
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)

CURSO 2023-2024

MATERIA: MATEMÁTICAS II	
Convocatoria:	JULIO

Instrucciones:
- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2+3}, & si\ x \leq 0 \\ \frac{ax}{e^x - 1} + 2, & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$.

(1,75 ptos)

Resolución

Para x ≠ 0, f es continua y derivable independientemente de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables y

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(2x-b)(x^2+3)-(x^2-bx+9)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{bx^2-12x-3b}{(x^2+3)^2}, & si\ x < 0 \\ \frac{a(e^x-1)-axe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{a(e^x-1-xe^x)}{(e^x-1)^2}, & si\ x > 0 \end{cases}$$

$f(x) = \frac{0^2 - b0 + 9}{0^2+3} = 3$; $\frac{ax}{e^x-1} = \frac{a0}{e^0-1} = \frac{0}{0}$ Indeterminación.

Aplicamos la regla de L´Hôpital: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(ax)'}{(e^x-1)'} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{a}{e^x} = \frac{a}{e^0} = a$. Luego, $f(x) = a + 2$

Al ser continua en 0, a + 2 = 3, a = 1 ; $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2+3}, & si\ x \leq 0 \\ \frac{x}{e^x - 1} + 2, & si\ x > 0 \end{cases}$,

$f'(x) = \begin{cases} \frac{bx^2-12x-3b}{(x^2+3)^2}, & si\ x < 0 \\ \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}, & si\ x > 0 \end{cases}$

$f'(x) = \frac{b0^2 - 12.0 - 3b}{(0^2+3)^2} = \frac{-b}{3}$; $f'(x) = \frac{e^0 - 1 - 0e^0}{(e^0-1)^2} = \frac{0}{0}$ Indetermin. Aplicamos L´Hôpital:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(e^x - 1 - xe^x)'}{\left[(e^x-1)^2\right]'} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1.e^x - xe^x}{2(e^x-1)e^x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x}{2(e^x-1)} = \frac{0}{0}$ Indetermin. Otra vez L´Hôpital:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(-x)'}{[2(e^x-1)]'} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{2e^x} = \frac{-1}{2}$. Luego, $f'(x) = \frac{-1}{2}$. Es derivable en $0 \Rightarrow \frac{-b}{3} = \frac{-1}{2}$; $b = \frac{3}{2}$

Conclusión: debe ser a = 1, $b = \frac{3}{2}$ y queda $f(x) = \{\frac{x^2 - \frac{3}{2}x + 9}{x^2+3},\ si\ x \le 0\ \frac{x}{e^x - 1} + 2,\ si\ x > 0$

b) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = -1$

(0,75 ptos)

Resolución

Para a = 1, b = –2, $f(x) = \{\frac{x^2 + 2x + 9}{x^2+3},\ si\ x \le 0\ \frac{x}{e^x - 1} + 2,\ si\ x > 0$ y si x ≠ 0,

$f'(x) = \{\frac{-2x^2 - 12x + 6}{(x^2+3)^2},\ si\ x < 0\ \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2},\ si\ x > 0$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

En este caso, $x_0 = -1$, $f'(x_0) = f'(-1) = \frac{-2(-1)^2 - 12(-1) + 6}{[(-1)^2+3]^2} = 1$;

$f(x_0) = f(-1) = \frac{(-1)^2 + 2(-1) + 9}{(-1)^2 + 3} = 2$.

La recta tangente es $rtg: y = 1(x+1) + 2 \Rightarrow rtg: y = x + 3$

1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x(3 - x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €.

(2,5 ptos)

Resolución

$y = x(3-x) = 3x - x^2$ representa una parábola cóncava que corta a los ejes en (0, 0) y (3, 0) y, que como $(3x - x^2)' = 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, $y = 3\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, su vértice es $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

