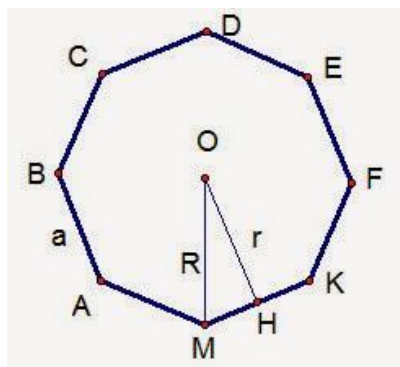


27. Правильные многоугольники

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник с равными сторонами и равными углами.



a - сторона восьмиугольника,
 R - радиус описанной окружности,
 r - радиус вписанной окружности.

Сумма внутренних углов правильного n -угольника
 $180(n-2)$.

Градусная мера внутреннего угла n -угольника
 $180(n-2) : n$.

Сторона правильного n -ка

$$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

Радиус вписанной в правильный многоугольник окружности

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

Площадь правильного n -ка

$$S = \frac{1}{2} R^2 n \cdot \sin \frac{360}{n}$$

$$S = pr$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. а) Сумма внутренних углов шестиугольника равна:

1) 360° ; 2) 180° ; 3) 720° ; 4) 540° .

б) Сумма внутренних углов восьмиугольника равна:

1) 360° ; 2) 180° ; 3) 720° ; 4) 1080° .

Решение:

а) По формуле сумма углов шестиугольника равна: $180(6-2)=180 \cdot 4=720^\circ$.

Ответ: 720° .

2. а) Сторона правильного многоугольника равна 5 см, внутренний угол равен 144° .
Найдите периметр многоугольника.

а) Сторона правильного многоугольника равна 7 см, внутренний угол равен 150° .

Найдите периметр многоугольника.

Решение:

а) 1) Найдем количество сторон многоугольника:

$$144=180(n-2):n;$$

$$144n=180n-360;$$

$$36n=360;$$

$$n=10.$$

2) Найдем периметр десятиугольника: $P=5 \cdot 10=50$ см.

Ответ: 50 см.

3. а) Периметр правильного пятиугольника равен 30 см. Найдите диаметр окружности, описанной вокруг пятиугольника.

б) Диаметр окружности равен 10 см. Найдите периметр вписанного в нее пятиугольника.

Решение:

а) 1) Найдем сторону пятиугольника: $30:5=6$ см.

2) Найдем радиус описанной окружности:

$$a=2R \cdot \sin(180^\circ:n);$$

$$6=2R \cdot \sin(180^\circ:5);$$

$$R=3:\sin 36^\circ=3:0,588=5,1 \text{ см}$$

Ответ: 5,1 см.

4. а) Сумма внутренних углов правильного многоугольника равна 2520° . Найдите количество сторон многоугольника.

б) Сумма внутренних углов правильного многоугольника равна 1800° . Найдите количество сторон многоугольника.

Решение:

а) Найдем количество сторон многоугольника:

$2520^\circ = 180^\circ (n-2)$;
 $2520^\circ + 360^\circ = 180^\circ n$;
 $2880^\circ = 180^\circ n$;
 $n=16$.
 Ответ: 16 сторон.

5. а) Радиус окружности, описанной около правильного двенадцатиугольника равен 5 см. Найдите площадь многоугольника.

б) Радиус окружности, описанной около правильного восьмиугольника равен 6 см. Найдите площадь многоугольника.

