

BÀI 5. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Số gần đúng: Trong đo đạc, tính toán ta thường chỉ nhận được các số gần đúng.

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

a) **Sai số tuyệt đối:** Giả sử $\bar{a}$ là giá trị đúng của một đại lượng và a là giá trị gần đúng của $\bar{a}$. Giá trị $|\bar{a} - a|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa $\bar{a}$ và a . Ta gọi $|\bar{a} - a|$ là sai số tuyệt đối của số gần đúng a và kí hiệu là Δ_a , tức là $\Delta_a = |\bar{a} - a|$

Nếu $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq d$ thì $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$. Ta nói a là số gần đúng của $\bar{a}$ với **độ chính xác d** , và qui ước viết gọn là $\bar{a} = a \pm d$. Như vậy, khi viết $\bar{a} = a \pm d$ ta hiểu là số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$. Bởi vậy d càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng a so với số đúng $\bar{a}$ càng ít. Thành thử d được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

b) **Sai số tương đối:** Sai số tương đối của số gần đúng a là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, kí hiệu $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$. Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq d$. Do đó $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$. Nếu $\frac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì độ chính xác của phép đo đạc hoặc tính toán càng lớn. Ta thường viết δ_a dưới dạng phần trăm.

3. Qui tròn số gần đúng

- Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0.
- Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0 và cộng thêm một đơn vị vào chữ số ở hàng qui tròn.

Ví dụ 1: Nếu quy tròn số $8216,3$ đến hàng chục thì chữ số ở hàng quy tròn là 1, chữ số ngay sau đó là 6; do $6 > 5$ nên ta có số quy tròn là 8200 .

Ví dụ 2: Nếu quy tròn số $3,654$ đến hàng phần trăm (tức chữ số thứ 2 sau dấu phẩy) thì chữ số ngay sau hàng quy tròn là 4; do $4 < 5$ nên số quy tròn là $2,65$.

Trong hai ví dụ trên, sai số tuyệt đối là

$$|8216,4 - 8220| = 3,6 < 5; \quad |3,654 - 3,65| = 0,004 < 0,005$$

Nhận xét: Khi thay số đúng bởi số qui tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số qui tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng qui tròn. Như vậy, độ chính xác của số qui tròn bằng nửa đơn vị của hàng qui tròn.

Chú ý: Cho số gần đúng a với độ chính xác d (tức là $\bar{a} = a \pm d$). Khi được yêu cầu quy tròn số a mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn số a đến hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

Chẳng hạn: Cho $\bar{a} = 1,236 \pm 0,002$ và ta phải quy tròn số $1,236$. Ta thấy, $0,001 < 0,002 < 0,01$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm. Vậy ta phải quy tròn số $1,236$ đến hàng phần trăm. Kết quả là $\bar{a} \approx 1,24$

4. Chữ số chắc và cách viết chuẩn số gần đúng

a) Chữ số chắc: Cho số gần đúng a của số $\bar{a}$ với độ chính xác d . Trong số a , một chữ số đgl **chữ số chắc** (hay **đáng tin**) nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

Nhận xét: Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.

Ví dụ: Trong cuộc điều tra dân số, người ta báo cáo số dân của tỉnh A là $1379425 \text{ ngöôøi} \pm 300 \text{ ngöôøi}$.

Vì $\frac{100}{2} = 50 < 300 < 500 = \frac{1000}{2}$ nên chữ số hàng trăm (chữ số 4) không là chữ số chắc, chữ số hàng nghìn (chữ số 9) là chữ số chắc. Vậy các chữ số chắc là 1,3,7,9 và các chữ số 4,2,5 đều là không chắc.

b) Dạng chuẩn của số gần đúng: Cách viết chuẩn của một số gần đúng là cách viết mà tất cả các chữ số của a là chữ số chắc.

☞ Nếu số gần đúng là số thập phân (không nguyên) thì dạng chuẩn là dạng mọi chữ số của nó là chữ số chắc.

