

EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En los ejercicios 11 al 16, utilice $\log 3 = 0.4771$ y $\log 4 = 0.6021$ para determinar el valor del logaritmo dado.

- | | |
|---------------|--------------------------|
| 11. $\log 12$ | 12. $\log \frac{3}{4}$ |
| 13. $\log 16$ | 14. $\log \sqrt{3}$ |
| 15. $\log 48$ | 16. $\log \frac{1}{300}$ |

En los ejercicios 17 al 26, utilice las leyes de los logaritmos para simplificar la expresión.

17. $\log x(x+1)^4$
18. $\log x(x^2+1)^{-1/2}$
19. $\log \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$
20. $\ln \frac{e^x}{1+e^x}$
21. $\ln xe^{-x^2}$
22. $\ln x(x+1)(x+2)$
23. $\ln \frac{x^{1/2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}$
24. $\ln \frac{x^2}{\sqrt{x(1+x)^2}}$
25. $\ln x^x$
26. $\ln x^{x^2+1}$

En los ejercicios 27 al 40, utilice las leyes de los logaritmos para resolver la ecuación.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| 27. $\log_2 x = 3$ | 28. $\log_3 x = 2$ |
| 29. $\log_2 8 = x$ | 30. $\log_3 27 = 2x$ |
| 31. $\log_x 10^3 = 3$ | 32. $\log_x \frac{1}{16} = -2$ |
| 33. $\log_2(2x+5) = 3$ | |
| 34. $\log_4(5x-4) = 2$ | |
| 35. $\log_2 x - \log_2(x-2) = 3$ | |
| 36. $\log x - \log(x+6) = -1$ | |
| 37. $\log_5(2x+1) - \log_5(x-2) = 1$ | |
| 38. $\log(x+7) - \log(x-2) = 1$ | |
| 39. $\log x + \log(2x-5) = \log 3$ | |
| 40. $\log_3(x+1) + \log_3(2x-3) = 1$ | |

En los ejercicios 41 al 44, trace la gráfica de la ecuación.

41. $y = \log_3 x$
42. $y = \log_{1/3} x$
43. $y = \ln 2x$
44. $y = \ln \frac{1}{2} x$

En los ejercicios 45 y 46, trace las gráficas de las ecuaciones dadas en los mismos ejes coordenados.

45. $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$
46. $y = e^{3x}$ y $y = \ln 3x$

En los ejercicios 47 al 56, utilice los logaritmos para despejar t en la ecuación.

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 47. $e^{0.4t} = 8$ | 48. $\frac{1}{3} e^{-3t} = 0.9$ |
| 49. $5e^{-2t} = 6$ | 50. $4e^{t-1} = 4$ |
| 51. $2e^{-0.2t} - 4 = 6$ | 52. $12 - e^{0.4t} = 3$ |
| 53. $\frac{50}{1+4e^{0.2t}} = 20$ | 54. $\frac{200}{1+3e^{-0.3t}} = 100$ |
| 55. $A = Be^{-t/2}$ | 56. $\frac{A}{1+Be^{t/2}} = C$ |

57. **PRESIÓN SANGUÍNEA** La presión sanguínea sistólica normal de un niño se puede aproximar mediante la función

$$p(x) = m(\ln x) + b$$

donde $p(x)$ se mide en milímetros de mercurio, x se mide en libras, y m y b son constantes. Dado que $m = 19.4$ y $b = 18$, determine la presión sanguínea sistólica de un niño que pesa 92 libras.

58. **MAGNITUD DE TERREMOTOS** En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto está dada por la fórmula

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

donde I es la intensidad del terremoto en cuestión e I_0 es la intensidad estándar de referencia.

