CHUYÊN ĐỀ CHỨNG MINH CHIA HẾT

DẠNG 1: CHỨNG MINH CHIA HẾT

Bài 8: Tìm n là số tự nhiên để: $A=(n+5)(n+6)\ \vdots\ n$

HD:

Ta có: $A=12n+n(n-1)+30$, Để $A\ \vdots\ n \Rightarrow n(n-1)+30\ \vdots\ n$

Ta có: $n(n-1)\ \vdots\ n \Rightarrow 30\ \vdots\ n \Rightarrow n\in U(30)=\{1;2;3;5;6;10;15;30\}$

Và $n(n-1)\ \vdots\ 6 \Rightarrow n(n-1)\ \vdots\ 3 \Rightarrow n\in\{1;3;6;10;15;30\}$

Thử vào ta thấy $n\in\{1;3;10;30\}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài

Bài 14: Chứng minh rằng:m, Nếu $\overline{abcd}\ \vdots\ 101$ thì $\overline{ab}-\overline{cd}\ \vdots\ 101$

Bài 16: Chứng minh rằng:

a, $\overline{abcd}\ \vdots\ 29 \leftrightarrow a+3b+9c+27d\ \vdots\ 29$ b, $\overline{abc}\ \vdots\ 21 \leftrightarrow a-2b+4c\ \vdots\ 21$

HD:

a, Ta có : $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d\ \vdots\ 29$ => 2000a+200b+20c+2d $\vdots$ 29

=> 2001a – a +203b - 3b +29c - 9c +29d - 27d $\vdots$ 29

=> (2001a+203b+29c+29d)- (a+3b+9c+27d) $\vdots$ 29 => (a+3b+9c+27d) $\vdots$ 29

b, Ta có: $\overline{abc}=100a+10b+c$ $\vdots$ 21 =>100a - 84a +10b – 42b + c +63c $\vdots$ 21

=> 16a - 32b +64c $\vdots$ 21 => 16(a- 2b +4c) $\vdots$ 21

DẠNG 2 : CHỮ SỐ TẬN CÙNG VÀ ĐỒNG DƯ THỨC

A. Lý thuyết:

+ Một số có chữ số tận cùng là : 0; 1; 5; 6 khi nâng lên lũy thừa $n\neq 0$ thì được số có chữ số tận cùng là chính nó (0; 1; 5; 6)

+ Số có chữ số tận cùng là 2; 4; 6 khi nâng lên lũy thừa 4 được số có chữ số tận cùng là 6

+ Số có chữ số tận cùng là 3; 7; 9 khi nâng lên lũy thừa 4 được số có chữ số tận cùng là 1

Chú ý 1:

+ 1 số tự nhiên bất kỳ nâng lên lũy thừa 4k+1 thì chữ số tận cùng không thay đổi

+ Số có tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 7

+ Số có tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 3

+ Số có tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 8

+ Số có tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 2

+ Còn lại chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được tận cùng là chính nó

+ 4. Nếu a và b có cùng số dư khi chia cho m thì a được gọi là đồng dư với b theo modum m

KH: $a\equiv b\pmod m$

Ví dụ: $3\equiv -1\pmod 4$ $5\equiv 11\pmod 6$ $18\equiv 0\pmod 6$

+ 5. Một số tính chất về đồng dư:

+ Nếu: $\begin{cases} a\equiv b\pmod m \\ b\equiv c\pmod m \end{cases} \Rightarrow a\equiv c\pmod m$

+ Nếu: $\begin{cases} a \equiv b \pmod m \\ c \equiv d \pmod m \end{cases} => a + c \equiv b + d \pmod m$

+ Nếu: $\begin{cases} a \equiv b \pmod m \\ c \equiv d \pmod m \end{cases} => a.c \equiv b.d \pmod m$

+ Nếu: $a \equiv b \pmod m => a^n \equiv b^n \pmod m$

+ Nếu $a \equiv b \pmod m$ và d là UC(a; b) thỏa mãn: (d; m) = 1 thì $a : d \equiv b : d \pmod m$

+ Nếu $a \equiv b \pmod m, d \in Z,$ thỏa mãn : $d \in UC(a;b;d) => \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(\bmod \frac{m}{d} \right)$

Chú ý : Không được chia 2 vế của dồng dư thức :

Ví dụ : $2 \equiv 12 \pmod{10} => 1 \equiv 6 \pmod{10}$, điều này là sai.