Ví dụ: Cho một giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$ được viết dưới dạng chuẩn là $2,236(\sqrt{5} \approx 2,236)$. Ở

đây hàng thấp nhất chữ số chắc là hàng phần nghìn nên độ chính xác của nó là $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0,0005$.

Do đó ta viết $2,236 - 0,0005 \leq \sqrt{5} \leq 2,236 + 0,0005$.

☞ Nếu số gần đúng là số nguyên thì dạng chuẩn của nó là $A.10^k$, trong đó A là số nguyên, k là hàng thấp nhất có chữ số chắc ($k \in \mathbb{Z}$). (Từ đó, mọi chữ số của A là chữ số chắc)

Ví dụ: Số dân của Việt Nam (năm 2005) vào khoảng 83.10^6 người (83 triệu người). Ở đây, $k = 6$ nên độ chính xác của số gần đúng là $\frac{1}{2}.10^6 = 500000$. Do đó ta biết được số dân của Việt Nam trong khoảng từ $82,5$ triệu người đến $83,5$ triệu người.

5. Kí hiệu khoa học của một số

Mỗi số thập phân khác 0 đều viết được dưới dạng $\alpha.10^n$, trong đó $1 \leq |\alpha| < 10, n \in \mathbb{Z}$ (Quy ước rằng nếu $n = -m$, với m là số nguyên dương thì $10^{-m} = \frac{1}{10^m}$). Dạng như thế được gọi là kí hiệu khoa học của số đó. Người ta thường dùng kí hiệu khoa học để ghi những số rất lớn hoặc rất bé. Số mũ n của 10 trong kí hiệu khoa học của một số cho thấy độ lớn (bé) của số đó. Ví dụ: Khối lượng trái đất viết dưới dạng kí hiệu khoa học là $5,98.10^{24}kg$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Biết số gần đúng a , và độ chính xác d . Ước lượng sai số tương đối, các chữ số chắc, viết dưới dạng chuẩn.

1. Phương pháp

Ước lượng sai số tương đối: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \leq \frac{d}{|a|}$

Chữ số chắc: Từ $\frac{10^n}{2} < d < \frac{10^{n+1}}{2}$ suy ra n và suy ra các chữ số chắc.

Ví dụ mẫu 1: Biết số gần đúng là 65894256 có độ chính xác $d = 140$.

- Ước lượng sai số tương đối của số đó
- Viết các chữ số chắc (đáng tin)
- Viết số đó dưới dạng chuẩn

Ví dụ mẫu 2: Độ dài của cái cầu bến thủy hai (Nghệ An) người ta đo được là $996m \pm 0,5m$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

Dạng 2. Biết số gần đúng a và sai số tương đối không vượt quá C . Ước lượng sai số tuyệt đối, các chữ số chắc, viết dưới dạng chuẩn.

Phương pháp: Ước lượng sai số tuyệt đối $\Delta_a = |a| \cdot \delta_a \leq |a| \cdot C$

Ví dụ mẫu 1: Biết số gần đúng 327,5864 có sai số tương đối không vượt quá $\frac{1}{10000}$.

- Ước lượng sai số tuyệt đối của số đó;
- Viết các chữ số chắc;
- Viết số đó dưới dạng chuẩn

Ví dụ mẫu 2: Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng a, b biết sai số tương đối của chúng.

- a) $a = 123456, d_a = 0,2\%$ b) $a = 1,24358, d_a = 0,5\%$

Ví dụ mẫu 3: a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn biết $\sqrt{8} = 2,8284\dots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

- b) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ chính xác đến hàng chục và hàng trăm biết $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71\dots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

Dạng 3. Quy tròn số. Ước lượng sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số quy tròn

Phương pháp:

Ví dụ mẫu 1: Biết số $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

- a) Quy tròn số $\sqrt{2}$ đến hàng phần trăm
- b) Ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối mắc phải khi chọn số quy tròn $\sqrt{2}$ đến hàng phần trăm

Ví dụ mẫu 2: Làm tròn các số sau với độ chính xác cho trước.