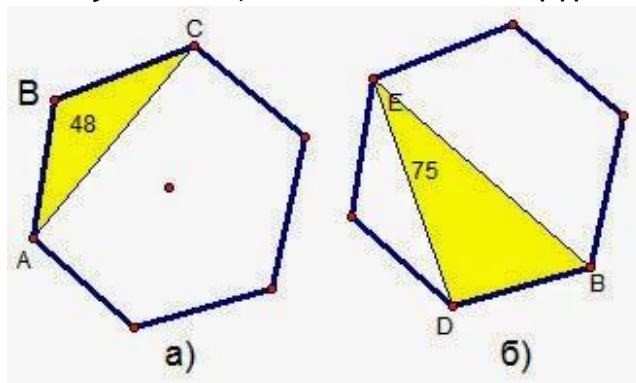
Решение:

а) Найдём площадь двенадцатиугольника:

$$S = 0,5 \cdot R^2 \cdot n \cdot \sin(360^\circ : n) = 0,5 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 75 \text{ см}^2.$$

Ответ: 75 см².

6. Найдите площадь шестиугольника, если известна площадь закрашенной части:



Решение:

а) 1) Найдём длину стороны АВ шестиугольника. Рассмотрим треугольник ABC - равнобедренный (AB=BC).

$$\angle ABC = 180^\circ (6-2) : 6 = 120^\circ.$$

Площадь треугольника ABC равна $0,5 \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ$ и равна по условию 48.

$$AB^2 = \frac{48 \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{192}{\sqrt{3}}$$

2) В правильном шестиугольнике сторона равна радиусу описанной окружности, следовательно $R=AB$.

3) Найдём площадь шестиугольника:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \cdot n \cdot \sin \frac{360}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{192}{\sqrt{3}} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 288 \text{ см}^2$$

Ответ: 288 см².

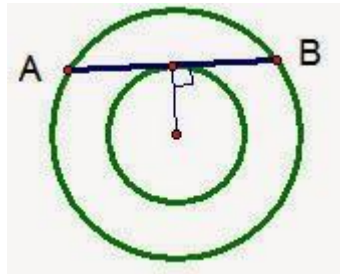
7. а) Найдите число сторон правильного многоугольника, если его внешний угол при вершине равен 18° .

б) Найдите число сторон правильного многоугольника, если его внешний угол при вершине равен 45° .

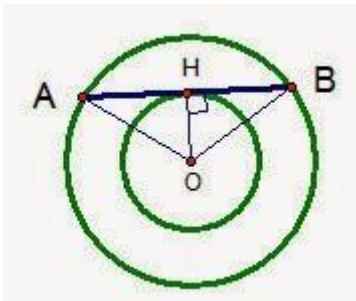
Решение:

а) Сумма внешних углов правильного многоугольника равна 360° .
 Найдём количество сторон: $360^\circ : 18^\circ = 20$.
 Ответ: 20 сторон.

8. Вычислите площадь кольца, если хорда АВ равна:
 а) 8 см; б) 10 см.



Решение:
 а)



1) OB - радиус внешней окружности, OH - радиус внутренней окружности. Площадь кольца можно найти по формуле: S кольца = S внешней окружности - S внутренней окружности.

$$S = \pi \cdot OB^2 - \pi \cdot OH^2 = \pi (OB^2 - OH^2).$$

2) Рассмотрим треугольник ABO - равнобедренный ($OA=OB$ как радиусы). OH является в треугольнике ABO высотой и медианой, следовательно, $AH=HB=8:2=4$ см.

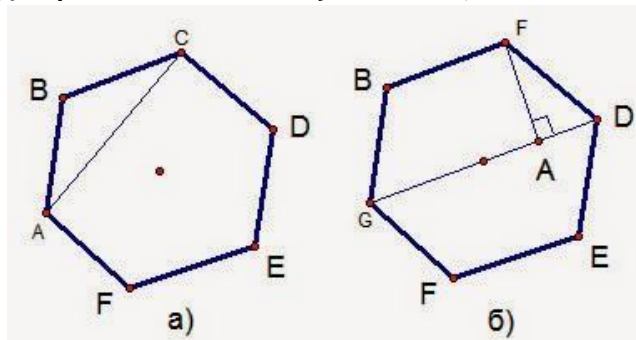
3) Рассмотрим треугольник $OHВ$ - прямоугольный: $HB^2=OB^2-OH^2$, следовательно $OB^2-OH^2=16$.