$y = x^2 - 7x + 8$ representa una parábola convexa ; $x^2 - 7x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{2}$, x = 1, x = 6 ; corta

a

los ejes en (1, 0), (6, 0) y (0, 8); como

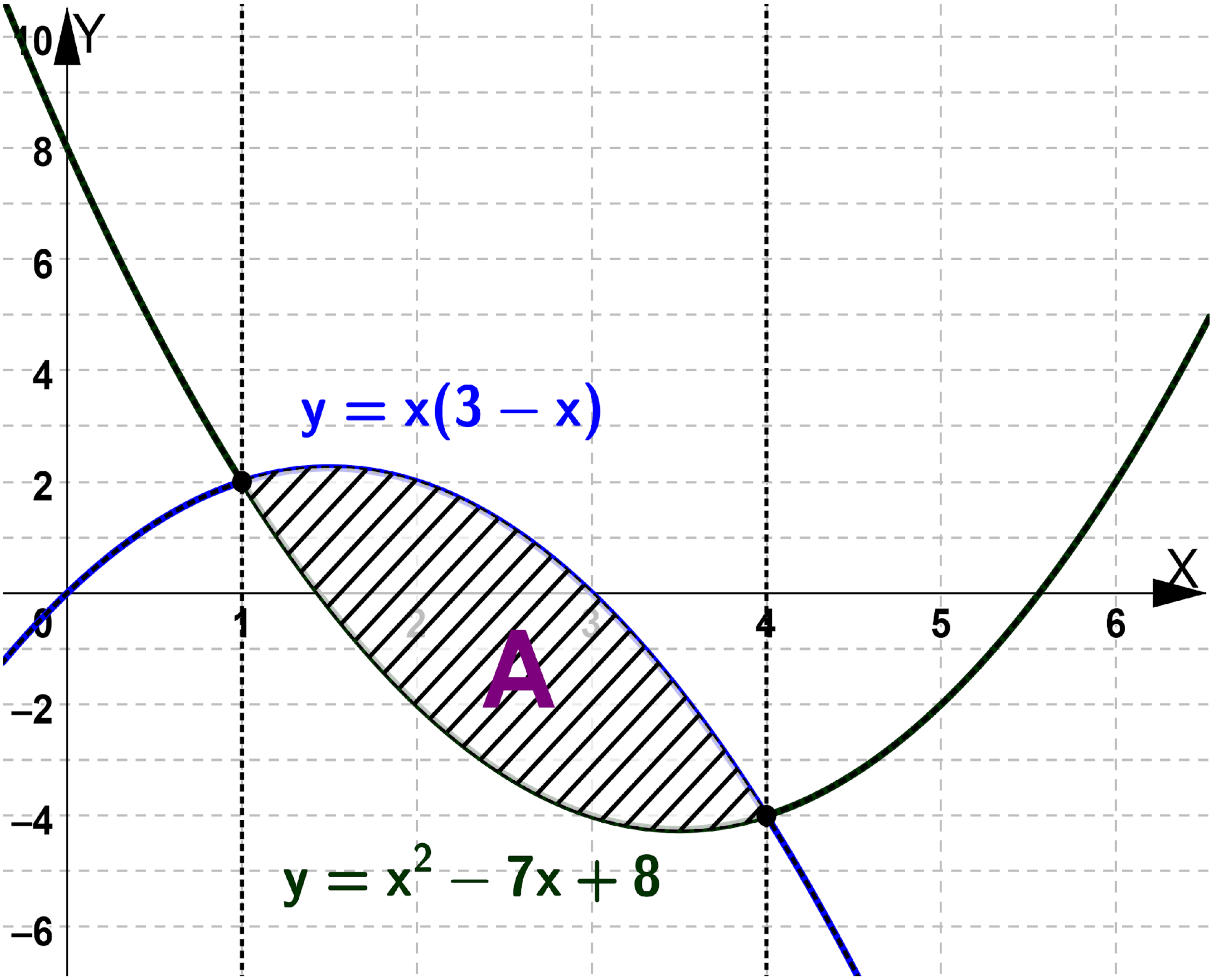
$(x^2 - 7x + 8)' = 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$, $y = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\frac{7}{2} + 8 = \frac{-17}{4}$,

su vértice es $\left(\frac{7}{2}, \frac{-17}{4}\right)$

Estudiemos los puntos de corte entre las parábolas: $3x - x^2 = x^2 - 7x + 8 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0$

Simplificando, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, x = 1, x = 4 para x = 1, $y = 1(3 - 1) = 2$ y para x = 4, $y = 4(3 - 4) =- 4$. Las parábolas se cortan en (1, 2) y (4, –4)

El esbozo que se pide sería:



El área que se pide es $A = \int_1^4 \left[3x - x^2 - (x^2 - 7x + 8)\right]dx = \int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8)dx$.

Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = \frac{-2x^3}{3} + 5x^2 - 8x = \frac{15x^2 - 24x - 2x^3}{3}$. Por Barrow,

$A = p(4) - p(1) = \frac{15.4^2 - 24.4 - 2.4^3}{3} - \frac{15.1^2 - 24.1 - 2.1^3}{3} = \frac{16}{3} - \frac{-11}{3} = 9\ m^2$

El área es 9 m^2 y el coste sería 9 m^2 . 65 €/m^2 = 585 €

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)
2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno.

(2,5 ptos)

Resolución

Sean x, y, z las cantidades en € de Aythami, Besay y Chamaida, respectivamente. Según el enunciado,

$\{\frac{x+y}{x-y} = \frac{11}{5}\ x - z = 2y\ 2(y + z) = x + 2 \Rightarrow \{5x + 5y = 11x - 11y\ - x + 2y + z = 0\ - x + 2y + 2z = 2 \Rightarrow \{- 6x + 16y = 0\ - x + 2y + z = 0\ - x + 2y + 2z = 2 \Rightarrow \{- 3x + 8y = 0\ - x + 2y + z = 0\ - x + 2y + 2z = 2$.

Lo resolvemos por el método de Gauss. La matriz del sistema es

$A^* = (- 3\ 8\ 0\ 0\ - 1\ 2\ 1\ 0\ - 1\ 2\ 2\ 2) f1 - 3f3\ f3 - f2\ \ (0\ 2\ - 6\ - 6\ 0\ 0\ 1\ 2\ - 1\ 2\ 2\ 2)\ f1 : (- 2)\ \ ($

que corresponde al

sistema $\{- y + 3z = 3\ z = 2\ - x + 2y + 2z = 2$. Resolviendo, y = 3z – 3 = 3.2 – 3 = 3 ; x = 2y + 2z – 2 = 2.3 + 2.2 – 2 = 8

Aythami tiene 8 €, Besay 3 € y Chamaida 2 €

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k = (k\ 0\ k\ 0\ k\ 0\ 2k - 3\ 0\ k)$, $k \in R$

a) Estudiar el rango de la matriz M_k, dependiendo de los valores del parámetro k. (1,25 ptos)

Resolución

det $M_k = k^3 - k^2(2k - 3) = k^2(k - 2k + 3) = k^2(-k + 3) = 0 \Leftrightarrow k = 0,\ k = 3$

– Si $k \neq 0$ y 3, det $M_k \neq 0$ y rg $M_k = 3$

– Si k = 0, $M_0 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ - 3\ 0\ 0)\ f1 = 0\ f2 = 0\ \ (- 3\ 0\ 0)$; rg $M_0 = 1$

– Si k = 3, $M_3 = (3\ 0\ 3\ 0\ 3\ 0\ 3\ 0\ 3)\ \ f3 = f1\ \ (3\ 0\ 3\ 0\ 3\ 0)$. Como el menor $|3\ 0\ 0\ 3| = 9 \neq 0$, rg M_3 = 2

b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$, y $B = (- 4\ 2\ 0\ 0\ 0\ 4)$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $XM_1 + XM_1^T = B$. (1,25 ptos)

Resolución

Sacando factor común X, por la izquierda, $X(M_1 + M_1^T) = B$.

$M_1 + M_1^T = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1) + (1\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1) = (2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2) = 2I$ y queda

$X2I = B \Rightarrow 2X = B \Rightarrow X = \frac{1}{2}B$

O sea, $X = \frac{1}{2}(-\ 4\ 2\ 0\ 0\ 0\ 4) \Rightarrow\ X = (-\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2)$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)
3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:
r_1: $\{x - 3y + 2z + 2 = 0\ 2x + y - 3z = 3$ $\qquad r_2: \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$
a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores. (1 pto)

Resolución

r_1: $\{x = 3y - 2z - 2\ 2x + y - 3z = 3$; sustituyendo,
$2(3y - 2z - 2) + y - 3z = 3\ ; 7y - 7z = 7\ ;\ y = 1 + z$

x = 3(1 + z) – 2z – 2 ; x = 1 + z.

