

CHUYÊN ĐỀ CHỨNG MINH CHIA HẾT

DẠNG 1: CHỨNG MINH CHIA HẾT

Bài 8: Tìm n là số tự nhiên để: $A = (n+5)(n+6) \vdots n$

HD:

Ta có: $A = 12n + n(n-1) + 30$, Để $A \vdots n \Rightarrow n(n-1) + 30 \vdots n$

Ta có: $n(n-1) \vdots n \Rightarrow 30 \vdots n \Rightarrow n \in U(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$

Và $n(n-1) \vdots 3 \Rightarrow n(n-1) \vdots 3 \Rightarrow n \in \{1; 3; 6; 10; 15; 30\}$

Thử vào ta thấy $n \in \{1; 3; 10; 30\}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài

Bài 14: Chứng minh rằng: m, Nếu $\overline{abcd} \vdots 101$ thì $\overline{ab} - \overline{cd} \vdots 101$

Bài 16: Chứng minh rằng:

a, $\overline{abcd} \vdots 29 \Leftrightarrow a + 3b + 9c + 27d \vdots 29$

b, $\overline{abc} \vdots 21 \Leftrightarrow a - 2b + 4c \vdots 21$

HD:

a, Ta có: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d \vdots 29 \Rightarrow 2000a + 200b + 20c + 2d \vdots 29$

$\Rightarrow 2001a - a + 203b - 3b + 29c - 9c + 29d - 27d \vdots 29$

$\Rightarrow (2001a + 203b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d) \vdots 29 \Rightarrow (a + 3b + 9c + 27d) \vdots 29$

b, Ta có: $\overline{abc} = 100a + 10b + c \vdots 21 \Rightarrow 100a - 84a + 10b - 42b + c + 63c \vdots 21$

$\Rightarrow 16a - 32b + 64c \vdots 21 \Rightarrow 16(a - 2b + 4c) \vdots 21$

DẠNG 2 : CHỮ SỐ TẬN CÙNG VÀ ĐỒNG DƯ THỨC

A. Lý thuyết:

+ Một số có chữ số tận cùng là : 0; 1; 5; 6 khi nâng lên lũy thừa $n \neq 0$ thì được số có chữ số tận cùng là chính nó (0; 1; 5; 6)

+ Số có chữ số tận cùng là 2; 4; 6 khi nâng lên lũy thừa 4 được số có chữ số tận cùng là 6

+ Số có chữ số tận cùng là 3; 7; 9 khi nâng lên lũy thừa 4 được số có chữ số tận cùng là 1

Chú ý 1:

+ 1 số tự nhiên bất kỳ nâng lên lũy thừa $4k+1$ thì chữ số tận cùng không thay đổi

+ Số có tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 7

+ Số có tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 3

+ Số có tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 8

+ Số có tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 2

+ Còn lại chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được tận cùng là chính nó

+ 4. Nếu a và b có cùng số dư khi chia cho m thì a được gọi là đồng dư với b theo modum m

KH: $a \equiv b \pmod{m}$

Ví dụ: $3 \equiv -1 \pmod{4}$

$5 \equiv 11 \pmod{6}$

$18 \equiv 0 \pmod{6}$

+ 5. Một số tính chất về đồng dư:

+ Nếu:
$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ b \equiv c \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$$

$$+ \text{ Nếu: } \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

$$+ \text{ Nếu: } \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a.c \equiv b.d \pmod{m}$$

$$+ \text{ Nếu: } a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

$$+ \text{ Nếu } a \equiv b \pmod{m} \text{ và } d \text{ là UC}(a; b) \text{ thỏa mãn: } (d; m) = 1 \text{ thì } a : d \equiv b : d \pmod{m}$$

$$+ \text{ Nếu } a \equiv b \pmod{m}, d \in \mathbb{Z}, \text{ thỏa mãn: } d \in \text{UC}(a; b; d) \Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

Chú ý : Không được chia 2 vế của đồng dư thức :

Ví dụ : $2 \equiv 12 \pmod{10} \Rightarrow 1 \equiv 6 \pmod{10}$, điều này là sai.