4) Найдём площадь кольца:

$$S = \pi (OB^2 - OH^2) = 16\pi \text{ см}^2.$$

Ответ: $16\pi \text{ см}^2$.

9. а) Найдите периметр правильного шестиугольника, если $AC=9$ см.
 б) Найдите площадь правильного шестиугольника, если $FA=6$ см.



Решение:

а) 1) Найдём угол ABC : $180^\circ (6-4):6=120^\circ$.

2) Рассмотрим треугольник ABC - равнобедренный (AB=BC как стороны правильного шестиугольника).

$$\angle BAC = \angle BCA = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ.$$

По теореме синусов: $AC : \sin \angle ABC = AB : \sin \angle BCA$;

$$AB = AC \cdot \sin 30^\circ : \sin 120^\circ;$$

$$AB = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,25\sqrt{3} \text{ см}$$

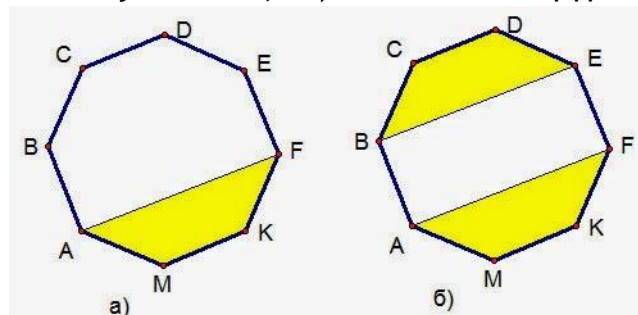
3) Найдем периметр правильного шестиугольника:

$$P = 6 \cdot AB;$$

$$P = 13,5\sqrt{3} \text{ см.}$$

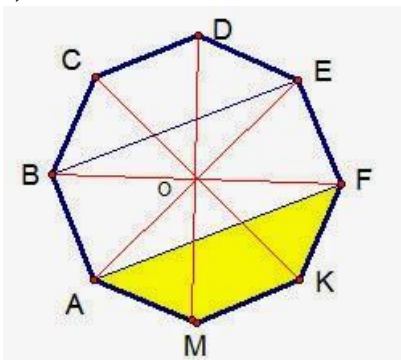
10. Докажите, что в правильном восьмиугольнике площадь закрашенной части равна:

а) четверти площади восьмиугольника; б) половине площади восьмиугольника:



Решение:

а)



1) Проведем биссектрисы углов восьмиугольника, они пересекутся в точке O. Площадь восьмиугольника равна сумме площадей восьми получившихся равных треугольников, т.е. $S(ABCDEFKM) = 8 \cdot S(OEF)$.

2) Четырехугольник ABEF - параллелограмм ($AB \parallel EF$ и $AB=EF$). Диагонали параллелограмма равны: $AE=BF$ (как диаметры описанной около восьмиугольника окружности), следовательно, ABEF - прямоугольник. Диагонали прямоугольника делят его на четыре равновеликих треугольника.

3) Найдем площадь четырехугольника AFKM:

$$S(ABEF) = 4 \cdot S(OEF).$$

$$2 \cdot S(AFKM) = S(ABCDEFKM) - S(ABEF) = 8 \cdot S(OEF) - 4 \cdot S(OEF) = 4 \cdot S(OEF).$$