- a. Exprese la intensidad I de un terremoto de magnitud $R = 5$ en términos de la intensidad estándar I_0 .
- b. Exprese la intensidad I de un terremoto de magnitud $R = 8$ en términos de la intensidad estándar I_0 . ¿Cuántas veces es mayor la intensidad de un terremoto de magnitud 8 con respecto de un terremoto de magnitud 5?
- c. En épocas recientes, la mayor pérdida de vidas atribuible a un terremoto ocurrió en el este de China en 1976. Conocido como el terremoto de Tangshan, este fenómeno registró 8.2 en la escala de Richter. ¿Cómo se compara la intensidad de este terremoto con la intensidad de un terremoto de magnitud $R = 5$?

59. **INTENSIDAD DEL SONIDO** El volumen relativo de un sonido D de intensidad I se mide en decibeles (db), donde

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es el umbral estándar de audibilidad.

- Exprese la intensidad I de un sonido de 30 decibeles (el nivel sonoro de una conversación normal) en términos de I_0 .
- Determine cuántas veces es mayor la intensidad de un sonido de 80 decibeles (música de rock) con respecto de un sonido de 30 decibeles.
- La exposición prolongada al ruido por arriba de los 150 decibeles provoca la sordera inmediata y permanente. ¿Cómo se compara la intensidad de un sonido de 150 decibeles con la de un sonido de 80 decibeles?

60. **PRESIÓN BAROMÉTRICA** La ley de Halley establece que la presión barométrica (en pulgadas de mercurio) a una altura de x millas sobre el nivel del mar está dada aproximadamente por la ecuación

$$p(x) = 29.92e^{-0.2x} \quad (x \geq 0)$$

Si el tripulante de un globo mide la presión barométrica y determina que ésta es de 20 pulgadas de mercurio, ¿cuál es la altura del globo?

61. **ALTURA DE LOS ÁRBOLES** La altura de cierto tipo de árboles (en pies) está dada aproximadamente por

$$h(t) = \frac{160}{1 + 240e^{-0.2t}}$$

donde t es la edad del árbol en años. Estime la edad de un árbol de 80 pies de altura.

62. **LEY DEL ENFRIAMIENTO DE NEWTON** La temperatura de una taza de café t minutos después de ser servida está dada por

$$T = 70 + 100e^{-0.0446t}$$

donde T se mide en grados Fahrenheit.

- ¿Cuál es la temperatura del café al ser servido?
- ¿Cuándo estará el café suficientemente frío para poder beberlo (digamos 120°)?

63. **LONGITUD DE LOS PECES** La longitud (en centímetros) de un típico hipogloso del Pacífico con t años de edad está dada aproximadamente por

$$f(t) = 200(1 - 0.956e^{-0.18t})$$

Suponga que una persona pesca un hipogloso del Pacífico de 140 cm. ¿Cuál es la edad aproximada del pez?

64. **ABSORCIÓN DE MEDICAMENTOS** La concentración de un medicamento en un órgano al instante t (en segundos) está dada por

$$x(t) = 0.08(1 - e^{-0.02t})$$

donde $x(t)$ se mide en gramos/centímetros cúbicos (g/cm^3).

- ¿Cuánto tiempo tardará en llegar hasta 0.02 g/cm^3 la concentración del medicamento en el órgano?
- ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 0.04 g/cm^3 la concentración de la droga en el órgano?

65. **ABSORCIÓN DE MEDICAMENTOS** La concentración de un medicamento en un órgano al instante t (en segundos) está dada por

$$x(t) = 0.08 + 0.12e^{-0.02t}$$

donde $x(t)$ son gramos/centímetros cúbicos (g/cm^3).

- ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 0.18 g/cm^3 la concentración del medicamento en el órgano?
- ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 0.16 g/cm^3 la concentración del medicamento en el órgano?

66. **CIENCIA FORENSE** Los científicos forenses utilizan la siguiente ley para determinar el momento de la muerte de víctimas de accidentes o de asesinatos. Si T denota la temperatura de un cuerpo a t horas de su muerte, entonces

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)(0.97)^t$$

donde T_0 es la temperatura del aire y T_1 es la temperatura corporal al momento de la muerte. El señor x fue encontrado asesinado a medianoche en su casa, cuando la temperatura de su casa era de 70°F y su temperatura corporal era de 80°F . ¿A qué hora fue asesinado? Suponga que la temperatura corporal normal es de 98.6°F .