- a) $a = 2,235$ với độ chính xác $d = 0,002$
- b) $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$

Dạng 4. Sai số của tổng, tích và thương

Phương pháp

⊞ Nếu a và b là các số gần đúng với sai số tuyệt đối Δ_a và Δ_b , và $c = a + b$; $d = a - b$.
Thế thì $\Delta_c = \Delta_a + \Delta_b$; $\Delta_d = \Delta_a + \Delta_b$

⊞ Nếu sai số $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ lần lượt là sai số tuyệt đối của số gần đúng a, b, c và $P = a.b$; $Q = a.b.c$; $R = \frac{a}{b}$. Thế thì $\delta_P = \delta_a + \delta_b$; $\delta_Q = \delta_a + \delta_b + \delta_c$; $\delta_R = \delta_a + \delta_b$

Suy ra: $\Delta_P = |a| \cdot \Delta_a + |b| \cdot \Delta_b$; $\Delta_Q = |b.c| \cdot \Delta_a + |a.c| \cdot \Delta_b + |a.b| \cdot \Delta_c$; $\Delta_R = \frac{\Delta_a}{|b|} + \frac{\Delta_b}{|a|}$

Ví dụ mẫu 1. Tính chu vi và diện tích hình chữ nhật có cạnh $a = 5,356m \pm 0,01m$, chiều dài là $b = 15,854m \pm 0,015m$. Ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải.

Ví dụ mẫu 2. Một ống nước có đường kính $d = 2 \pm 0,05cm$, chiều dài $h = 3000 \pm 5cm$. Tính thể tích khối nước chứa trong ống và ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải ($\pi = 3,14 \pm 0,0016$).

Ví dụ mẫu 3: Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x = 23m \pm 0,01m$ và chiều rộng là $y = 15m \pm 0,01m$. Chứng minh rằng

a) Chu vi của ruộng là $P = 76m \pm 0,04m$

b) Diện tích của ruộng là $S = 345m \pm 0,3801m$

Dạng 5: Xác định các chữ số chắc của một số gần đúng, dạng chuẩn của chữ số gần đúng và kí hiệu khoa học của một số.

1. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm số chắc và viết dạng chuẩn của số gần đúng a biết

a) Số người dân tỉnh Nghệ An là $a = 3214056$ người với độ chính xác $d = 100$ người.

b) $a = 1,3462$ sai số tương đối của a bằng 1%.

Ví dụ 2: Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn

a) $a = 467346 \pm 12$

b) $b = 2,4653245 \pm 0,006$

Ví dụ 3: Các nhà khoa học Mỹ đang nghiên cứu liệu một máy bay có thể có tốc độ gấp bảy lần tốc độ ánh sáng. Với máy bay đó trong một năm (giả sử một năm có 365 ngày) nó bay được bao nhiêu? Biết vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s. Viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho số gần đúng $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 10^1$. Hãy viết số quy tròn của số a .

A. 23749000.

B. 23748000.

C. 23746000.

D. 23747000.

Câu 2. Cho giá trị gần đúng của p là $a = 3,141592653589$ với độ chính xác 10^{-10} . Hãy viết số quy tròn của số a .

A. $a = 3,141592654$.

B. $a = 3,1415926536$.

C. $a = 3,141592653$.

D. $a = 3,1415926535$.

Câu 3. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần nghìn.

A. 1,7320.

B. 1,732.

C. 1,733.

D. 1,731.

Câu 4. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của p^2 chính xác đến hàng phần nghìn.

A. 9,873.

B. 9,870.

C. 9,872.

D. 9,871.

Câu 5. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 17658$ biết $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

- A. 17700. B. 17800. C. 17500. D. 17600.

