експериментальних даних" для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю G7 - Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка . / Укладач: Беглов К.В. – Одеса: НУ «Одеська політехніка», 2024. – 32 с.

Укладач: К.В. Беглов, доц. каф. "Програмних та комп'ютерно-інтегрованих технологій ", канд. техн. наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри " Програмних
та комп'ютерно-інтегрованих технологій"
Протокол №2 від 26.09.2022

ВСТУП

Центральним поняттям у математичному моделюванні наукових досліджень про є поняття " математичної моделі ". Моделью у сенсі цього поняття називають об'єкт, який може заміщати оригінал якийсь стадії його вивчення. Математичною моделлю називають тріаду: систему рівнянь і нерівностей, що описують окремі сторони оригіналу, метод (алгоритм) їх вирішення та програму (текст програми) рішення на ЕОМ.

Відповідно до загального алгоритму складання математичної моделі є встановлення математичних зв'язків між параметрами та показниками якості процесу. Якщо про об'єкт, що моделюється, відомі тільки вхідні і вихідні параметри процесу, то для такого опису використовуються експериментальні (емпіричні) математичні зв'язки.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Упорядкування математичних моделей, заснованих на експериментально встановлених співвідношеннях, має особливості. Структурна схема алгоритму, що відбиває ці особливості, наведено на рис.1.

Етап 1. Постановка задачі зводиться до встановлення математичних зв'язків між вхідними факторами, що впливають на перебіг процесу, та вихідними параметрами, що характеризують його властивості (якість). Чинники є незалежними і можуть приймати довільні значення x_i на технологічно можливих інтервалах, а параметри – залежними, тому що їх значення y_i визначаються властивостями процесу та зміною незалежних змінних.

Етап 2. Вибір виду моделі та плану експерименту.

Експериментальне вивчення якоїсь невідомої закономірності $y = f(x_i)$ дає результати спостережень як таблиці відповідних значень y_i і x_i . За ними будують криву залежності y від x або представляють наближеною математичною залежністю $y = f(x)$.

Вимога : найбільше наближення $f(x)$ та $f(x)$ у певному інтервалі значень x .

Вибір $y = f(x)$ виробляють з урахуванням теоретичних знань, порівнянь отриманих графіків з типовими залежностями.

Часто використовують лінеаризацію $y = f(x)$, де y і x заміняють $X = \psi(x, y)$ і $Y = \xi(x, y)$, які дають рівняння прямої лінії:

$$Y = A + BX, \text{ де } A \text{ і } B - \text{ коефіцієнти лінійного рівняння.}$$

Етап 3. Проведення експерименту.

Експеримент (досвід) повторюють відповідно до плану, досвід рандомізують за часом.

Етап 4. Статистична обробка (оцінка) результатів дослідів.

Після реалізації всіх дослідів експерименту проводять статистичну оцінку отриманих результатів, а саме:

— виключення грубих помилок;

— обчислення середніх за дослідом значень спостережень $\bar{y}_n$;

— визначення вибірових значень дисперсій S^2 удля оцінки випадкових та відносних помилок.

Узагальнена структура алгоритму складання математичної моделі
за експериментальними даними

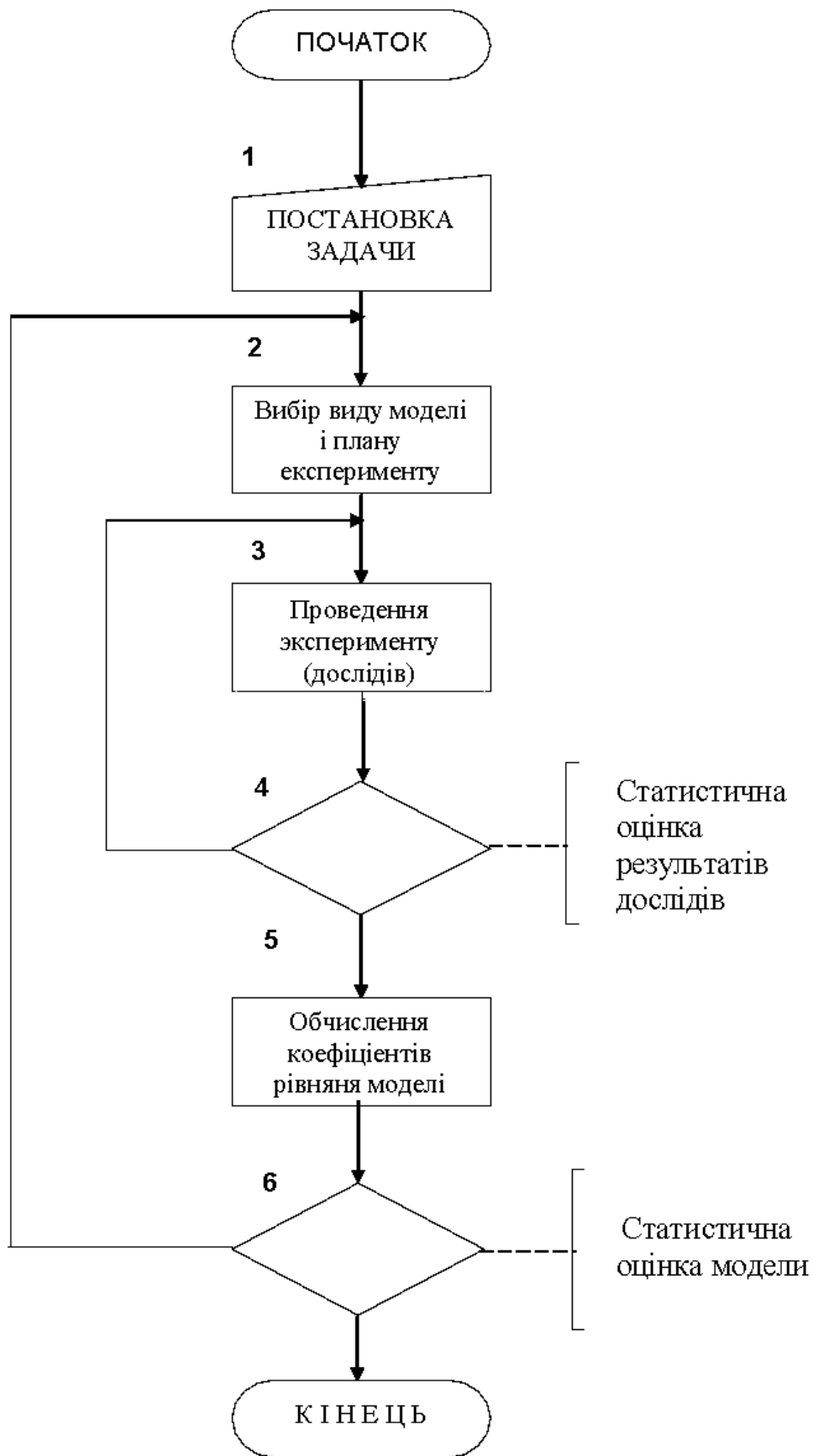


Рис.1

Етап 5. Обчислення коефіцієнтів у рівнянні опису.
Найбільш поширений метод найменших квадратів (МНК).

Суть методу: Нехай проведено N дослідів, за їх результатами отримано середні значення y_n , що відповідають певним значенням фактора x_n . Необхідно визначити коефіцієнти b_i у математичній формулі

$$y_n = f(x_n, b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

Умова найкращого наближення до досвідчених даних $\bar{y}_n$ коли

$$S_y^2 = \sum_{n=1}^N (\bar{y}_n - \hat{y}_n)^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

Якщо (1) диференційована, то необхідне умовою мінімуму

$$S = \sum_{n=1}^N [\bar{y}_n - f(x_n, b_i)]^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

є виконання рівності

$$\frac{\partial S}{\partial b_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial b_n} = 0; \quad (4)$$

Підставивши (4) до (3) отримаємо систему нормальних рівнянь, вирішенням яких будуть невідомі коефіцієнти b_i рівняння (1), які забезпечують найкраще наближення обчислених y_n до досвідчених $\bar{y}_n$.