En los ejercicios 67 y 68, determine si la afirmación es cierta o falsa. Si es cierta, explique por qué. Si es falsa, dé un ejemplo para mostrar por qué es falsa.

67. $(\ln x)^3 = 3 \ln x$ para toda x en $(0, \infty)$.

68. $\ln a - \ln b = \ln(a - b)$ para cualesquier números positivos a y b .

69. a. Dado que $2^x = e^{kx}$, encuentre k .

- b. Muestre que, en general, si b es un número real no negativo, entonces cualquier ecuación de la forma $y = b^x$ se puede escribir de la forma $y = e^{kx}$, para algún número real k .

70. Utilice la definición de logaritmo para demostrar que

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$

Sugerencia: Sean $\log_b m = p$ y $\log_b n = q$. Entonces $b^p = m$ y $b^q = n$.

71. Utilice la definición de logaritmo para mostrar que

$$\log_b m^n = n \log_b m$$

72. Utilice la definición de logaritmo para mostrar que

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

- ¿Cuántos niños fueron atacados por la enfermedad después del primer día?
- ¿Cuántos niños estaban contagiados después de 10 días?

1. **PROFESORES LAICOS EN ESCUELAS CATÓLICAS** La sustitución de profesores religiosos por laicos en las escuelas católicas se debe en parte al cada vez menor número de hombres y mujeres que ingresan a las órdenes religiosas. El porcentaje de profesores laicos está dado por

$$f(t) = \frac{98}{1 + 2.77e^{-t}} \quad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t se mide en décadas y $t = 0$ corresponde al inicio de 1960. ¿Cuál era el porcentaje de maestros laicos al inicio de 1990?

Fuentes: Asociación Nacional de Educación Católica y Departamento de Educación de Estados Unidos

CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN DE LA MOSCA DE LA FRUTA Con base en los datos reunidos durante un experimento, un biólogo halló que el crecimiento de una población de la mosca de la fruta (*Drosophila*) con una oferta de comida limitada se podría aproximar mediante el modelo exponencial

$$N(t) = \frac{400}{1 + 39e^{-0.16t}}$$

donde t denota el número de días después del inicio del experimento.

- ¿Cuál era la población inicial de la mosca de la fruta en el experimento?
- ¿Cuál era la población de la mosca de la fruta en el día 20?

21. **PORCENTAJE DE CASAS CON VIDEOCASETERA** Según estimaciones de la compañía Paul Kroger Associates, el porcentaje de casas que tienen videocasetera está dado por

$$P(t) = \frac{68}{1 + 21.67e^{-0.62t}} \quad (0 \leq t \leq 12)$$

donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde al inicio de 1985. ¿Qué porcentaje de casas tenían estos aparatos al inicio de 1985 y de 1995?

22. **CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN EN EL SIGLO XXI** La población de Estados Unidos se estima mediante la función

$$P(t) = \frac{616.5}{1 + 4.02e^{-0.5t}}$$

donde $P(t)$ se mide en millones de personas, t se mide en intervalos de 30 años y $t = 0$ corresponde a 1930. ¿Cuál es la población prevista para Estados Unidos en 2020 ($t = 3$)?

23. **DIFUSIÓN DE UN RUMOR** 300 estudiantes asistieron a la ceremonia de inauguración de un nuevo edificio en el campus de su universidad. El presidente de la escuela (que tradicionalmente era sólo para mujeres) anunció un programa de ampliación, con planes para que la escuela fuese mixta (para hombres y mujeres). El número de estudiantes que supieron del nuevo programa t horas después está dado por la función

$$f(t) = \frac{3000}{1 + Be^{-kt}}$$

Si 600 estudiantes del campus han escuchado acerca del nuevo programa dos horas después de la ceremonia, ¿cuántos estudiantes habrán oído de esta política después de cuatro horas?