2021線性代數期末題庫:

1.第四章，習題53（page.218），有解答

**53.** 在 $R^2$ 中，基底 $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 和 $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$，其中

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) 求從 $B$ 到 $B'$ 的轉移矩陣。

(b) 求從 $B'$ 到 $B$ 的轉移矩陣。

(c) 求座標向量 $[\mathbf{w}]_B$ 和 $[\mathbf{w}]_{B'}$，其中

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

注意:第一題課本的解答，(a),(b)答案要互調。

2.第四章，習題4（page.219），有解答

**54.** 在 $P_3$ 中，基底 $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 和 $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$，其中

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(a) 求從 $B$ 到 $B'$ 的轉移矩陣。

(b) 求座標向量 $[\mathbf{w}]_B$ 和 $[\mathbf{w}]_{B'}$，其中

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(c) 請以不同的算法直接求 $[\mathbf{w}]_{B'}$。

3.第四章，習題57（page.219），有解答

**57.** 令 $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 和 $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 為 $R^3$ 的基底，其中 $\mathbf{u}_1 = (-3, 0, -3)$、$\mathbf{u}_2 = (-3, 2, -1)$、$\mathbf{u}_3 = (1, 6, -1)$、$\mathbf{v}_1 = (-6, -6, 0)$、$\mathbf{v}_2 = (-2, -6, 4)$ 和 $\mathbf{v}_3 = (-2, -3, 7)$

(a) 求轉移矩陣 $P_{B_1 \to B_2}$。

(b) 令 $\mathbf{w} = (-5, 8, -5)$，求 $[\mathbf{w}]_{B_1}$，並利用轉移矩陣求 $[\mathbf{w}]_{B_2}$。

(c) 請以不同的算法直接求 $[\mathbf{w}]_{B_2}$。

4.第四章，習題31（page.217），有解答

**31.** 下列何組向量可為 $R^2$ 的基底。

(a) $\{(3, 1), (0, 0)\}$　　(b) $\{(4, 1), (-7, -8)\}$

(c) $\{(5, 2), (-1, 3)\}$　　(d) $\{(3, 9), (-4, -12)\}$

解題思路:

31-(b). (4,1), (-7,-8), 可否為空間基底?

① 可否為基底, 就是問你 $v_1$ $v_2$ 是否為線性独立?

② 判別是否為線性独立的解法, 有2种思路.

③ 方法I: 理解法: (由判別是否線性相依入手).

若 $v_1=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}-7\\-8\end{bmatrix}$, 是線性相依.

則 $a\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-7\\-8\end{bmatrix}=0$ (相依=相关, $av_1+bv_2=0$)

變成 $\begin{bmatrix}4&-7\\1&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=0$ (自己証明看看, 本式与上式是否相[illegible]

解 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$. 用高斯消去法

擴展矩陣 $\begin{bmatrix}4&-7&0\\1&-8&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&\frac{-7}{4}&0\\0&\frac{7}{4}-8&0\end{bmatrix}$

結果. $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

判別思路: $a\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-7\\-8\end{bmatrix}=0$. 求解 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

① 若 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$解 除了 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$外. 無其它解, 表示. $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-7\\-8\end{bmatrix}$. 彼此無関 (線性独[illegible]

② 若 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$解 除了 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$外 還有其它解, 表示 $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7\\-8\end{bmatrix}$; 彼此相関 (線性相[illegible]

今 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 除了 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$外, 沒有其它解.

故 $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7\\-8\end{bmatrix}$ 為線性独立.

④ 方法II: 快速判別公式:
① $n\times n$ 矩陣. 若 $\det(A)\neq0$, 線性独立
② $m\times n$ 矩陣. 簡化到梯形. 只有唯一零解. 線性独立

今 $\det\left(\begin{bmatrix}4&-7\\1&-8\end{bmatrix}\right)=25\neq0$. 故為線性独立.

7.第四章，習題50（page.218），有解答

**50.** 在 $R^3$ 中，試求向量 $\mathbf{v}$ 相對於基底 $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 的座標向量。

(a) $\mathbf{v}=(2,-1,3)$; $\mathbf{v}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{v}_2=(2,2,0)$, $\mathbf{v}_3=(3,3,3)$

(b) $\mathbf{v}=(5,-12,3)$; $\mathbf{v}_1=(1,2,3)$, $\mathbf{v}_2=(-4,5,6)$, $\mathbf{v}_3=(7,-8,9)$