Llamando z = k, r_1: $\{x = 1 + k\ y = 1 + k\ z = k$; A(1, 1, 0) $\in r_1$ y $\vec{d}_1 = (1,\ 1,\ 1)$ es vector director de r_1

$r_2: \frac{x-1}{-2} = y = \frac{z-1}{-2}$, entonces B(1, 0, 1) $\in r_2$ y $\vec{d}_2 = (-\ 2,\ 1,\ \ -\ 2)\ //\ (2, -\ 1,\ 2)$ es vector director de r_2

det $det\left(\vec{AB},\ \vec{d}_1,\ \vec{d}_2\right)$ = det $det\ (0\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 2\ ) = -\ 3 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores $\vec{AB},\ \vec{d}_1\ y\ \vec{d}_2$ son l.i. $\Rightarrow r_1$ y r_2 se cruzan.

b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0, \frac{1}{2},\ 0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1. (1,5 ptos)

Resolución

Como s $\perp r_1$ y r_2, un vector director de s es
$\vec{d}_s = \vec{d}_1\, x\, \vec{d}_2 = \left| \vec{i}\ \ \vec{j}\ \ \vec{k}\ \ 1\ 1\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 2 \right| = (3,\ 0,\ \ -\ 3)\ //\ (1,\ 0,\ \ -\ 1)$

$P\left(0, \frac{1}{2},\ 0\right) \in$ s , luego, s: $\{x = t\ y = \frac{1}{2}\ z = -\ t$. Para hallar el punto de corte de s con

r_1: $\{x = 1 + k\ y = 1 + k\ z = k$, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas:

$\{t = 1 + k\ \frac{1}{2} = 1 + k \rightarrow k = \frac{-1}{2}\ \ -\ t = k \Rightarrow \{t = 1 + \frac{-1}{2}\ \ -\ t = \frac{-1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Sustituyendo, por ejemplo, $t = \frac{1}{2}$ en s tenemos$\{x = \frac{1}{2}\ y = \frac{1}{2}\ z = -\ \frac{1}{2}$. El punto de corte de s con r_1 es $Q\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2}\right)$

3B. Responder a las siguientes cuestiones

a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $\left|\vec{u}\right| = 2$, $\left|\vec{v}\right| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. (0,75 ptos)

Resolución

Sea α el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ⇒

$8 = \vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \cos\cos\alpha = 2.3 \cos\cos\alpha \Rightarrow \cos\cos\alpha = \frac{8}{6} > 1$ (imposible)

Luego, no pueden existir dichos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:
$\pi: x + 3y + 2z + 3 = 0$, $r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$. Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como
el ángulo que forman. (1,75 ptos)

Resolución

$r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x = -3 - y - 2z \end{cases}$;

$2(-3 - y - 2z) - 3y - z = 4 \,; -5y - 5z = 10 \,;\; y + z = -2 \,; y = -2 - z$

$x = -3 - (-2 - z) - 2z = -1 - z$. Llamando z = k, $r: \begin{cases} x = -1 - k \\ y = -2 - k \\ z = k \end{cases}$.

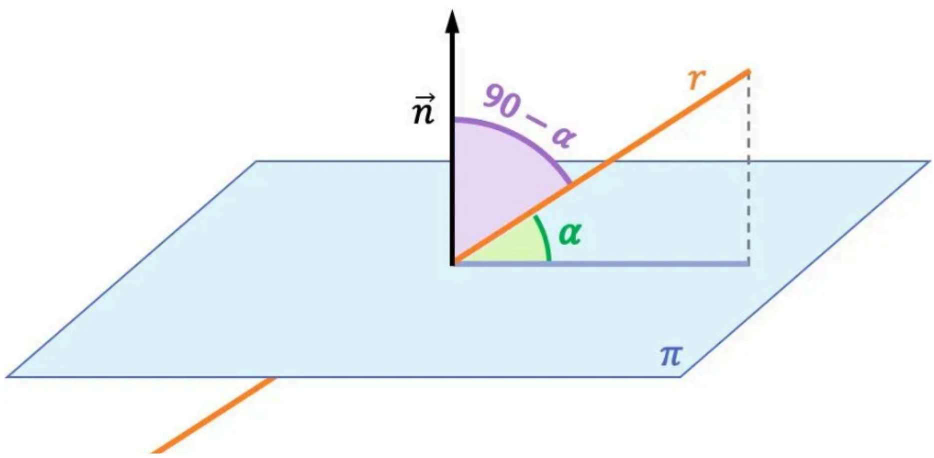
Sustituimos en la ecuación de π:

$-1 - k + 3(-2 - k) + 2k + 3 = 0 \;;\; -2k - 4 = 0 \;;\; k = -2\,;$

$\begin{cases} x = -1 + 2 \\ y = -2 + 2 \\ z = -2 \end{cases}$. El punto de corte es (1, 0, –2)

Un vector director de r es $\vec{d} = (-1, -1, 1) \,//\, (1, 1, -1)$ y un vector normal de π es $\vec{n} = (1, 3, 2)$.