B. Bài tập áp dụng :

Bài 1: Tìm số dư trong phép chia 2004^{2004} khi chia cho 11

HD:

Dấu hiệu chia hết cho 11 là hiệu chữ số hàng lẻ với chữ số hàng chẵn tính từ bên trái chia hết cho 11

Ta có: $2002 \not\vdots 11 => 2004 \equiv 2 \pmod{11} => 2004^{2004} \equiv 2^{2004} \pmod{11}$

Mà $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} => 2004^{2004} = 2^4.2^{2000} \equiv 2^4.\left(2^{10}\right)^{200} \pmod{11} \equiv 2^4 \left(\bmod 11 \equiv 5 \pmod{11}\right)$

Vậy 2004^{2004} chi cho 11 dư 5

Bài 2: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7

HD:

Ta có: $1944 \equiv -2 \pmod 7 => 1944^{2005} \equiv (-2)^{2005} \pmod 7$

Mà $(-2)^3 \equiv -1 (\bmod) 7 => 1944^{2004} \equiv \left(-2^3\right)^{668} \pmod 7 \equiv (-1)^{668} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$

Vậy $1944^{2005} \equiv 1.(-2) \pmod 7$ hay A chia cho 7 dư 5

Bài 3: Chứng minh rằng: $A = 6^{1000} - 1, B = 6^{1001} + 1$ đều là bội số của 7

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n \not\vdots 19$

Bài 6: Tìm dư trong phép chia: 3^{2003} chia cho 13

Bài 7: Chứng minh rằng : $2^{2002} - 4 \not\vdots 31$

Bài 8: Chứng minh rằng : $2222^{5555} + 5555^{2222} \not\vdots 7$

Bài 9: Tìm dư trong phép chia : $5^{70} + 7^{50}$ khichia cho 12

Chú ý:

Đối với tìm 2 chữ số tận cùng:

+ Với các chữ số có tận cùng là 01, 25, 76 thì nâng lên lũy thừa bao nhiên (Khác 0) đều có 2 chữ số tận cùng là chính nó

+ Các số 26^n luôn có tận cùng là 76 (n>1)

+ Các số: $2^{10}, 3^{20}$ có tận cùng là 76 và 01
+ Còn lại đưa lên lũy thừa 2,4,5 thì sẽ trở về 76 hoặc 01

Bài 1: Tìm 2 chữ số tận cùng của: $2^{100}, 3^{100}$

Bài 2: Tìm 2 chữ số tận cùng của : $51^{51}, 99^{99}, 6^{666}; 14^{101}.16^{101}$

HD:

Ta có: $51^{51} = \left(51^2\right)^{25}.51 = \left(\overline{...01}\right)^{25}.51 = \overline{...51}$

$99^{99} = \left(99^2\right)^{49}.99 = \left(\overline{...01}\right)^{49}.99 = \overline{...99}$

$6^{666} = \left(6^{5133}.6\right) = \overline{...76}.6 = \overline{....56}$

$14^{101}.16^{101} = 224^{101} = \left(224^2\right)^{50}.224 = \overline{...76}.224 = \overline{...24}$

Bài 3: Tìm 2 chữ số tận cùng của: $51^{2k}, 51^{2k+1}, 99^{2n}, 99^{2n+1}, 99^{99^{99}}, 6^{5n}, 6^{5n+1}, 6^{66}$

HD:

Ta thấy: $99^{99^{99}}$; thấy 99^{99} là 1 số lẻ nên $99^{99} = 2n+1 => 99^{99^{99}} = 99^{2n+1}\left(n \in N, n > 1\right)$

$=> 99^{2n+1} = 99.\left(99^2\right)^n = 99\overline{....01} = \overline{...99}$

Bài 4 :Tìm 2 chứ số tận cùng của : $7^{2003}, 9^{9^9}, 74^{2003}, 18^{2004}.68^{2005}, 74^{2004}$

<u>Chú ý :</u>

Để đơn giản tìm 2 chữ số tận cùng của 1 số a, ta có 2 TH :

+ a chẵn => Tìm n nhỏ nhất sao cho $a^n - 1 \vdots 25$

+ a lẻ => Tìm n nhỏ nhất sao cho $a^n - 1 \vdots 100$

Bài 8: Tìm dư của 2^{2003} khi chia cho 100

Bài 9 : Tìm số dư của 7^{99} khi chia cho 100

Bài 10 : Tìm số dư của : 3^{517} khi chia cho 25

DẠNG 3 : NHÓM HỢP LÝ

Bài 1: Chứng minh rằng:

a, $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \vdots 10$

b, $3^{n+2} - 2^{n+4} + 3^n + 2^n \vdots 30$

Bài 2: Chứng minh rằng:

a, $8.2^n + 2^{n+1} \vdots 10$

b, $3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} \vdots 6$

Bài 5: CMR : $3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$ chia hết cho 13 với mọi n

b, Chứng minh rằng : $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + ... + 3^{x+100}$ chia hết cho 120

Bài 7 : Chứng minh rằng : $81^7 - 27^9 - 9^{13} \vdots 45$

HD :

Ta có : $= \left(3^4\right)^7 - \left(3^3\right)^9 - \left(3^2\right)^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26}\left(3^2 - 3 - 1\right) = 3^{26}.5 \vdots 9.5 = 45$