Етап 6. Статистична оцінка рівняння регресії.

Рівняння, отримані МНК, піддаються статистичного аналізу, заснованому на оцінках дисперсій, а саме:

1. проводиться оцінка значимості коефіцієнтів рівняння b_i ;
2. перевіряється адекватність (відповідність) рівняння експериментальним даним.

Перший крок перевіряється за критерієм Стюдента (t-критерій)

$$t = \frac{|b_i|}{S_{b_i}} \quad (5)$$

де S_{b_i} - Середньоквадратичне відхилення i -го коефіцієнта рівняння.

Розраховане (5) значення порівнюють з табличним (критичним) $t_{кр}$. При $t > t_{кр}$ (6) коефіцієнт b_i вважається значимим, інакше його прирівнюють до нуля та виключають із (1).

Отримане в результаті рівняння із значимими коефіцієнтами перевіряють на адекватність реальному процесу за критерієм Фішера (ставлення більшої дисперсії до меншої)

$$F = \frac{S_{неад}^2}{S_y^2} \quad i \quad F = \frac{S_y^2}{S_{неад}^2} \quad (7)$$

де $S_{неад}^2$ - дисперсія неадекватності, що характеризує "розкид" обчислених за рівнянням (1)

значень $\hat{y}_n$ та результатів відповідних дослідів $\bar{y}_n$;

S_y^2 - дисперсія помилки досвіду, що характеризує "розкид" значень y_{ni} у паралельних

дослідах та середнього результату досвіду $\bar{y}_n$.

Розраховане (7) значення порівнюють з табличним (критичним) $F_{кр}$.

При $F < F_{кр}$ (8) рівняння регресії адекватно визначає експериментальні дані.

Перевірку адекватності не проводять, якщо число значущих коефіцієнтів у рівнянні дорівнює кількості дослідів.

Крім адекватності математичного досвіду досліджують інформаційну здатність тобто.

Вираховують критерій Фішера

$$F = \frac{S_{обц}^2}{S_{неад}^2} \quad (9)$$

де $S_{обц}^2$ - дисперсія (розсіяння значень) стосовно загальному середньому $\bar{y}_{обц}$ з усіх результатів N дослідів.

Отримане значення F порівнюють із табличним $F_{кр}$.

Якщо $F \leq F_{кр}$, то математичний опис немає ніякої інформаційної цінності.

Показник інформаційної спроможності

$$\Theta_u = 100(\sqrt{F} - 1) \quad (10)$$

Якщо $\Theta_i < 30 \dots 50\%$, то скористатися таким математичним описом не рекомендується.

Лабораторна робота №1. Математична обробка експериментальних даних.

Мета роботи: - Вивчення математичних методів оцінки точності та надійності вимірювання експериментальних даних.

Усі реальні результати спостереження (вимірювання) – випадкові величини, що відхиляються від справжнього значення. Ці відхилення називають *помилкою спостережень*.

Три типи помилок: систематичні, випадкові та грубі.

Завдання - виявлення грубих, облік систематичних та оцінка випадкових помилок.

1.1 Основні статистичні показники.

1.1.1 Середнє арифметичне.

$$\bar{y} = \sum_{u=1}^m y_u / m, \quad (1.1)$$

де m – кількість вимірів (повторень дослідів);

u – номер досвіду (вимірювання).

1.1.2 Абсолютна помилка u -го значення вимірюваної величини

$$\Delta y_u = y_u - \bar{y}, \quad (1.2)$$

де y_u – результат вимірів;

$\bar{y}$ – Справжнє значення.

1.1.3 Середньоквадратичне відхилення – кількісна оцінка розкиду результатів вимірів y_u навколо значення $\bar{y}$.

$$\sigma = \sqrt{1/m \sum_{u=1}^m (y_u - \bar{y})^2} \quad (1.3)$$

1.1.4 Вибіркова дисперсія одиничного результату з результатів m .

$$S_{y_u}^2 = \sum_{u=1}^m (y_u - \bar{y})^2 / (m-1) \quad (1.4)$$

1.1.5 Дисперсія середнього результату.

$$S_y^2 = S_{y_u}^2 / m \quad (1.5)$$

1.1.6 Однорідність двох дисперсій за критерієм Фішера.

(F – критерій) – для серії багаторазових вимірів одного параметра.

Цей випадок для двох серій.

$$F = S_{\max}^2 / S_{\min}^2 \quad (1.6)$$

Якщо $F < F_{кр}$ (табличного), де $F_{кр} = f(q, f_1, f_2)$

де q – рівень значимості дорівнює 5% при довірчій ймовірності

$p = 95\%$ (Для технічних розрахунків);

f_1, f_2 – числа ступенів свободи для 1-ї та 2-ї дисперсій відповідно .

$$f = m - 1 \quad (1.7)$$

де m – кількість вимірів.

1.1.7 Однорідність більше двох дисперсій за критерієм Кохрена (G – критерій).

$$G = \frac{S_{y_U}^2 \max}{\sum_{u=1}^N S_{y_U}^2} \quad (1.8)$$

де N - Число порівнюваних дисперсій (серій дослідів). Але кількість дослідів $m = \text{const}$.

Якщо $G < G_{кр}(q, N, f)$ дисперсії однорідні ($G_{кр}$ визначається за таблицями).

1.2. Виняток грубих помилок дослідів.

Розглянемо кілька методів виключення грубих помилок дослідів:

1.2.1 Оцінка максимальних відмінностей результатів дослідів у .

Результати m -дослідів розташовують у ряд за зростанням

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_{m-1}, y_m \quad (1.9)$$

Якщо

$$\text{"Сумнівний" результат - } y_1, \text{ то } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{y_m - y_1} \quad (1.10)$$

або

$$\text{"Сумнівний" результат - } y_m, \text{ то } \alpha = \frac{y_m - y_{m-1}}{y_m - y_1} \quad (1.11)$$

При $\alpha > \alpha_{кр}$ (табличне значення для $q = 5\%$) – це грубі помилки та його виключають з подальшої обробки.

$$\alpha_{кр} = f [q, m, \text{кількість результатів (перевіраних)}].$$

1.2.2 За критерієм Стьюдента - t .

Не використовуючи сумнівний результат - y_c за формулами (1.1) і (1.4)

розраховують $\bar{y}$ і $S_{y_U}^2$, а потім

$$t = \frac{|y_c - \bar{y}|}{\sqrt{S_{y_U}^2}} \quad (1.12)$$

Якщо $t > t_{кр}$, то y_c є грубою помилкою.

$t_{кр}$ знаходять за таблицями для $q = 5\%$, $f = m - 1$

$$t_{кр} \Rightarrow (q, f) \quad (1.13)$$

1.2.3 За критерієм максимального відхилення.

Якщо для всіх значень прораховані $\bar{y}$ і $S_{y_U}^2$, то перевірка "сумнівного" результату здійснюють за формулою:

$$r = \frac{|y_c - \bar{y}|}{\sqrt{S_{y_U}^2 \frac{m-1}{m}}} \quad (1.14)$$

Якщо $r > r_{кр}$, то " сумнівний " - груба помилка, а $r_{кр}$ - табличний при $q = 5\%$, $f = m - 2$.

1.3 Визначення відносних помилок.

1.3.1 Відносні помилки одиничного y_u та середнього результату $\bar{y}$.

$$\delta_{y_U} = \frac{E_{y_U}}{y_u}, \delta_{\bar{y}} = \frac{E_{\bar{y}}}{\bar{y}} \quad (1.15)$$

де $E_{y_U}, E_{\bar{y}}$ - довірча помилка y_u та $\bar{y}$ результатів.

