

Plan de travail

A Chap : 1 introduction générale

A.I 1 : historique de la mécanique classique

A.II 2 : la définition de centre de masse et de matrice d'inertie d'un solide rigide

B Chap : 2 détermination de centre et la matrice d'inertie d'un solide

B.I 1 : les solides de forme symétrique (théoriquement)

B.II 2 : les solides des formes complexes

B.II.1 : Protocole expérimentale (quelque méthodes)

B.II.2 : Les programme qui détermine facilement ces grandeur physique

C Chap:3 l'application dans la vie quotidienne

C.I 1 : utilisation

Conclusion générale

Le moment d'inertie (protocole expérimental)

Pour déterminer le moment d'inertie I d'un corps par rapport à axe Δ passant par le centre de gravité G de ce corps, on le suspend en accrochant deux fils identiques de masses négligeables et de longueurs l aux extrémités de l'axe Δ , maintenant ainsi l'axe Δ horizontal. Puis on mesure la durée d'une demi-oscillation dans la direction transverse à l'axe Δ . En déduire le moment d'inertie I_{Δ} .

Utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour obtenir une équation différentielle du premier ordre portant sur l'angle déviation du pendule.

Le pendule oscille dans le plan transverse à l'axe Δ , les deux fils formant un angle identique θ avec la verticale.

Appelons Δ' l'axe parallèle à Δ passant par les points d'attache des fils au plafond.

L'énergie cinétique du solide se compose de l'énergie cinétique de translation du centre de gravité et de l'énergie cinétique de rotation autour de l'axe passant par le centre de gravité :

$$\mathcal{E}_K = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2}_{\text{rotation}}$$

où v est la vitesse de translation du centre de gravité ici $v = l\dot{\theta}$ et ω la vitesse de rotation autour de l'axe Δ' .

On détermine facilement les relations entre v , ω et l'angle θ paramétrant la position du solide : $\omega = \dot{\theta}$ et $v = l\omega = l\dot{\theta}$.

En regroupant ces résultats, on trouve :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{\Delta}\dot{\theta}^2$$

Remarquons que l'on aurait pu aussi décrire le mouvement comme une rotation autour de l'axe Δ' dans ce cas l'énergie cinétique aurait pris la forme

$$\mathcal{E}_K = \underbrace{\frac{1}{2}I_{\Delta'}\omega^2}_{\text{rotation}}$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ' se déterminant en utilisant le théorème de Huygens :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + md_{\Delta,\Delta'}^2 = I_{\Delta} + ml^2$$

ce qui donne bien évidemment le même résultat.

L'énergie potentiel est composée uniquement d'énergie potentiel de pesanteur :

$$\mathcal{E}_P = -mgl \cos \theta + \mathcal{E}_0$$

Soit pour l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{\Delta}\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta + \mathcal{E}_0$$

L'énergie mécanique est une constante du mouvement. Il est commode de l'évaluer au point de rebroussement du pendule c'est-à-dire à l'angle de déviation maximal θ_m où la vitesse s'annule et où toute l'énergie mécanique est sous forme d'énergie potentiel.

$$\mathcal{E}_M = -mgl \cos \theta_m + \mathcal{E}_0$$

On en déduit l'équation différentielle portant sur l'angle θ :

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2mgl}{I_{\Delta} + ml^2} (\cos \theta - \cos \theta_m)}$$

On obtient en fait deux équations différentielles, une pour les valeurs croissantes de θ et l'autre pour les valeurs décroissantes. En appelant θ_m l'angle de déviation maximal du pendule, l'équation différentielle avec la racine positive décrit l'oscillation de $-\theta_m$ à θ_m . Le temps T d'une demi-oscillation correspond à l'intégrale

$$T = \int_t^{t+T} dt = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \sqrt{\frac{I_{\Delta} + 2ml^2}{2mgl (\cos \theta - \cos \theta_m)}} d\theta$$

Cette intégrale se détermine simplement dans l'approximation des petits angles ($\cos \theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$)

$$T = \sqrt{\frac{I_{\Delta} + ml^2}{mgl}} \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{1}{\sqrt{(\theta_m^2 - \theta^2)}} d\theta$$

soit en posant $u = \theta/\theta_m$:

$$T = \sqrt{\frac{I_{\Delta} + ml^2}{mgl}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)}} du$$

Or la primitive de la fonction $(1 - u^2)^{-1/2}$ est la fonction $\text{Arcsin}(u)$ soit :

$$T = \sqrt{\frac{I_{\Delta} + ml^2}{mgh}} \pi$$

On en déduit la relation

$$I_{\Delta} = mgl \left[\left(\frac{T}{\pi} \right)^2 - \frac{l}{g} \right]$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Lorsque le moment d'inertie est nul (cas d'un point matériel) on retrouve la relation bien à la demi période d'un pendule simple.

On obtient ainsi une mesure simple du moment d'inertie. Pour que la mesure soit plus sensible, il est nécessaire de prendre une longueur de fil l la plus courte possible. En effet si l'on appelle $\bar{r}$ le rayon moyen de l'objet autour de l'axe Δ , alors I_{Δ} est de l'ordre de $m\bar{r}^2$. Pour que l'influence du moment d'inertie soit significative il faut que $\bar{r}$ ne soit pas négligeable devant l .