

COMPOSITION DE PHYSIQUE I

Vendredi 9 mai 1997 de 14 h à 18 h

La plus grande importance sera attachée à la présentation et à la rédaction.

Seuls seront corrigés les résultats encadrés répondant explicitement à la (les) question(s) posée(s), exprimé(s) avec les notations strictes de l'énoncé, sous leur forme la plus simple, en tenant compte de l'esprit de la question. Ceci se traduira par des points de minoration ne dépassant pas 10 % de la note.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Première partie : Electromagnétisme

I. Ondes planes dans le vide

1. Dans le vide, rapporté à un trièdre Oxyz, le champ électrique d'une onde plane peut être écrit sous la forme $\exp i(\dots)$ avec $\dots$ et $\dots$. Dans quel plan est la direction de propagation de l'onde ? Quel angle θ fait la direction de propagation avec l'axe Oz ? A quelle vitesse se propage cette onde ? Quelles sont les expressions de sa période et de sa longueur d'onde ?

1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$, associé à $\vec{E}$.

A cette onde plane on superpose une seconde caractérisée par un champ électrique

$$= \exp i(\dots) \text{ avec } \dots$$

1. Représenter sur un schéma les champs $\vec{E}$, $\vec{B}$, à l'instant t au point O.
1. Calculer en tout point de l'espace les champs électriques et magnétiques résultants. Ce champ électromagnétique a-t-il une structure d'onde plane ? Dans quelle direction se propagent ces champs ? Définir la vitesse de phase.
1. Que valent les composantes normales et tangentielles des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans les plans avec n entier.

II. Réflexion normale sur un conducteur métallique

On considère une onde plane progressive harmonique de pulsation ω se propageant dans le vide dans une direction caractérisée par le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Le champ électrique associé à l'onde est parallèle à la direction Oz. Cette onde, appelée onde incidente arrive sous incidence normale sur un conducteur métallique qui occupe le demi espace $x > 0$.

Le conducteur ohmique est caractérisé par une permittivité ϵ , une perméabilité μ et une conductivité σ . Une partie de l'onde est réfléchie, une partie est transmise. Les champs électriques associés respectivement à ces ondes s'écrivent :

$E_i = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$ constante réelle
 $E_r = E_0 e^{i(kx + \omega t)}$, $E_t = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$ sont à priori complexes

1. La conductivité électrique est σ . Montrer que pour des fréquences suffisamment basses, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.
1. Dans ce cas établir l'équation de dispersion dans le conducteur métallique (relation entre k et ω).
 Exprimer k en fonction de la longueur λ appelée épaisseur de peau.
1. Déterminer ϵ et μ .
 Quelle est la signification physique des parties réelle et imaginaire de ϵ ?
1. En utilisant les conditions de passage du champ électrique et du champ magnétique à l'interface vide métal, déterminer E_r et E_t en fonction de E_0 , dans les conditions où $\sigma \gg \omega \epsilon$.
1. Donner l'expression des champs E et B en tout point du milieu métallique, ainsi que la densité volumique de courant J .
1. Quand $\sigma \gg \omega \epsilon$, (modèle du conducteur parfait), montrer que les champs électriques et magnétiques sont nuls dans le métal.
 En écrivant l'équation de discontinuité de la composante tangentielle de B , déterminer l'expression réelle de la densité de courant surfacique J_s .
1. Dans le cas de l'approximation du conducteur parfait, donner l'expression du champ électrique total et du champ magnétique total dans le vide.
 Expliquer le terme d'onde stationnaire.
1. Déterminer alors la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Conclure.

Deuxième partie - Mécanique des fluides : étude d'écoulements visqueux

I. Écoulement de Couette plan

L'espace est rapporté à un trièdre Oxyz, de vecteurs de base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Oy est dirigé suivant la verticale ascendante. On néglige les effets de la pesanteur.

Un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η est enfermé entre deux plaques planes, infinies, parallèles, perpendiculaires à Oy et de cotes respectives : $y = 0$ et $y = L$.

La plaque de cote $y = 0$ est fixe, la plaque de cote $y = L$ est animée d'une vitesse $\mathbf{U}$.

1. Exprimer l'accélération d'une particule fluide en fonction du champ eulérien des vitesses de l'écoulement fluide.

1. L'écoulement entre les plaques est supposé établi, stationnaire et unidirectionnel. En un point de l'écoulement, $\mathbf{v} = v(x,y)\mathbf{i}$. On admettra que v ne dépend pas de z .