1.3.2 Довірча помилка (граничне абсолютне відхилення)

$$E_{y_U} = t \cdot S_{y_U}, E_{\bar{y}} = t \cdot S_{\bar{y}} \quad (1.16)$$

де t – критерій Стюдента;

$S_{y_U}, S_{\bar{y}}$ - середньоквадратичне відхилення y_u та $\bar{y}$ результатів.

Величину t вибирають з таблиці для $q = 5\%$, f - ступенів свободи дисперсій.

1.3.3 Відносне стандартне відхилення (середньоквадратичне)

$$\Delta y_u = \frac{S_{y_U}}{y_u}, \Delta \bar{y} = \frac{S_{\bar{y}}}{\bar{y}} \quad (1.17)$$

1.3.4 Довірчий інтервал, в якому знаходиться значення вимірюваної величини.

$$\begin{aligned} y_u - E_{y_U} < y_u < y_u + E_{y_U} \\ \bar{y} - E_{\bar{y}} < \bar{y} < \bar{y} + E_{\bar{y}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Завдання.

Знайти для заданих серій дослідів вимірюваного параметра:

1. Середнє арифметичне;
2. Абсолютні та відносні помилки;
3. Знайти вибіркові та середні дисперсії результатів;
4. Перевірити однорідність двох дисперсій;
5. Одним із методів виключити грубі помилки;
6. Визначити довірчу помилку та довірчий інтервал.

Для виконання використано стандартні програми статистичних оцінок експериментальних даних.

Проаналізувати отримані результати .

Лабораторна робота №2. Складання однофакторних математичних залежностей.

Мета роботи: – підібрати емпіричні формули та скласти однофакторні математичні залежності для параметрів, пов'язаних стохастично .

2.1. Короткі теоретичні відомості.

Якщо конкретного значення x_u відповідає єдине значення y_u , то така залежність називається *функціональною*.

Якщо x_u і y_u є випадковими величинами, то зв'язок між ними називається *стохастичним*, а при зміні однієї величини параметра інший підпорядковується одному із законів розподілу випадкових величин.

Емпірична математична залежність, порівняно з теоретичною математичною залежністю, не може передбачити поведінку об'єкта за межами діапазону зміни змінних, що вивчається.

Для вирішення інтерполяційних завдань широко застосовуються емпіричні математичні описи.

При виборі виду математичної формули для опису експериментальних даних необхідно:

1. Перевірити можливості використання методу вирівнювання. А саме, неявний вид моделі (формули) за допомогою лінеаризуючих перетворень зводиться до лінійного ;
2. Обчислюють коефіцієнти, використовуючи метод найменших квадратів;
3. проводять статистичну оцінку коефіцієнтів.

Отриманий таким чином математичний опис називається *рівнянням регресії* . При цьому нелінійні залежності змінної x залежності при лінеаризації стають лінійними тільки за параметрами цієї залежності (тобто за коефіцієнтами моделі).

Якщо вид емпіричної формули $y = f(x)$, що описує парну залежність, задану сукупністю значень x_u і y_u заздалегідь не відомий, то за допомогою стандартної програми на ЕОМ необхідно отримати рівняння регресії для ряду значень x_u і y_u . [1]

Лінійний парний регресійний аналіз полягає у визначенні коефіцієнтів лінійної залежності:

$$y(x) = b_0 + b_1 x, \quad (2.1)$$

коефіцієнти b_1 та b_0 обчислюють за формулами, отриманими за методом найменших квадратів:

$$b_1 = \frac{\sum_{u=1}^N x_u \sum_{u=1}^N y_u - N \sum_{u=1}^N x_u y_u}{\left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2 - N \sum_{u=1}^N x_u^2}, \quad (2.2)$$

$$b_0 = \frac{1}{N} \left(\sum_{u=1}^N y_u - b_1 \sum_{u=1}^N x_u \right), \quad (2.3)$$

Коефіцієнт парної кореляції R , що характеризує ступінь відхилення зв'язку між x_u і y_u від лінійної, обчислюють за такою формулою:

$$R = \frac{\sum_{u=1}^N x_u y_u - \frac{1}{N} \left(\sum_{u=1}^N x_u \sum_{u=1}^N y_u \right)}{\sqrt{\sum_{u=1}^N x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2} \sqrt{\sum_{u=1}^N y_u^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{u=1}^N y_u \right)^2}}, \quad (2.4)$$

Якщо $|R|$ близький до 1, то зв'язок $y = f(x)$ лінійний. Знак R визначає знак коефіцієнта b_1 . Для якісної оцінки ступеня наближення точок до прямої обчислюють середньоквадратичні відхилення:

$$S^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{u=1}^N y_u^2 - b_1 \sum_{u=1}^N y_u - b_0 \sum_{u=1}^N x_u y_u \right), \quad (2.5)$$

Для нелінійної регресії використовують [1] спеціальні програми, що не вимагають лінеаризуючих перетворень при введенні x_u та y_u , а також при виведенні результатів обчислень.

Для обчислення коефіцієнтів використовують формули аналогічні (2.2) b_0 і b_1 (2.3), в яких зроблено такі перетворення (заміни) для регресій:

- гіперболічній

$$y(x) = b_0 + \frac{b_1}{x}, x = \frac{1}{x}, \quad (2.6)$$

- ступенева

$$y(x) = b_0 x^b; X = \ln x; Y = \ln y, \quad (2.7)$$

- показовою

$$y(x) = b_0 b_1^x; B_0 = \lg b_0; B_1 = \lg b_1; Y = \lg y, \quad (2.8)$$

- експоненційною

$$y(x) = b_0 \exp(b_1 x); Y = \ln(x), \quad (2.9)$$

- логарифмічній

$$y(x) = b_0 + b_1 \lg x; X = \lg x, \quad (2.10)$$

Формули для визначення невідомих коефіцієнтів параболічної та поліномної регресій можуть бути отримані з вирішення відповідних систем рівнянь.

Параболічна регресія забезпечує отримання трьох коефіцієнтів b_0 і b_1 наближення b_2 параболічної функції

$$y(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \quad (2.11)$$

з розв'язання системи трьох рівнянь:

$$\begin{cases} b_0 N + b_1 \sum_{u=1}^N x_u + b_2 \sum_{u=1}^N x_u^2 = \sum_{u=1}^N y_u \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_u + b_1 \sum_{u=1}^N x_u^2 + b_2 \sum_{u=1}^N x_u^3 = \sum_{u=1}^N x_u y_u \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_u^2 + b_1 \sum_{u=1}^N x_u^3 + b_2 \sum_{u=1}^N x_u^4 = \sum_{u=1}^N x_u^2 y_u \end{cases}, \quad (2.12)$$

Поліномна регресія забезпечує знаходження коефіцієнтів полінома:

$$y(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m, \quad (2.13)$$

з розв'язання системи трьох рівнянь:

$$\begin{cases} C_0 b_0 + C_1 b_1 + C_2 b_2 + \dots + C_m b_m = d_0; \\ C_1 b_0 + C_2 b_1 + C_3 b_2 + \dots + C_{m+1} b_m = d_1; \\ \dots \dots \dots \\ C_m b_0 + C_{m+1} b_1 + C_{m+2} b_2 + \dots + C_{2m} b_m = d_m, \end{cases} \quad (2.14)$$

де

$$C_j = \sum_{u=1}^N x_u^j, j = 0, 1, 2, \dots, 2m, \quad (2.15)$$

$$d_k = \sum_{u=1}^N x_u^k y_u, k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (2.16)$$

Поліном (2.13) ступеня $m < N$, де N - число пар x_u і y_u забезпечує апроксимацію (і інтерполяцію) таблично заданої функції $y_u (x_u)$ з мінімальною середньоквадратичною похибкою:

$$E = \sqrt{\sum_{u=1}^N E_u^2 / (N+1)}, \quad (2.17)$$

Якщо $m = N$, має місце нормальна інтерполяція, тобто. значення $y(x)$, обчислені за формулою (2.13) при $x = x_i$, точно збігаються із заданим y_i . За $m < N$ такого збігу загалом немає.