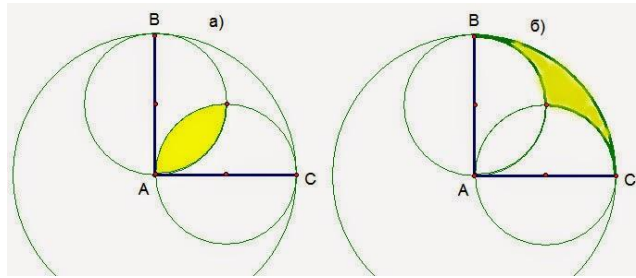
$$S(AFKM) = 2 \cdot S(OEF).$$

4) Найдем отношение площади восьмиугольника к площади закрашенной части:

$$S(ABCDEFKM) : S(AFKM) = 8 \cdot S(OEF) : (2 \cdot S(OEF)) = 4.$$

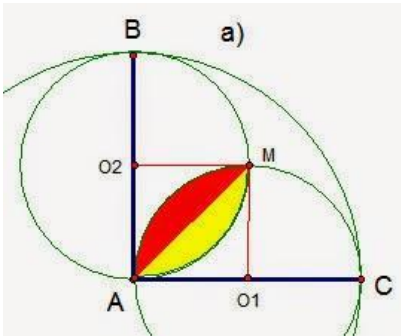
Что и требовалось доказать.

11. Найдите отношение площади сектора ВАС к площади закрашенной фигуры, если $BA=AC$ и площадь сектора ВАС равна четверти площади круга:



Решение:

а)



1) $AB=AC=2R$. Угол ВАС - прямой, т.к. площадь сектора ВАС равна четверти площади круга.

2) Рассмотрим четырехугольник AO_2MO_1 . Он является ромбом, т.к. все стороны равны радиусу, а т.к. один из углов равен 90° , то AO_2MO_1 - квадрат.

3) Найдем площадь сегмента, закрашенного красным цветом:

$S = S$ сектора AO_1M - S треугольника AO_1M .

S сектора = $\pi * R^2 * 90 : 360 = 0,25\pi R^2 \text{ см}^2$

S треугольника = $0,5R^2 \text{ см}^2$.

S сегмента = $(0,25\pi - 0,5)R^2 \text{ см}^2$.

S закрашенной части = $2 * S$ сегмента = $2 * (0,25\pi - 0,5)R^2 = (0,5\pi - 1)R^2 \text{ см}^2$.

4) Найдем площадь сектора ВАС:

S сектора = $\pi * (2R)^2 * 90 : 360 = \pi R^2 \text{ см}^2$.

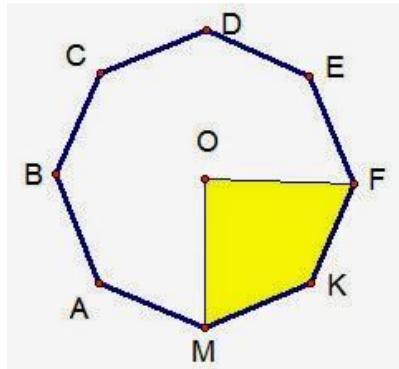
5) Найдем отношение площади сектора ВАС к площади закрашенной части:

$\pi R^2 : (0,5\pi - 1)R^2 = 2\pi : (\pi - 2)$.

Ответ: $2\pi : (\pi - 2)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Чему равна сумма внешних углов пятиугольника?
2. Чему равна площадь восьмиугольника, если площадь закрашенной области равна 20.



3. Периметр правильного четырехугольника равен 20 см. Найдите длину вписанной в него окружности.
4. Сторона АВ правильного многоугольника равна 8 см. О - центр многоугольника, угол АОВ равен 36° . Найдите периметр многоугольника.
5. Периметр правильного восьмиугольника равен 80 см. Найдите его меньшую диагональ.
6. В правильный треугольник вписана окружность и вокруг него описана окружность. Найдите площадь кольца, образованного окружностями, если сторона треугольника равна 8 см.
7. Найдите угол между двумя меньшими диагоналями, выходящими из одной вершины правильного семиугольника.
8. Около окружности описан правильный треугольник, и в нее же вписан правильный шестиугольник. Найдите отношение площадей треугольника и шестиугольника.
9. Выпуклый многоугольник имеет 48 сторон. Найдите число его диагоналей.
10. ABCD - квадрат. Из вершин В и С проведены окружности радиуса АВ. Найдите отношение площади закрашенной фигуры к площади квадрата:

