CHƯƠNG 3: NGUYÊN HÀM -TÍCH PHÂN -ỨNG DỤNG
BÀI 2: TÍCH PHÂN

Tan Doc

Dạng 2

Ví dụ 1: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x = a$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = -a$. **B.** $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2a$.

C. $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x = a$. **D.** $\int_{3}^{0} f(x)\mathrm{d}x = a$.

Lời giải

Chọn B.

Áp dụng tính chất

" Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ ".

Ví dụ 2: Cho $\int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 10$. Khi đó $\int_{5}^{2}\left[2-4f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 32. **B.** 34. **C.** 36. **D.** 40.

Lời giải

Chọn B.

Ta có

$$\int_{5}^{2}\left[2-4f(x)\right]\mathrm{d}x = 2\int_{5}^{2}\mathrm{d}x - 4\int_{5}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2x\Big|_{5}^{2} + 4\int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 2.(2-5)+4.10 = 34.$$

Câu 1. Cho $F(x) = \int_{1}^{x}\left(t^2+t\right)\mathrm{d}t$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $\frac{1}{6}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $F(x) = \int_{1}^{x}\left(t^2+t\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{1}^{x} = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}$

Xét hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}$ trên đoạn $[-1;1]$

Đạo hàm $F'(x) = x^2+x;\ F'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Suy ra $F(-1)=-\frac{2}{3};\ F(0)=-\frac{5}{6};\ F(1)=0$.

Do hàm số liên tục trên $[-1;1]$ nên $\min\limits_{[-1;1]} F(x)=F(0)=-\frac{5}{6}$.

Câu 1. Hãy chọn mệnh đề **sai** dưới đây:

A. $\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x \ge \int\limits_0^1 x^3\mathrm{d}x$.

B. Đạo hàm của $F(x)=\int\limits_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ là $F'(x)=\frac{1}{1+x}(x>0)$.

C. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

D. Nếu $f(x)$ liên tục trên $\square$ thì $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

+ Do $x\in[0;1]\Rightarrow x^2\ge x^3 \Rightarrow \int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x \ge \int\limits_0^1 x^3\mathrm{d}x$. Do đó A đúng.

+ Áp dụng tính chất $F'(x)=\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Suy ra $F'(x)=\frac{1}{1+x}$. Do đó B đúng.

+ Mệnh đề C sai vì tính chất này chỉ đúng nếu $f(x)$ là hàm chẵn hoặc ta có thể lấy ví dụ cụ thể cho hàm $f(x)=x$ và $a=2$ chẳng hạn.

+ Khi đó $\int\limits_{-2}^{2} x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{2}(4-4)=0$ nhưng $2\int\limits_0^2 x\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^2=4$.

Mệnh đề D đúng theo tính chất tích phân.

Câu 2. Nếu $f(1)=12,\ f'(x)$ liên tục và $\int\limits_1^4 f'(x)\mathrm{d}x=17$. Giá trị của $f(4)$ bằng:

A. 29. **B.** 5. **C.** 19. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^4 = f(4)-f(1)$.

Theo bài ra ta có

$$\int_1^4 f'(x)\mathrm{d}x = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 17 + f(1) = 17 + 12 = 29$$.

Câu 3. Cho hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_a^d f(x)\mathrm{d}x = 10, \int_b^d f(x)\mathrm{d}x = 8, \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = 7$.

Tính $I = \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$, ta được.

A. $I = -5$. **B.** $I = 7$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = -7$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_b^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$

$$= \int_b^d f(x)\mathrm{d}x - \int_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = 8 - 10 + 7 = 5.$$

Câu 4. Cho biết $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = -2, \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 3, \int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 7$.

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\int_1^4 [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = 10$. **B.** $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

C. $\int_4^3 f(x)\mathrm{d}x = -5$. **D.** $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)]\mathrm{d}x = -2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int_1^4 [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 3 + 7 = 10$. Do đó A đúng.

Ta có $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_3^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = -\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = -(-2) + 3 = 5$.

Do đó B sai, C đúng.

Ta có $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)]\mathrm{d}x = 4\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 4.3 - 2.7 = -2$.

Do đó D đúng.

Câu 5. Cho $f(x); g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $A = \int_1^2 [3f(x) + 2g(x)]\mathrm{d}x = 1$ và

$B=\int_1^2\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=-3$. Tính $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-\frac{5}{7}$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $A=3\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=1$ và $B=2\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=-3$.

Đặt $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=u$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=v$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}3u+2v=1\\2u-v=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-\frac{5}{7}\\v=\frac{11}{7}\end{cases}$

Vậy $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=u=-\frac{5}{7}$.

Câu 6. Nếu $\int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{2x-1}=\ln c$ với $c\in\mathbb{Z}$ thì giá trị của c bằng:

A. 9. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 81.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^5=\frac{1}{2}\ln 9-\frac{1}{2}\ln 1=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 3$.

Câu 7. Nếu kết quả của $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ được viết ở dạng $\ln\frac{a}{b}$ với $a,\ b$ là các số tự nhiên và ước chung lớn nhất của $a,\ b$ bằng 1. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $3a-b<12$. **B.** $a+2b=13$. **C.** $a-b>2$. **D.** $a^2+b^2=41$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+3}=\ln|x+3|\Big|_1^2=\ln 5-\ln 4=\ln\frac{5}{4}$.

Suy ra $a=5,\ b=4$ nên $a-b=1<2$.

Câu 8. Tính tích phân $\int_1^2\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$, ta thu được kết quả ở dạng $a+b\ln 2$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $a^2+b^2>10$. **B.** $a>0$. **C.** $a-b>1$. **D.** $b-2a>0$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_1^2\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln|x-3|-2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=-\frac{1}{2}-3\ln 2$.

Suy ra $a=-\frac{1}{2},\ b=-3$ nên $a-b>1$.

Câu 9. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(\mathrm{m/s})$, có gia tốc $v'(t)=\frac{3}{t+1}(\mathrm{m/s^2})$. Vận tốc ban đầu của vật là $6\,\mathrm{m/s}$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. $14\,\mathrm{m/s}$. **B.** $13\,\mathrm{m/s}$. **C.** $11\,\mathrm{m/s}$. **D.** $12\,\mathrm{m/s}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $v(t)=\int v'(t)dt=\int\frac{3}{t+1}dt=3\ln|t+1|+C$.

Tại thời điểm ban đầu $(t=0)$ thì $v(0)=3\ln 1+C=6\Leftrightarrow C=6$.

Suy ra $v(t)=3\ln|t+1|+6$.

Tại thời điểm $t=10\,s\Rightarrow v(10)=3\ln 11+6\approx 13(\mathrm{m/s})$.