Таким чином, апроксимація $y_i(x_i)$ за методом найменших квадратів має більш універсальний характер, ніж звичайна інтерполяція.

Для забезпечення вибору виду математичної моделі однофакторних моделей у табл.2.1 наведено найбільш характерні графіки формул та методи їх вирівнювання.

2.2. Завдання.

Для таблично заданої функції $y_u (x_u)$ скласти математичний опис однофакторної моделі:

2.2.1 Визначити числові значення коефіцієнтів за методом найменших квадратів;

~~2.2.2 Знайти коефіцієнт парної кореляції між x_u і y_u ;~~

~~2.2.3 Знайти середньоквадратичне відхилення;~~

2.2.4 Побудувати графіки функції $y = f(x)$ та $y_u = f(x_u)$.

Для виконання використано стандартні програми парного регресійного аналізу.

Проаналізувати одержані результати, використовуючи методи порівняльного аналізу.

Лабораторна робота №3.

Ідентифікація лінійних динамічних процесів у просторі станів.

Ціль роботи: – побудувати лінійну модель одновимірної динамічної системи методом найменших квадратів.

3.1. Короткі теоретичні відомості.

Лінійні динамічні системи можна описати рівнянням стану виду:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – вектор станів}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ – вектор вхідних впливів}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_l \end{pmatrix} \text{ – вектор вихідних значень системи}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матриця станів}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \text{ – матриця входів}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{lm} \end{pmatrix} - \text{матриця виходів}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ d_{l1} & \boxtimes & d_{lm} \end{pmatrix} - \text{матриця, яка пов'язує виходи зі входами системи.}$$

При ідентифікації динамічної системи по експериментальним даним необхідно визначити коефіцієнти матриць A и B . Це можливо завдяки тому що в багатьох випадках $D=0$ та $c_{ij}=1$ або 0 . Це, так звана, канонічна форма.

Простіше ідентифікацію виконувати у дискретному часі, виконав дискретизацію рівнянь станів з кроком Δt . Дискретизація виконується шляхом заміни диференційного рівняння кінцево-різницеvim рівнянням:

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} &= \bar{A} \cdot x_k + \bar{B} \cdot u_k \\ x_{k+1} - x_k &= \bar{A} \cdot \Delta t \cdot x_k + \bar{B} \cdot \Delta t \cdot u_k \\ x_{k+1} &= x_k + \bar{A} \cdot \Delta t \cdot x_k + \bar{B} \cdot \Delta t \cdot u_k \\ x_{k+1} &= (I + \bar{A} \cdot \Delta t) x_k + \bar{B} \cdot \Delta t \cdot u_k \\ x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_{k+1} - t_k \\ u_k &= u(t_k) \\ x_k &= x(t_k) \\ y_k &= y(t_k) \end{aligned} - \text{відліки вхідних та вихідних сигналів у моменти часу } t_k.$$

$\bar{A}$, $\bar{B}$ – матриці системи у дискретному часі. Матриці C та D під час дискретизації не змінюються.

У зв'язку з тим, що вектор стану безперервної визначається за формулою:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^{t_p} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau$$

то матриця стану системи у дискретному часі має вигляд $\bar{A} = e^{A\Delta t}$, а матриця

входу $\bar{B} = (I - e^{A\Delta t}) B = (I - \bar{A}) B$.

3.2. Динамічна ідентифікація МНК на основі моделі у вигляді диференціальних рівнянь

Одним з порівняно нескладних сучасних методів динамічної ідентифікації, заснованих на результатах пасивного експерименту є **метод Калмана**.

Сутність методу полягає в наступному.

1. У процесі експлуатації через строго фіксований інтервал часу значень вхідних і вихідних функцій (сигналів) об'єкта ідентифікації.
2. Вибирають найбільш простий вид аналітичної моделі, записаної у вигляді різницевого рівняння того або іншого порядку.
3. За результатами експерименту й прийнятого типу моделі МНК забезпечує мінімум суми квадратів відхилення відгуків моделі від відгуків об'єкта, що визначають коефіцієнт різницевого рівняння.
4. Вирішують різницеві рівняння й порівнюють отримані динамічні характеристики з експериментом.
5. При великому відхиленні задаються різницеві рівняння більш високого порядку й повторюють усі попередні етапи ідентифікації.

Зіставлення викладеної методики динамічної ідентифікації з порядком виконання статичної ідентифікації свідчить про їхні аналогії, відмінність полягає лише в тому, що модель у статистиці описується алгебраїчним рівнянням, а динамічна модель – різницеvim.

Для диференціального лінійного рівняння k -го порядку аналогом буде різницеве рівняння виду:

$$x_i = a_0 x_{i-1} + a_1 x_{i-2} + \dots + a_n x_{i-n} + b_0 u_{i-1} + b_1 u_{i-2} + \dots + b_m u_{i-m}$$

Це різницеве рівняння приймається як вихідна модель при динамічній ідентифікації.

Задача ідентифікації в цьому випадку полягає в оцінці коефіцієнтів a_i , b_i на основі емпіричних даних спостережень вхід-вихід (пасивний експеримент).

Тому що порядок k ідентифікації об'єкта звичайно невідомий, слід починати ідентифікацію з найбільш простої моделі, а саме різницевого рівняння першого порядку виду:

$$x_i = a_0 x_{i-1} + b_0 u_{i-1}$$

Якщо модель виявиться недостатньо адекватною, то слід взяти різницеве рівняння другого порядку:

$$x_i = a_0 x_{i-1} + a_1 x_{i-2} + b_0 u_{i-1} + b_1 u_{i-2}$$

Проводячи угруповання вимірів для визначення поточних значень відгуку на основі отриманих вимірів одержуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_n$:

.....

$$x_{i-1} = a_0 x_{i-2} + a_1 x_{i-3} + \dots + a_n x_{i-n-2} + b_0 u_{i-2} + b_1 u_{i-3} + \dots + b_m u_{i-m-2}$$

$$x_i = a_0 x_{i-1} + a_1 x_{i-2} + \dots + a_n x_{i-n-1} + b_0 u_{i-1} + b_1 u_{i-2} + \dots + b_m u_{i-m-1}$$

$$x_{i+1} = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + \dots + a_n x_{i-n} + b_0 u_i + b_1 u_{i-1} + \dots + b_m u_{i-m}$$

.....

$$F = \begin{pmatrix} x_{i-2} & x_{i-3} & \boxtimes & x_{i-n-2} & u_{i-2} & u_{i-3} & \boxtimes & u_{i-m-2} \\ x_{i-1} & x_{i-2} & \boxtimes & x_{i-n-1} & u_{i-1} & u_{i-2} & \boxtimes & u_{i-m-1} \\ x_i & x_{i-1} & \boxtimes & x_{i-n} & u_i & u_{i-1} & \boxtimes & u_{i-m} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \boxtimes \\ x_{i-1} \\ x_i \\ x_{i+1} \\ \boxtimes \end{pmatrix} \geq 2n+2$$

