

Сложение целых неотрицательных чисел связано с объединением конечных непересекающихся множеств. Например, если множество A содержит 5 элементов, а множество B - 4 элемента и пересечение множеств A и B пусто, то число элементов в их объединении равно сумме $5+4$.

Теорема. Пусть A и B — конечные множества, не имеющие общих элементов. Тогда их объединение тоже конечно, причем $n(A \dot{\cup} B) = n(A) + n(B)$.

Доказательство. Докажем сначала, что если a и b - натуральные числа, то существует взаимно однозначное отображение отрезка натурального ряда N_b на множество X таких чисел, что $a + 1 \leq x \leq a + b$. Действительно, если поставить в соответствие числу $c \in N_b$ число $c + a$, то в силу монотонности сложения этим будет задано взаимно однозначное отображение отрезка N_b на множество X .

Например, если $a = 3$, $b = 5$, то соответствие между множествами N_5 и $X = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ может быть установлено так: числу $c \in N_5$ сопоставим число $x = 3 + c$: числу 1 - число $3 + 1 = 4$, числу 2 - число $3 + 2 = 5$ и т.д., числу 5 - число $3 + 5 = 8$.

Пусть $n(A) = a$, $n(B) = b$. Тогда существуют взаимно однозначные отображения A на N_a и B на N_b . Но, согласно доказанному выше, отрезок N_b можно взаимно однозначно отобразить на множество X таких чисел, что $a + 1 \leq x \leq a + b$. Тем самым множество B взаимно однозначно отображается на X . Отображая взаимно однозначно множество A на N_a , множество B - на X , получаем взаимно однозначное отображение множества $A \dot{\cup} B$ на отрезок N_{a+b} . Поскольку нет элементов, одновременно принадлежащих A и B , то это отображение определено на всем множестве $A \dot{\cup} B$. Значит, в множестве $A \dot{\cup} B$ имеется $a + b$ элементов, что и требовалось доказать.

Из рассмотренной теоремы следует, что с **теоретико-множественных позиций сумма натуральных чисел a и b представляет собой число элементов в объединении конечных непересекающихся множеств A и B таких, что $a = n(A)$, $b = n(B)$: $a + b = n(A) + n(B) = n(A \dot{\cup} B)$, если $A \cap B = \emptyset$.**

Выясним теперь, каков теоретико-множественный смысл равенства $a+0=a$. Если $a = n(A)$, $0 = n(\emptyset)$, то, согласно теореме, $a + 0 = n(A) + n(\emptyset) = n(A \dot{\cup} \emptyset)$. Но, как известно, $A \dot{\cup} \emptyset = A$, следовательно, $n(A \dot{\cup} \emptyset) = n(A)$, откуда $a + 0 = a$.

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет истолковать с теоретико-множественных позиций известные свойства сложения. Так, коммутативность сложения связана с тем, что для любых множеств A и B выполняется равенство $A \dot{\cup} B = B \dot{\cup} A$. Действительно, если $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \cap B = \emptyset$, то $a + b = n(A \dot{\cup} B) = n(B \dot{\cup} A) = b + a$.

Аналогично можно показать, что ассоциативность сложения вытекает из равенства: $(A \dot{\cup} B) \dot{\cup} C = A \dot{\cup} (B \dot{\cup} C)$. Действительно, если $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ и $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, то $(a+b)+c = n((A \dot{\cup} B) \dot{\cup} C) = n(A \dot{\cup} (B \dot{\cup} C)) = n(A) + n(B \dot{\cup} C) = a + (b + c)$.

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет обосновывать выбор действий при решении текстовых задач определенного вида. Выясним, например, почему следующая задача решается при помощи сложения: «Катя нашла 3 гриба, а Маша - 4. Сколько всего грибов нашли девочки?»

В задаче рассматриваются три множества: множество A грибов Кати, множество B грибов Маши и их объединение. Требуется узнать число элементов в этом объединении, а оно находится сложением. Так как $n(A) = 3$, $n(B) = 4$ и $A \cap B = \emptyset$, то $n(A \dot{\cup} B) = 3 + 4$. Сумма $3 + 4$ - это математическая модель данной задачи. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи: $3+4=7$. Следовательно, девочки нашли 7 грибов.