10.第四章，習題60（page.219），有解答

**60.** 判斷 $\mathbf{b}$ 是否落於 $A$ 的行空間，若是，請以 $A$ 的行向量線性組合表示之。

(a) $A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$

11.第四章，習題64（page.220），有解答

**64.** 求以下各組向量所生成 $R^4$ 子空間的基底。

(a) $(2,4,-2,3)$, $(-2,-2,2,-4)$, $(1,3,-1,1)$

(b) $(-1,1,-2,0)$, $(3,3,6,0)$, $(9,0,0,3)$

12.第四章，習題65（page.220），有解答

**65.** 求以下各組向量所生成空間的基底，並將非基底向量以基底向量做線性組合表示。

(a) $\mathbf{v}_1 = (1, -4, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 1)$,
$\mathbf{v}_3 = (1, 2, -2, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, -2)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 0, 6)$,
$\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, -1, 2, 3)$

13.第四章，習題68（page.220），有解答

**68.** 求以下矩陣的秩和核數，並驗證其滿足 4.8 節所述的維度定理（n = rank +nullity）

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

# 期末題庫part2

14.第六章，習題4，5，6（page.317），有解答

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**4.** 求以下矩陣之特徵方程式。

**5.** 試求上題矩陣的特徵值。

**6.** 試求上題矩陣的特徵空間基底。

15.第六章，習題17（page.318），有解答

**17.** 令

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) 求 $A$ 的特徵值。

(b) 對每一特徵值 $\lambda$，求 $(\lambda I - A)$ 矩陣的秩。

(c) 是否可對角化 $A$？說明理由。

16.第六章，習題21，22（page.318），有解答

求可將矩陣 $A$ 對角化的一矩陣 $P$，並計算 $P^{-1}AP$。

**21.** $A = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$ **22.** $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

17.第六章，習題28（page.318），有解答

**28.** 求以下矩陣 $A$ 的次冪 $A^{1000}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# 期末作業part3

18.第七章，習題20（page.380），有解答

**20.** 求以下轉換在 $R^2$ 中的標準矩陣。

(a) 對稱 $y = x$ 做鏡射後，對 $y$-軸進行正交投影，最後再旋轉 60°。

(b) 對稱 $x$-軸做鏡射後，進行旋轉 60°，再擴張 $k = 3$ 倍。

(c) 旋轉 –60° 後，再旋轉 105°，最後再旋轉 45°。

19.第七章，習題19（page.380），有解答

**19.** 令 $T_1(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, -x_1 + 2x_2, x_1 - 3x_2)$ 與 $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_3, x_1 + x_3)$.

(a) 求 $T_1$ 和 $T_2$ 的標準矩陣。

(b) 求 $T_1 \circ T_2$ 和 $T_2 \circ T_1$ 的標準矩陣。

(c) 利用 (b)，求 $T_1(T_2(x_1, x_2, x_3))$ 和 $T_2(T_1(x_1, x_2, x_3))$。

21.第七章，習題63（page.383），有解答

**63.** 判斷做成以下矩陣 $A$ 的結果，是否為一對一轉換？

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 15 & 21 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

22.第七章，習題64（page.383），有解答

**64.** 承上題，何者為映成（onto）轉換？

23.第七章，習題50～52(page.382)，有解答

習題 50~52 中，若左乘矩陣 $A$，求

(a) 轉換 $T$ 之值域基底。

(b) 轉換 $T$ 之核空間基底。

(c) 轉換 $T$ 的秩和核數。

(d) 矩陣 $A$ 的秩和核數。

**50.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

**51.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 25 \end{bmatrix}$

**52.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

24.第七章, 習題40(page.381), 有解答

**40.** 若 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 為 $R^2$ 中的基底，其中 $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ 且 $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$，並令 $T: R^2 \to R^2$ 為線性算子，且滿足

$$T(\mathbf{v}_1) = (2, 3) \text{ 與 } T(\mathbf{v}_2) = (-2, 0)$$

求 $T(x_1, x_2)$ 之公式，並用以求 $T(5, -3)$。

24.第七章, 習題41(page.381), 有解答

**41.** 若 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 為 $R^2$ 中的基底，其中 $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$ 且 $\mathbf{v}_2 = (-1, 3)$，並令 $T: R^2 \to R^3$ 為線性算子，且滿足

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 2, 0) \text{ 與 } T(\mathbf{v}_2) = (0, 3, 5)$$

求 $T(x_1, x_2)$ 之公式，並用以求 $T(2, -3)$。

25.第七章，習題42（page.381），有解答

**42.** 若 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 為 $R^2$ 中的基底，其中 $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$，並令 $T: R^3 \to R^3$ 為線性算子，使得

$$T(\mathbf{v}_1) = (-1, 2, 4), \quad T(\mathbf{v}_2) = (0, 3, 2),$$
$$T(\mathbf{v}_3) = (1, 5, -1)$$

求 $T(x_1, x_2, x_3)$ 之公式，並用以求 $T(2, 4, -1)$。