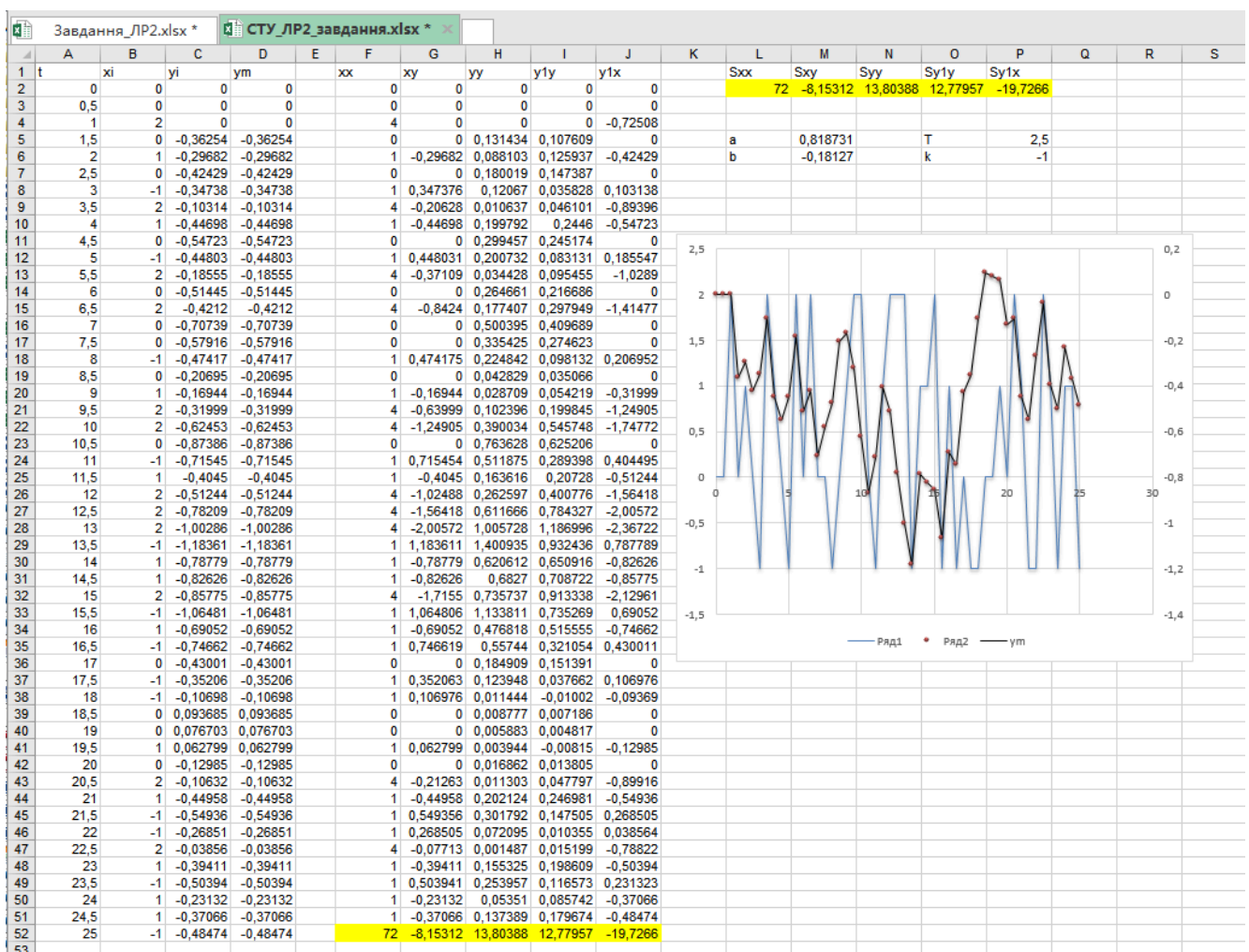
$$K = (F^T F)^{-1} F^T X = (a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m) \rightarrow [(n+m+2) \times 1]$$

Якщо запам'ятати r одноразових сукупностей вимірювань величин u_{k+1} , або x_k , u_k (причому $r \geq n + m + 1$), то елементи рядка матриці можна ідентифікувати по МНК, використовуючи наступне співвідношення:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} y_i) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_i x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1}) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i y_i) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_i x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_i) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_i)}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1}) - a \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i x_i)}$$

Ідентифікуйте дискретну систему першого порядку основі даних про вхід і вихід, що наведені у додатковому файлі. Після отримання коефіцієнтів моделі a і b проведіть перевірку моделі шляхом отримання вихідного сигналу $x_{i+1} = \tilde{a}x_i + bu_i$ при подачі вхідного сигналу, який завданий.



Приклад виконання лабораторної роботи №2

Лабораторна робота №4. Багатофакторні математичні описи.

Ціль роботи: – побудувати лінійну чи нелінійну модель методом повного факторного експерименту типу 2^k .

4.1. Короткі відомості з теорії .

4.1.1. Лінійна регресія.

Серед методів планування багатофакторних експериментів найпростішим і найпоширенішим є повний факторний експеримент (ПФЕ), тобто. такий, котрого можливі комбінації всіх чинників повторюються кожному рівні однаково число раз.

Найбільш ефективні скорочення числа дослідів багатофакторні плани, оскільки одночасно варіюють кількома чинниками. Для проведення дослідів становлять спеціальні матриці планування із зазначенням кількості дослідів та меж зміни факторів. Матриця є переліком варіантів, взятих у цій серії дослідів. Для спрощення розрахунків та аналізу отриманих результатів зазвичай користуються кодованими (безрозмірними) значеннями факторів, а досліді ставлять за симетричними та ортогональними матрицями. Найпростішим є матриці (плани) повного факторного експерименту ПФЕ 2^k , у яких досліджувані чинники змінюються лише двох рівнях: нижньому (H^-) і верхньому (H^+). У таких матрицях центр експерименту

$$H_{oi} = \frac{(H_i^+ + H_i^-)}{2}, \quad (4.1)$$

а інтервал варіювання

$$L_i = \frac{H_i^+ - H_i^-}{2} = H_i^+ - H_{oi} = H_{oi} - H_i^-, \quad (4.2)$$

Зв'язок між натуральним H_i та кодованим (безрозмірним) x_i значеннями по кожному фактору визначається виразом:

$$x = \frac{H_i - H_{oi}}{\lambda_i}, \quad (4.3)$$

Як впливає з цього виразу, у безрозмірному виразі верхній рівень дорівнюватиме +1, а нижній –1. У матриці планування ці рівні зазвичай умовно зображуються як "+" і "-". Загальну кількість дослідів у планах ПФЕ 2^k визначають за такою формулою:

$$N = 2^k, \quad (4.4)$$

Побудову плану ПФЕ 2^k здійснюють у такому порядку:

1. Визначають за формулою (4.4) кількість дослідів плану;
2. складають таблицю, що містить N рядків і k стовпців;
3. заповнюють стовпці таблиці, чергуючи нижній "-" і верхній "+" рівні першого фактора через один, другого - через два, третього через чотири і т.д.;
4. у цій же таблиці передбачають стовпці для запису результатів у кожному досвіді.

Часто, для скорочення запису рядків планів ПФЕ 2^k застосовують літерні коди, що вказують, що відповідні фактори знаходяться на верхньому рівні. Так записи *abc* позначають, що фактори x_1, x_2 і x_3 знаходяться на верхньому рівні. Символ (1) означає рядок, де всі фактори знаходяться на нижньому рівні.

Приклад складання плану ПФЕ 2^k для $k=2$ наведено таблиці 4.1.

Розташування дослідів плану в нормованій галузі визначення факторів x_1 і x_2 показано на рис.4.1.

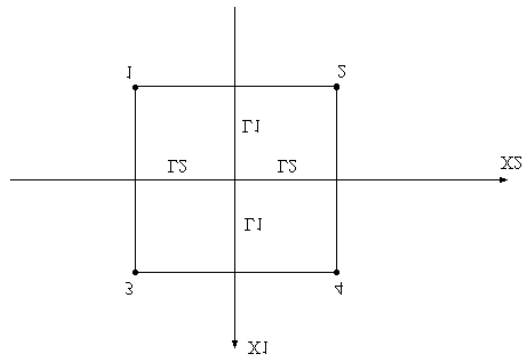


Рис. 4.1. Геометрична інтерпретація плану ПФЕ 2^2 у нормованій області визначення факторів x_1 та x_2 .

Таблиця 4.1.

Матриця плану ПФЕ 2^2 .

