

CHƯƠNG 3: NGUYÊN HÀM -TÍCH PHÂN -ỨNG DỤNG
BÀI 2: TÍCH PHÂN

Tan Doc

Dạng 2

Ví dụ 1: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_{-3}^0 f(x) dx = a$. Chọn mệnh đề đúng:

- A. $\int_0^3 f(x) dx = -a$ B. $\int_{-3}^3 f(x) dx = 2a$
C. $\int_{-3}^3 f(x) dx = a$ D. $\int_3^0 f(x) dx = a$

Lời giải

Chọn B.

Áp dụng tính chất

" Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx "$.

Ví dụ 2: Cho $\int_2^5 f(x) dx = 10$. Khi đó $\int_5^2 [2 - 4f(x)] dx$ bằng:

- A. 32. B. 34. C. 36. D. 40.

Lời giải

Chọn B.

Ta có

$$\int_5^2 [2 - 4f(x)] dx = 2 \int_5^2 dx - 4 \int_5^2 f(x) dx = 2x \Big|_5^2 + 4 \int_2^5 f(x) dx = 2 \cdot (2 - 5) + 4 \cdot 10 = 34$$

Câu 1. Cho $F(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ là:

- A. $\frac{1}{6}$. B. 2. C. $-\frac{5}{6}$. D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có
$$F(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$$

Xét hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$ trên đoạn $[-1; 1]$

Đạo hàm
$$F'(x) = x^2 + x; F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Suy ra $F(-1) = -\frac{2}{3}; F(0) = -\frac{5}{6}; F(1) = 0$.

Do hàm số liên tục trên $[-1; 1]$ nên $\min_{[-1; 1]} F(x) = F(0) = -\frac{5}{6}$.

Câu 1. Hãy chọn mệnh đề **sai** dưới đây:

A. $\int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx$

B. Đạo hàm của $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t}$ là $F'(x) = \frac{1}{1+x} (x > 0)$.

C. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

D. Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

Lời giải

Chọn C.

+ Do $x \in [0; 1] \Rightarrow x^2 \geq x^3 \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx$. Do đó A đúng.

+ Áp dụng tính chất $F'(x) = \int_a^x f(t) dt$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Suy ra $F'(x) = \frac{1}{1+x}$. Do đó B đúng.

+ Mệnh đề C sai vì tính chất này chỉ đúng nếu $f(x)$ là hàm chẵn hoặc ta có thể lấy ví dụ cụ thể cho hàm $f(x) = x$ và $a = 2$ chẳng hạn.

+ Khi đó $\int_{-2}^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} (4 - 4) = 0$ nhưng $2 \int_0^2 x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$.

Mệnh đề D đúng theo tính chất tích phân.

Câu 2. Nếu $f(1) = 12, f'(x)$ liên tục và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng:

A. 29.

B. 5.

C. 19.

D. 9.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int_1^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^4 = f(4) - f(1)$.

Theo bài ra ta có

$$\int_1^4 f'(x) dx = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 17 + f(1) = 17 + 12 = 29$$

Câu 3. Cho hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_a^d f(x) dx = 10, \int_b^d f(x) dx = 8, \int_a^c f(x) dx = 7$

Tính $I = \int_b^c f(x) dx$, ta được.

A. $I = -5$.

B. $I = 7$.

C. $I = 5$.

D. $I = -7$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có
$$\begin{aligned} \int_b^c f(x) dx &= \int_b^d f(x) dx - \int_a^d f(x) dx + \int_a^c f(x) dx \\ &= \int_b^d f(x) dx - \int_a^d f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = 8 - 10 + 7 = 5. \end{aligned}$$

Câu 4. Cho biết $\int_1^3 f(x) dx = -2, \int_1^4 f(x) dx = 3, \int_1^4 g(x) dx = 7$

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 10$

B. $\int_3^4 f(x) dx = 1$

C. $\int_4^3 f(x) dx = -5$

D. $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = -2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có
$$\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx + \int_1^4 g(x) dx = 3 + 7 = 10$$
 . Do đó A đúng.

Ta có
$$\int_3^4 f(x) dx = \int_3^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = -\int_1^3 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = -(-2) + 3 = 5$$

Do đó B sai, C đúng.

Ta có
$$\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = 4 \int_1^4 f(x) dx - 2 \int_1^4 g(x) dx = 4.3 - 2.7 = -2$$

Do đó D đúng.

Câu 5. Cho $f(x); g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $A = \int_1^2 [3f(x) + 2g(x)] dx = 1$ và

$$B = \int_1^2 [2f(x) - g(x)] dx = -3 \quad \text{Tính} \quad I = \int_1^2 f(x) dx$$

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = -\frac{5}{7}$. D. $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $A = 3 \int_1^2 f(x) dx + 2 \int_1^2 g(x) dx = 1$ và $B = 2 \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = -3$.

Đặt $\int_1^2 f(x) dx = u$ và $\int_1^2 g(x) dx = v$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3u + 2v = 1 \\ 2u - v = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{5}{7} \\ v = \frac{11}{7} \end{cases}$$

Vậy $\int_1^2 f(x) dx = u = -\frac{5}{7}$.

Câu 6. Nếu $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$ với $c \in \mathbb{R}$ thì giá trị của c bằng:

- A. 9. B. 6. C. 3. D. 81.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln |2x-1| \Big|_1^5 = \frac{1}{2} \ln 9 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 3$.

Câu 7. Nếu kết quả của $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$ được viết ở dạng $\ln \frac{a}{b}$ với a, b là các số tự nhiên và ước chung lớn nhất của a, b bằng 1. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. $3a - b < 12$. B. $a + 2b = 13$. C. $a - b > 2$. D. $a^2 + b^2 = 41$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3| \Big|_1^2 = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4}$.

Suy ra $a = 5, b = 4$ nên $a - b = 1 < 2$.

Câu 8. Tính tích phân $\int_1^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$, ta thu được kết quả ở dạng $a + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $a^2 + b^2 > 10$.

B. $a > 0$.

C. $a - b > 1$.

D. $b - 2a > 0$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có
$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x-3| - 2\ln|x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - 3\ln 2$$

Suy ra $a = -\frac{1}{2}, b = -3$ nên $a - b > 1$.

Câu 9. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s²). Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. 14 m/s .

B. 13 m/s .

C. 11 m/s .

D. 12 m/s .

Lời giải

Chọn B.

Ta có
$$v(t) = \int v'(t) dt = \int \frac{3}{t+1} dt = 3\ln|t+1| + C$$

Tại thời điểm ban đầu ($t=0$) thì $v(0) = 3\ln 1 + C = 6 \Leftrightarrow C = 6$.

Suy ra $v(t) = 3\ln|t+1| + 6$.

Tại thời điểm $t = 10s \Rightarrow v(10) = 3\ln 11 + 6 \approx 13$ (m/s) .