Sea α el ángulo que se pide:



$sen\,\alpha = cos\left(90^o - \alpha\right) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{d}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} \Rightarrow$

$\alpha = arsen\left|\frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{d}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}\right| = arcsen\frac{2}{\sqrt{3}\,\sqrt{14}} = arcsen\frac{2}{\sqrt{42}} \cong 17^{\text{o}}\,59'$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen

tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es 1/3, que la produzca B es 2/3 y que la produzca C es 1/7.
a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocula el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad? (1,5 ptos)
b) Si se inocula un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C? (1 pto)

Resolución

A = elegir el tubo A B = elegir el tubo B C = elegir el tubo C D = el virus produce la enfermedad

Según el enunciado, $p(A) = \frac{3}{10}$ $p(B) = \frac{2}{10}$ $p(C) = \frac{5}{10}$ $p(D/A) = \frac{1}{3}$ $p(D/B) = \frac{2}{3}$ $p(D/C) = \frac{1}{7}$

a) Se pide p(D), que según el teorema de probabilidad total es
$$p(D) = p(A)\,p(D/A) + p(B)\,p(D/B) + p(C)\,p(D/C) = \frac{3}{10}\,\frac{1}{3} + \frac{2}{10}\,\frac{2}{3} + \frac{5}{10}\,\frac{1}{7} = \frac{32}{105} \cong 30,48\%$$

b) Se pide $p\left(C/D^c\right) = \frac{p\left(C \cap D^c\right)}{p\left(D^c\right)} = \frac{p(C)\,p(D^c/C)}{p(D^c)} = \frac{p(C)[1-p(D/C)]}{1-p(D)} = \frac{\frac{5}{10}\left(1-\frac{1}{7}\right)}{1-\frac{32}{105}} = \frac{45}{73} \cong 0,6164 = 61,64\%$

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.
a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento. (1,25 ptos)
b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta.
(0,75 ptos)
c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada. (0,5 ptos)

Resolución

X = número de goles marcados en n = 70 lanzamientos. p = p(meter gol) $= \frac{3}{5} = 0,6$; $X \to B(70\,;0,6)$.

Se puede hacer aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates: "Si una v.a. X sigue una binomial B(n , p) que cumple: $n \geq 30$, $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$, entonces, la v.a. X se puede sustituir por otra v.a. $X' \to N(\mu, \sigma)$, siendo μ la media de X, μ = np y σ la desviación típica, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Es decir, $X' \to N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ "

Aquí, $n = 70 \geq 30$, $p = 0,6$; $np = 42 \geq 5$ y $n(1-p) = 70.0,4 = 28 \geq 5$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{16,8} \cong 4,1$; $X' \to N(42\,; 4,1)$. Tipificando, $Z = \frac{X'-42}{4,1} \to N(0,\ 1)$.

a) Piden $p(40 \leq X \leq 45)$. Como los valores de X comprendidos entre 40 y 45 son 40, 41, 42, 43, 44 y 45 tomamos un intervalo de la recta que contenga exactamente esos números. Por ejemplo, (39,5 ; 45,5).
Entonces, $p(40 \leq X \leq 45) = p(39,5 \leq X' \leq 45,5) = p\left(\frac{39,5-42}{4,1} \leq \frac{X'-42}{4,1} \leq \frac{45,5-42}{4,1}\right) \cong$

$\cong p(-0,61 \leq Z \leq 0,85) = p(Z \leq 0,85) - [1 - p(Z < 0,61)] = 0,8023 - 1 + 0,7291 = 0,5314 = 53,14\%$

b) Piden la probabilidad de que marque más de la mitad (35) de los penaltis, $p(X > 35)$.

Como los valores de X mayores que 35 son 36, 37, … tomamos un intervalo de la recta que contenga exactamente esos números. Por ejemplo, (35,5 ; +∞).

Entonces, $p(X > 35) = p(X' \geq 35,5) = p\left(\frac{X' - 42}{4,1} \geq \frac{35,5 - 42}{4,1}\right) \cong p(Z \geq -1,59) = p(Z \leq 1,59) = 94,41\%$

c) Ahora X = número de goles marcados en n = 450 lanzamientos. $p = \frac{3}{5} = 0,6$; $X \to B(450\ ;\ 0,6)$.

Nos piden los goles que se espera marcar, que es la media de X, $\mu = np = 450 \cdot 0,6 = 270$

Es decir, se espera que haya marcado 270 goles