Номер досвіду	Чинник				Код рядки	Функція відгуку		
	x _{про}	Ядро плану		x ₁ x ₂		y ₁	y ₂	$\overline{y}$
		x ₁	x ₂					
1	+	-	-	+	(1)	y ₁₁	y ₁₂	$\overline{y}_1$
2	+	+	-	-	a	y ₂₁	y ₂₂	$\overline{y}_2$
3	+	-	+	-	b	y ₃₁	y ₃₂	$\overline{y}_3$
4	+	+	+	+	ab	y ₄₁	y ₄₂	$\overline{y}_4$

Для зниження кількості дослідів, що особливо важливо за великої кількості факторів, користуються дробовим факторним експериментом (ДФЕ), що є частиною (дрібною реплікою) плану ПФЕ. Якщо в матриці ПФЕ 2^3 стовпець, що є твір $x_1 x_2 x_3$ прирівнювати до четвертого фактора x_4 , то можна обмежитися $N = 2^3 = 8$ дослідями замість $N = 2^4 = 16$, щоб отримати лінійну залежність виду

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k,$$

де k – кількість факторів;

$b_0 b_1 b_2 b_k$ - Коефіцієнти регресії, для чотирьох факторів.

Цей розрахований чинник, у разі x_4 , називають додатковим. Якщо він один, то план ДФЕ називають напівреплікою, якщо два – чверть реплікою, якщо три – однієї восьмої репліки тощо. У загальному випадку кількість дослідів, необхідну для побудови ДФЕ, розраховують за такою формулою:

$$N = 2^{k-d}, \quad (4.5)$$

де d - Число додаткових факторів.

Припустимо, що необхідно експериментально досліджувати процес залежно від зміни двох факторів x_1 та x_2 методом ПФЕ.

Спочатку припускають справедливості лінійної моделі виду:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k, \quad (4.6)$$

Для побудови поверхні відгуку достатньо провести $N = 2^2 = 4$ досвіду. Найбільш зручно обрані чинники варіювати верхньому і нижньому рівнях, тобто. $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 1$. Для наочності планування складають план та матрицю двофакторного експерименту.

Як впливає з матриці (табл. 4.1), перший досвід проводять при мінімальних значеннях факторів x_1 і x_2 , другий - при максимальному x_1 і мініальному x_2 , третій при мініальному x_1 і максимальному x_2 і четвертий при максимальних x_1 і x_2 .

Наведена матриця ПФЕ є симетричною. $\sum_{i=1}^N x_i = 0$ та ортогональні $\sum_{i=1}^N x_i x_j = 0$, Що забезпечує відносну простоту обчислення коефіцієнтів регресії за такими формулами:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u, \quad (4.7)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i < j} x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u$$

Отримані в такий спосіб коефіцієнти регресії перевіряються з їхньої значимості, саме рівняння – за умовою адекватності.

Під час перевірки значимості коефіцієнтів регресії коефіцієнт b_i вважається значно відрізняється від нуля, якщо

$$|b_i| > E_{bi} = t_{kp} S_{bi}, \quad (4.8)$$

де E_{bi} - Довірча помилка коефіцієнта (критичне значення помилки);

t_{kp} - Критичне (табличне значення критерію Стюдента для заданого рівня значущості q і ступеня свободи f ;

S_{bi} - Середньоквадратична помилка оцінки коефіцієнта b_i :

$$S_{bi} = \frac{\sqrt{S_y^2}}{N}, \quad (4.9)$$

Дисперсію відтворюваності S_y^2 визначають за виразом:

$$S = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^m (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{N(m-1)m}, \quad (4.10)$$

Число ступенів свободи дисперсії відтворюваності :

$$f = N(m-1), \quad (4.11)$$

Для перевірки адекватності рівняння регресії визначають дисперсію неадекватності:

$$S_{неад}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - \bar{y}_u)^2}{N - N'}, \quad (4.12)$$

де $\hat{y}_u$ - Розрахункове значення функції відгуку, отримане за рівнянням регресії;

N' – кількість значних коефіцієнтів у рівнянні регресії.

Для перевірки адекватності моделі проводять порівняння дисперсій помилки досвіду S_y^2 та дисперсії неадекватності $S_{неад}^2$ за критерієм Фішера.

Отримане розрахункове значення критерію Фішера порівнюють з табличним (критичним) значенням при рівні значущості q та числах ступенів свободи чисельника f_1 і знаменника f_2 . Якщо розрахункове значення $F < F_{кр}$, то рівняння адекватно визначає експериментальні дані. Інакше модель вважається неадекватною.

3.1.2. Нелінійна регресія

Зазвичай застосування квадратичних рівнянь виявляється достатнім на вирішення більшості завдань оптимізації.

Для отримання математичних значень залежності другого порядку найчастіше застосовуються композиційні плани, складені із планів ПФЕ та ДФЕ та блоку дослідів.

До планів другого порядку відносяться рототабельність та ортогональні композиційні плани, D - Оптимальні плани, плани боксу типу B_k і ряд інших.

Загалом величина дисперсій коефіцієнтів регресії дорівнює:

$$S_{bi}^2 = C_{ii} S_y^2, \quad (4.13)$$

де C_{ii} - діагональні елементи дисперсійної матриці, що визначаються при обігу кориваційної матриці;

S_y^2 - Дисперсія помилки дослідів.

З урахуванням формули (4.13) вираз для критичного значення довірчого інтервалу коефіцієнтів регресії матиме вигляд:

$$E_{bi} = t_{кр} S_y' \sqrt{C_{ii}}, \quad (4.14)$$

Оскільки коефіцієнти регресії в нелінійних рівняннях у випадку корелірованні друг з одним (крім ортогональних матриць), то видалення з рівняння регресії незначних коефіцієнтів вимагає перерахунку інших значень коефіцієнтів.

Тому розрахунок коефіцієнтів та статистичну оцінку рівнянь другого порядку проводять на ЕОМ за спеціальними програмами.

4.2. Завдання.

Для заданих значень факторів побудувати лінійну або нелінійну модель методом повного факторного експерименту, при цьому:

1. Знайти основний рівень, інтервал варіювання, верхній, нижній рівень. Скласти матрицю планування ПФЕ 2^2 .
2. Визначити коефіцієнти регресії.
3. Визначити середньоквадратичну помилку коефіцієнтів регресії.
4. Визначити довірчу помилку.
5. Знайти дисперсію неадекватності.
6. Перевірити адекватність рівняння регресії за критерієм Фішера.
7. Зробити висновки.

Список використаної літератури.

1. Дьяконов В. П. Довідник з алгоритмів та програм мовою Бейсик для персональних ЗВМ. - М.: Наука, 1989. - 740с.
2. Остапчук Н. В. та ін. Математичне моделювання процесів харчових виробництв. Збірник завдань, Київ: "Вища школа", 1992. - 175с.

3. Адлер Ю. П. Планування експерименту при пошуку оптимальних умов. - М: Наука, 1976. - 279с.

Додаток 1.

Значення критерію Фішера F рівня значимості $q = 0.05$.

Число ступенів свободи знаменника	Число ступенів свободи чисельника								
	1	2	3	4	5	6	12	24	48
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	243.9	249.9	254.3
2	18.5	19.0	19.2	19.3	19.3	19.4	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	4.0	3.7
7	5.6	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0

Додаток 2.

Значення критерію Кохрена G рівня значимості $q = 0.05$.

Число дисперсій N	Число ступенів свободи f максимальної							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0.999	0.975	0.939	0.906	0.877	0.853	0.833	0.816
3	0.967	0.871	0.798	0.746	0.707	0.677	0.653	0.633
4	0.907	0.768	0.684	0.629	0.590	0.560	0.637	0.518
5	0.841	0.684	0.598	0.544	0.507	0.478	0.456	0.439
6	0.781	0.616	0.532	0.480	0.455	0.418	0.398	0.382
7	0.727	0.561	0.480	0.431	0.397	0.373	0.354	0.338
8	0.680	0.516	0.438	0.391	0.360	0.336	0.319	0.304
9	0.639	0.478	0.403	0.358	0.329	0.307	0.290	0.277
10	0.602	0.445	0.373	0.331	0.303	0.282	0.267	0.254
12	0.541	0.392	0.326	0.288	0.262	0.244	0.230	0.219
15	0.471	0.335	0.276	0.242	0.260	0.203	0.191	0.182
20	0.389	0.271	0.221	0.192	0.174	0.160	0.150	0.142

Значення критерію визначення грубих помилок.