Câu 6. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 15,318$ biết $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$.

- A. 15,3. B. 15,31. C. 15,32. D. 15,4.

Câu 7. Đo độ cao một ngọn cây là $h = 347,13\text{m} \pm 0,2\text{m}$. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 347,13.

- A. 345. B. 347. C. 348. D. 346.

Câu 8. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh: $a = 12\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$; $b = 10,2\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$; $c = 8\text{cm} \pm 0,1\text{cm}$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

- A. $P = 30,2\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$. B. $P = 30,2\text{cm} \pm 1\text{cm}$.
C. $P = 30,2\text{cm} \pm 0,5\text{cm}$. D. $P = 30,2\text{cm} \pm 2\text{cm}$.

Câu 9. Một miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng $x = 43\text{m} \pm 0,5\text{m}$ và chiều dài $y = 63\text{m} \pm 0,5\text{m}$. Tính chu vi P của miếng đất đã cho.

- A. $P = 212\text{m} \pm 4\text{m}$. B. $P = 212\text{m} \pm 2\text{m}$.
C. $P = 212\text{m} \pm 0,5\text{m}$. D. $P = 212\text{m} \pm 1\text{m}$.

Câu 10. Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x = 23\text{m} \pm 0,01\text{m}$ và chiều rộng là $y = 15\text{m} \pm 0,01\text{m}$. Tính diện tích S của thửa ruộng đã cho.

- A. $S = 345\text{m} \pm 0,001\text{m}$. B. $S = 345\text{m} \pm 0,38\text{m}$.
C. $S = 345\text{m} \pm 0,01\text{m}$. D. $S = 345\text{m} \pm 0,3801\text{m}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Độ chính xác $d = 10^1$ (hàng trăm), nên ta làm tròn số $a = 23748023$ đến hàng nghìn, được kết quả là $a = 23748000$. **Chọn B.**

Câu 2. Độ chính xác $d = 10^{-10}$ làm tròn số $a = 3,141592653589$ chính xác đến hàng của $d \cdot 10 = 10^{-9}$ (9 chữ số thập phân), kết quả là $a = 3,141592654000$. **Chọn A.**

Câu 3. $\sqrt{3} = 1,7320508076\ldots$ làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: 1,732. **Chọn B.**

Câu 4. $p^2 = 9,8696044011\ldots$ làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: 9,870. **Chọn B.**

Câu 5. $\bar{a} = 17658 \pm 16$ làm tròn số $a = 17658$ đến hàng trăm, kết quả là: 17700. **Chọn A.**

Câu 6. $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$ làm tròn số $a = 15,318$ chính xác đến hàng của $d \cdot 10 = 0,56$ (hàng phần trăm), kết quả là: 15,32. **Chọn C.**

Câu 7. $h = 347,13\text{m} \pm 0,2\text{m}$ làm tròn số $h = 347,13$ đến hàng $d \cdot 10 = 2$ (hàng đơn vị), kết quả là 347. **Chọn B.**

Câu 8. Chu vi tam giác là:

$$P = a + b + c = (12 + 10,2 + 8) \pm (0,2 + 0,2 + 0,1) = 30,2 \pm 0,5.$$

Chọn C.

Câu 9. Chu vi của miếng đất là

$$\begin{aligned} P &= 2[x + y] = 2[(43 \pm 0,5) + (63 \pm 0,5)] \\ &= 2(43 + 63) \pm (0,5 + 0,5) = 212 \pm 2. \end{aligned}$$
 Chọn B.

Câu 10. Diện tích của thửa ruộng là

$$\begin{aligned} S &= xy = (23 \pm 0,01) \cdot (15 \pm 0,01) \\ &= 23 \cdot 15 \pm (23 \cdot 0,01 + 15 \cdot 0,01 + 0,01^2) = 345 \pm 0,3801. \end{aligned}$$
 Chọn D.