Montrer que v ne dépend pas de x .

Que peut-on dire de l'accélération de la particule fluide ?

1. Faire le bilan des forces surfaciques de frottement visqueux subies par la particule fluide pour aboutir à l'expression de la densité volumique de force de viscosité.

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule fluide.

Montrer qu'il n'est pas nécessaire qu'il existe un gradient de pression suivant Ox pour que l'écoulement existe. On supposera que c'est le cas. En déduire l'expression de la vitesse en un point $M(x,y,z)$ en fonction de V_p , y et L .

1. Quelle est la force par unité de surface subie par chacune des plaques ? Commentez.

II. Écoulement de Poiseuille plan

On considère maintenant que les deux plaques sont fixes. L'écoulement est établi, stationnaire et unidirectionnel soit : $\mathbf{v} = v(x,y)\mathbf{i}$. le champ des vitesses et $P = P(x,y)$ le champ de pression.

1. Quels sont les résultats de l'étude précédente qui sont encore valables ?

Montrer que P ne dépend pas de y . On suppose constant, on appellera K cette constante.

Quelle est la cause qui provoque l'écoulement ?

1. Exprimer le champ des vitesses. Calculer la vitesse maximale. Quel est le signe de K si v est positive ? Justifiez vos conclusions.

Représenter le profil des vitesses $v = f(y)$ entre les deux plaques.

1. Soit q le débit volumique à travers une section délimitée par les plaques ($y = 0$ et $y = L$) et par les plans $z = -h/2$ et $z = h/2$. Calculer q . Commenter le résultat

III. Écoulement entre une plaque fixe et une plaque mobile, non parallèles

On considère une plaque infinie Π' , plane, perpendiculaire à Oy, de cote $y = 0$ et se déplaçant avec la vitesse $\mathbf{U} = -U\mathbf{j}$.

On considère une plaque rectangulaire Π , de cotés a et b , avec $b \gg a$.

Les cotés de longueur b sont parallèles à Oz . La plaque Π fait un “ petit ” angle θ avec le plan xOz : ses deux cotés de longueur b sont respectivement à des distances e_1 et e_2 de la plaque Π' . On a $e_1 \leq a$ et $e_2 \leq a$.

On note $e(x)$ la distance d'un point de Π au plan Π' : voir la figure.

1. Le champ de vitesse est de la forme : $(M) = +$.
Exprimer la condition d'incompressibilité de l'écoulement.

On admettra par la suite que l'écoulement peut être obtenu à partir des résultats des parties I et II avec , ce qui revient à écrire $(M) =$.

a) Justifiez la forme de (M) précédente. Est-elle en contradiction avec la condition d'incompressibilité ?

b) Donner l'expression de $v_x(x,y)$ en un point M de la forme :

1. Soit q le débit volumique à travers un rectangle parallèle au plan yOz , de cotés $e(x)$ et b . Montrer que q se conserve quel que soit x entre les deux plaques Π et Π' . Exprimer q en fonction de η , K , b et $e(x)$.
1. Sachant que , exprimer la pression $P(x)$ en un point de l'écoulement en fonction de q , η , b , U , $e(x)$, e_1 , e_2 et a , en admettant que $P(x) = P_0$ pour $x = 0$. (On pourra prendre $e(x)$ comme variable d'intégration).
1. En déduire l'expression de q en fonction de b , e_1 et e_2 . Commenter la valeur limite lorsque e_2 tend vers e_1 , qu'implique-t-elle pour K ?
1. Ecrire les intégrales permettant de calculer les composantes F_y et F_x de la force résultante subie par la plaque Π .

On ne calculera pas ces intégrales, on obtient :

$$F_y = \text{ et } F_x = \text{ avec } .$$

Commentez les résultats lorsque e_2 tend vers e_1 .

1. On envisage le cas $e_2 = 5e_1$ et $c = 0,05$. Comparer les ordres de grandeur de F_x et F_y . Commenter les résultats : à quel phénomène important industriellement ce qui précède vous fait-il penser ?
1. Une feuille de papier glisse facilement quand on la déplace parallèlement à une surface horizontale fixe. Ce n'est pas le cas si la feuille est percée de trous. Interpréter.