Число повтор - ностей m	q=0.05		q=0.01	
	*	**	*	**
3	0.941	1.000	0.988	1.000
4	0.765	0.967	0.889	0.992
5	0.642	0.845	0.780	0.929
6	0.560	0.736	0.698	0.836
7	0.507	0.661	0.637	0.778
8	0.468	0.607	0.590	0.710
9	0.437	0.565	0.555	0.667
10	0.412	0.531	0.527	0.632
11	0.392	0.504	0.502	0.603
12	0.376	0.481	0.482	0.579
15	0.338	0.430	0.438	0.522
20	0.300	0.372	0.391	0.464
24	0.281	0.347	0.367	0.434
30	0.260	0.322	0.341	0.402

* - Для виключення одного результату.

** - Для виключення одразу двох результатів.

Значення критерію Стюдента при різних рівнях значущості.

Число з ступенів свободи f	Рівень значимості q			Число ступенів свободи f	Рівень значимості q	
	0.05	0.01			0.05	0.01
1	12.71	63.66		11	2.20	3.11
2	4.30	9.93		12	2.18	3.06
3	3.18	5.84		13	2.16	3.01
4	2.78	4.60		14	2.15	2.98
5	2.57	4.03		30	2.04	2.75
6	2.45	3.71		40	2.02	2.70
7	2.37	3.50		60	2.00	2.66
8	2.31	3.36		120	1.98	2.62
9	2.26	3.25		∞	1.96	2.58
10	2.23	3.17				

Додаток 5.

Значення критерію максимального відхилення g .

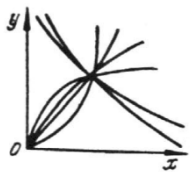
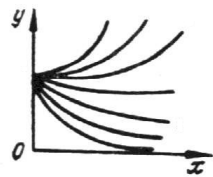
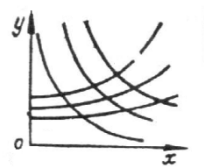
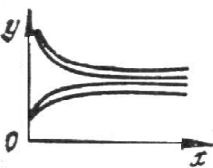
Число з ступенів свободи	Рівень значущості q			Число ступенів свободи	Рівень значущості q	
	0.05	0.01			0.05	0.01
1	1.412	1.414		13	2.493	2.800
2	1.689	1.723		14	2.523	2.837
3	1.809	1.955		15	2.551	2.871
4	1.996	2.130		16	2.557	2.903
5	2.093	2.565		17	2.600	2.932
6	2.172	2.374		18	2.623	2.959
7	2.237	2.464		19	2.644	2.984
8	2.294	2.540		20	2.664	3.008
9	2.343	2.606		21	2.683	3.030
10	2.387	2.663		22	2.701	3.051
11	2.426	2.714		23	2.717	3.071
12	2.461	2.759				

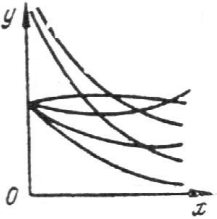
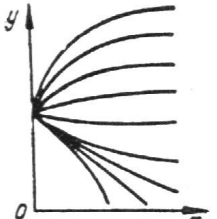
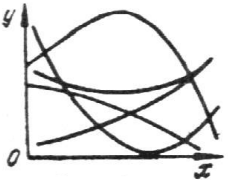
Додаток 6.

Імовірність настання попарно несумісних подій.

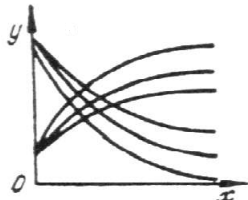
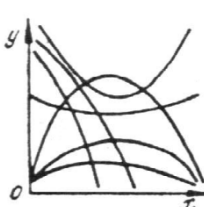
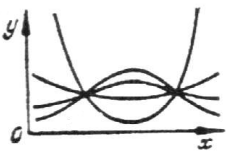
Номер варіанта	n	$p_1, \dots, p_n$	m		Номер варіанта	n	$p_1, \dots, p_n$	m
1	20	0.5	48		16	46	0.6	37
2	28	0.4	34		17	38	0.5	22
3	43	0.6	26		18	25	0.9	41
4	21	0.5	47		19	33	0.5	31
5	32	0.8	39		20	48	0.7	27
6	29	0.5	24		21	23	0.4	36
7	42	0.3	44		22	30	0.6	45
8	40	0.9	35		23	35	0.3	40
9	45	0.7	30		24	44	0.8	42
10	36	0.6	23		25	24	0.6	29
11	27	0.5	46		26	39	0.4	32
12	31	0.5	33		27	47	0.5	20
13	41	0.2	25		28	26	0.7	28
14	22	0.8	38		29	34	0.5	43
15	37	0.4	48		30	49	0.5	21

Таблиця 2. Графіки формул та прийоми їх вирівнювання .

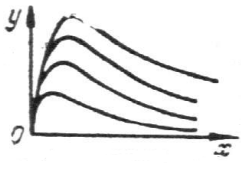
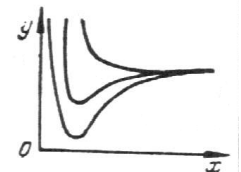
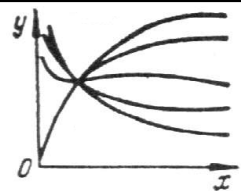
Типові криві	Формула	Спосіб вирівнювання	Лінійне рівняння, що отримується при вирівнюванні	Примітки
	$y = a \cdot x^B, (1)$ ($a = const$)	$X = \lg x$ $Y = \lg y$	$Y = \lg a + b \cdot X$	
	$y = a \cdot e^{B \cdot X}, (2)$ ($a = const$)	$Y = \lg y$	$Y = \lg a + 0.4343 \cdot b \cdot x$	
	$y = \frac{1}{a + bx}, (3)$	$Y = \frac{1}{y}$	$Y = a + bx$	
	$y = \frac{x}{a + bx}, (4)$	$Y = \frac{x}{y}$	$Y = a + ax$	

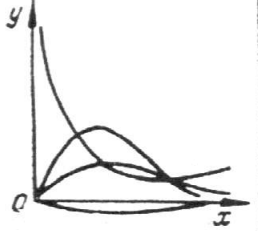
Типові криві	Формула	Спосіб вирівнювання	Лінійне рівняння, що отримується при вирівнюванні	Примітки
	$y = c + ax^B$, (5)	Якщо b відомо: $X = x^B$ Якщо b невідомо, Знаходять z і тоді $X = \lg x$, $Y = \lg(y - c)$	$y = c + aX$ $Y = \lg a + bx$	Криві, аналогічні кривим формули (1), але зміщені в напрямку осі ОУ. Для визначення з заданою кривою беруть дві точки з довільними абсцисами x_1 і x_2 відповідними ординатами y_1 і y_2 і третю точку з абсцисою $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ та ординатою y_3: $c = (y_1 y_2 - y_3^2) / (y_1 + y_2 - 2y_3)$
	$y = c + ae^{bx}$, (6) $(c = \text{const}, a < 0)$	Знаходять z і тоді $Y = \lg(y - c)$	$Y = \lg a + 0.4343bx$	Криві, аналогічні кривим формули (2), але зміщені в напрямку осі ОУ. Для визначення на заданій кривій беруть дві точки з довільними абсцисами x_1 і x_2 відповідними ординатами y_1 і y_2 і третю точку з абсцисою $x_3 = (x_1 + x_2) / 2$ та ординатою y_3: $c = (y_1 y_2 - y_3^2) / (y_1 + y_2 - 2y_3)$
	$y = a + bx + cx^2$, (7)	$Y = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ де x_1, y_1 координати точки. При виборі значень x , що утворюють арифметичну	$Y = (b + cx_1) + cx$ $Y = (bh + ch^2) + 2chx$	Після визначення b та c знаходять a з рівняння: $\sum y = na + b \sum x + c \sum x^2$ де n - Число заданих значень x.