B. Bài tập áp dụng :

Bài 1: Tìm số dư trong phép chia 2004^{2004} khi chia cho 11

HD:

Dấu hiệu chia hết cho 11 là hiệu chữ số hàng lẻ với chữ số hàng chẵn tính từ bên trái chia hết cho 11

Ta có: $2002 \vdots 11 \Rightarrow 2004 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow 2004^{2004} \equiv 2^{2004} \pmod{11}$

Mà $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2004^{2004} = 2^4 \cdot 2^{2000} \equiv 2^4 \cdot (2^{10})^{200} \pmod{11} \equiv 2^4 \pmod{11} \equiv 5 \pmod{11}$

Vậy 2004^{2004} chia cho 11 dư 5

Bài 2: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7

HD:

Ta có: $1944 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 1944^{2005} \equiv (-2)^{2005} \pmod{7}$

Mà $(-2)^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 1944^{2004} \equiv (-2^3)^{668} \pmod{7} \equiv (-1)^{668} \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$

Vậy $1944^{2005} \equiv 1 \cdot (-2) \pmod{7}$ hay A chia cho 7 dư 5

Bài 3: Chứng minh rằng: $A = 6^{1000} - 1, B = 6^{1001} + 1$ đều là bội số của 7

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n \vdots 19$

Bài 6: Tìm dư trong phép chia: 3^{2003} chia cho 13

Bài 7: Chứng minh rằng : $2^{2002} - 4 \vdots 1$

Bài 8: Chứng minh rằng : $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$

Bài 9: Tìm dư trong phép chia : $5^{70} + 7^{50}$ khi chia cho 12

Chú ý:

Đối với tìm 2 chữ số tận cùng:

+ Với các chữ số có tận cùng là 01, 25, 76 thì nâng lên lũy thừa bao nhiêu (Khác 0) đều có 2 chữ số tận cùng là chính nó

+ Các số 26^n luôn có tận cùng là 76 ($n > 1$)

- + Các số: $2^{10}, 3^{20}$ có tận cùng là 76 và 01
 + Còn lại đưa lên lũy thừa 2,4,5 thì sẽ trở về 76 hoặc 01

Bài 1: Tìm 2 chữ số tận cùng của: $2^{100}, 3^{100}$

Bài 2: Tìm 2 chữ số tận cùng của : $51^{51}, 99^{99}, 6^{666}; 14^{101}.16^{101}$

HD:

Ta có: $51^{51} = (51^2)^{25} \cdot 51 = (\overline{01})^{25} \cdot 51 = \overline{51}$

$99^{99} = (99^2)^{49} \cdot 99 = (\overline{01})^{49} \cdot 99 = \overline{99}$

$6^{666} = (6^{5133}) = \overline{76.6} = \overline{56}$

$14^{101}.16^{101} = 224^{101} = (224^2)^{50} \cdot 224 = \overline{76.224} = \overline{24}$

Bài 3: Tìm 2 chữ số tận cùng của: $51^{2k}, 51^{2k+1}, 99^{2n}, 99^{2n+1}, 99^{99^{99}}, 6^{5n}, 6^{5n+1}, 6^{66}$

HD:

Ta thấy: $99^{99^{99}}$; thấy 99^{99} là 1 số lẻ nên $99^{99} = 2n+1 \Rightarrow 99^{99^{99}} = 99^{2n+1} (n \in \mathbb{N}, n > 1)$

$\Rightarrow 99^{2n+1} = 99 \cdot (99^2)^n = 99 \cdot \overline{01} = \overline{99}$

Bài 4 :Tìm 2 chữ số tận cùng của : $7^{2003}, 9^{9^9}, 74^{2003}, 18^{2004}.68^{2005}, 74^{2004}$

Chú ý:

Để đơn giản tìm 2 chữ số tận cùng của 1 số a, ta có 2 TH :

+ a chẵn $\Rightarrow$ Tìm n nhỏ nhất sao cho $a^n - 1 \vdots 25$

+ a lẻ $\Rightarrow$ Tìm n nhỏ nhất sao cho $a^n - 1 \vdots 100$

Bài 8: Tìm dư của 2^{2003} khi chia cho 100

Bài 9 : Tìm số dư của 7^{99} khi chia cho 100

Bài 10 : Tìm số dư của : 3^{517} khi chia cho 25

DẠNG 3 : NHÓM HỢP LÝ

Bài 1: Chứng minh rằng:

a, $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \vdots 10$

b, $3^{n+2} - 2^{n+4} + 3^n + 2^n \not\vdots 30$

Bài 2: Chứng minh rằng:

a, $8.2^n + 2^{n+1} \vdots 10$

b, $3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} \not\vdots 6$

Bài 5: CMR : $3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$ chia hết cho 13 với mọi n

b, Chứng minh rằng : $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120

Bài 7 : Chứng minh rằng : $81^7 - 27^9 - 9^{13} \not\vdots 45$

HD :

Ta có : $= (3^4)^7 - (3^3)^9 - (3^2)^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26} (3^2 - 3 - 1) = 3^{26} \cdot 5 \cdot 9 \cdot 5 = 45$