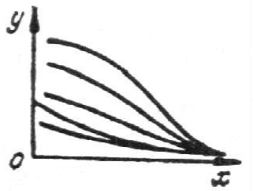
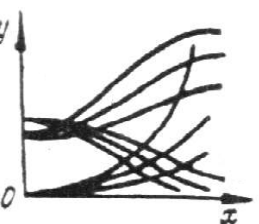
		прогресію з різницею h , $Y = \Delta y = y_{i+1} - y_i$		
--	--	---	--	--

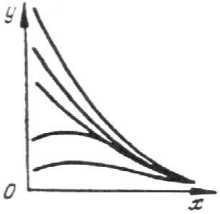
Типові криві	Формула	Спосіб вирівнювання	Лінійне рівняння, що отримується при вирівнюванні	Примітки
	$y = \frac{a + bx}{c + dx} , (8)$	$Y = \frac{x - x_1}{y - y_1} , \text{ де } x_1, y_1 - \text{координати довільної точки заданої кривої.}$	$Y = A + Bx$	Замість коефіцієнтів a, b, c, d визначають A і B і являють собою емпіричну формулу у вигляді: $y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + Bx}$
	$y^2 = a + bx + cx^2 , (9)$			Введенням нової змінної $z = y^2$ приходять до формули (7).
	$y = ae^{BX + CX^2} , (10)$ або $\lg y = \lg a + 0.4343bx + 0.4343cx^2$			Введенням нової змінної $z = \lg y$ приходять до формули (7).

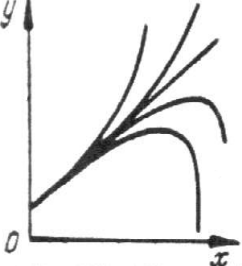
	$y = \frac{1}{a + bx + cx^2}, (11)$			Введенням нової змінної $z = x/y$ приходять до формули (7).
---	-------------------------------------	--	--	---

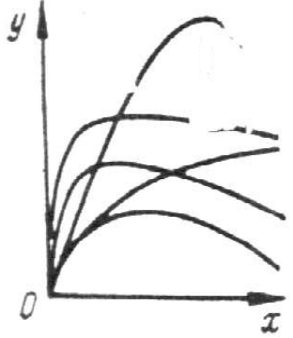
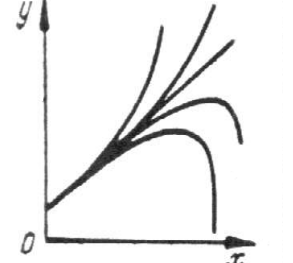
Типові криві	Формула	Спосіб вирівнювання	Лінійне рівняння, що отримується при вирівнюванні	Примітки
	$y = \frac{x}{a + bx + cx^2} (12)$			Введенням нової змінної $z = x/y$ приходять до формули (7).
	$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}, (13)$			Введенням нової змінної $z = x/y$ приходять до формули (7).
	$y = a + b \lg x + c \lg^2 x (14)$			Введенням нової змінної $z = \lg x$ приходять до формули (7).

	$y = ax^b e^{cx}, (15)$	При виборі значень x, що утворюють арифметичну прогресію з різницею h, $X = \Delta \lg x, Y = \Delta \lg y$	$Y = 0.4343hc + BX$	Після визначення b та c знаходять a з рівняння: $\sum \lg y = n \lg a + b \sum \lg x + 0.4343c \sum x$, де n - Число заданих значень x.
---	-------------------------	--	---------------------	--

Типові криві	Формула	Спосіб вирівнювання	Лінійне рівняння, що отримується при вирівнюванні	Примітки
	$y = ae^{BX^c} \quad (16)$ $(b < 0)$			Введенням нової змінної $z = \lg y$ приходять до формули (5).
	$y = ae^{Be^{BX}} \quad (17)$			Введенням нової змінної $z = \lg y$ приходять до формули (6).

	$y = ae^{bX} + ce^{dX} \quad (18)$ $(b < 0, d < 0)$	При виборі значень x, що утворюють арифметичну прогресію з різницею h, $X = \frac{y_1}{y}, Y = \frac{y_2}{y}, \text{ де}$ y, y_1, y_2 -ординати точок кривої для будь-яких трьох послідовних значень абсцис x, x_1, x_2	$y = (e^{bh} + e^{dh}) * x - e^{bh} e^{dh}$	Наведене в попередній графі лінійне рівняння дозволяє визначити коефіцієнти b і d, після чого для визначення a і знову вирівнюють за допомогою змінних $X' = e^{(b-d)x}, Y' = ye^{-dx}$, отримуючи лінійне рівняння $Y' = c + aX'$
---	---	---	---	---

Типові криві	Формула	Спосіб вирівнювання	Лінійне рівняння, що отримується при вирівнюванні	Примітки
	$y = a + bx + ce^{dx} \quad (19)$ $(a = const, b = const)$	При виборі значень x, що утворюють арифметичну прогресію з різницею h $Y = \lg \Delta^2 y$	$Y = \lg c(e^{dh} - 1)^2 + 0.4343dx$	Після визначення коефіцієнтів c та d виробляють нове вирівнювання, приймаючи $Y' = y - ce^{dx}$ та отримуючи лінійне рівняння $Y' = a + bx$

	$y = ax^b + cx^d \quad (20)$ $(b > 0, d > 0)$	$X = \frac{y_1}{y}, Y = \frac{y_2}{y}, \text{ де}$ $y, y_1, y_2 \text{ - ординати}$ точок кривої для будь-яких трьох послідовних значень абсцис $x, x_1, x_2, \text{ що}$ утворюють геометричну прогресію зі $\text{знаменником } q.$	$Y = (q^b + q^d)X - q^{b+d}$	Після визначення коефіцієнтів b і d проводять нове вирівнювання, приймаючи $X' = x^{d-b}, Y' = yx^{-b}$ та отримуючи лінійне рівняння $Y' = a + cX', \text{ з якого визначають } a \text{ і } c.$
	$y = a + bx + ce^{dx} \quad (19)$ $(a = \text{const}, b = \text{const})$	При виборі значень x, що утворюють арифметичну прогресію з різницею h $Y = \lg \Delta^2 y$	$Y = \lg c(e^{dh} - 1)^2 + 0.4343dx$	Після визначення коефіцієнтів c та d виробляють нове вирівнювання, приймаючи $Y' = y - ce^{dx} \text{ та отримуючи}$ лінійне рівняння $Y' = a + bx$

Типові криві	Формула	Спосіб вирівнювання	Лінійне рівняння, що отримується при вирівнюванні	Примітки
Графіки кривих можуть мати різну форму		$Y = \Delta^{n-1} y, \text{ де}$ $n - \text{порядок, що дає постійне значення різниць при значеннях}$		З рівняння, наведеного в гр.4, визначають коефіцієнти a_n і a_{n-1} при вищих ступенях x .

	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ (21)	аргументу, що утворюють арифметичну прогресію з різницею h.	$Y = (n-1)! * h^{n-1} (a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} * n! * h^{n-1} * a_n)$	$z = y - a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1}$, Складають нову раціональну функцію ступеня $n-2$: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-2}x^{n-2}$ і тим самим способом визначають a_{n-2} і a_{n-3} і т.д. (оскільки багаточлени вище 4-го ступеня використовуються рідко, то зазвичай вже після першого визначення коефіцієнтів при вищих ступенях x (a_4 і a_3) приходять до формули (7).
--	---	---	--	---