

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 1/54
Introduction		



I- Généralités	3
A - Introduction	3
1) Qu'est ce qu'un plan d'expérience ?	3
2) A quoi sert un plan d'expériences ?	3
3) Intérêt de la méthode des plans d'expérience	4
a) Cas de l'expérimentation empirique	4
b) Cas de l'expérimentation planifiée basique	4
c) Cas d'un plan d'expérience	4
B - Vocabulaire	5
1) Définitions	5
2) Exemples	5
C - Contexte de mise en place	6
1) Dans la phase de conception :	6
2) Dans la phase de production :	6
D - Démarche de mise en place d'un plan d'expérience	7
1) Définir l'objectif et sa mesure	7
2) Sélectionner les facteurs – Choisir les niveaux	7
3) Construire la table orthogonale	7
4) Réaliser les essais	8
5) Analyser les résultats	8
6) Vérifier les résultats	8
II- Introduction :	9
III- Construire la table orthogonale :	10
E - Détermination du nombre d'essais	10
7) Exemple :	10

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 2/54

F - Construction de la table	11
G - Exemple :	12
IV- Analyse des résultats	12
A - Calcul de la moyenne générale des réponses :	13
1) Exemple :	13
B - Calcul des effets par rapport à la moyenne des facteurs	13
1) Calcul des effets totaux	13
2) Calcul des effets par rapport à la moyenne	14
d) Déduction du nombre de degrés de libertés ddl	14
e) Effet par rapport à la moyenne	14
f) Notion de symétrie des effets par rapport à la moyenne	15
3) Rédaction de l'équation du modèle non validé sans les interactions	15
4) Exemple :	16
C - Calcul de l'effet par rapport à la moyenne des interactions	17
1) Notion d'interaction	17
2) Détermination des couples d'interaction	17
3) Calcul des effets totaux	18
4) Calcul des effets par rapport à la moyenne	18
a) Déduction du nombre de degrés de libertés ddl	18
b) Effet par rapport à la moyenne	19
c) Notion de symétrie des effets par rapport à la moyenne	19
5) Rédaction de l'équation du modèle non validé avec les interactions	20
6) Exemple :	21
D - Mise en évidence des facteurs les plus influents par l'analyse de la variance :	22
1) Calcul des résidus	22
2) Calcul de la valeur de F (valeur Fisher calculée)	22
3) Détermination de la valeur de F_{table} (valeur Fisher théorique)	24
4) Interprétation et conclusion	24
5) Exemple	25
E - Tracé du graphe du plan	25
1) Graphe des facteurs	26
a) Méthode de tracé	26
2) Tracé du graphe des effets totaux des interactions :	26
a) Méthode de tracé	27
3) Exemple	27
F - Conclusion	29
1) Quels sont les facteurs à prendre en compte ?	29
a) Exemple	29
2) Quels sont les facteurs les plus influents ?	30
a) Exemple :	30
3) Quelle est alors la combinaison optimale ?	31
a) Exemple :	31
V- Table de SNEDECOR	33
VI- Pour aller plus loin...	34

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 3/54

VII- Exercices :	35
A - Exercice 1 : finition	35
B - Exercice 2 : séchage	41

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 4/54

I- Généralités

A - Introduction

1) *Qu'est-ce qu'un plan d'expérience ?*

Un plan d'expériences est une suite d'essais, organisée à l'avance de manière à déterminer avec un minimum d'essais et avec un maximum de précisions, l'influence de plusieurs paramètres sur une ou plusieurs réponses. Il permet de :

- ✓ Quantifier l'impact d'un paramètre dans le résultat d'une problématique donnée
- ✓ Trouver le meilleur réglage pour ce paramètre pour garantir le meilleur résultat d'une problématique donnée

2) *A quoi sert un plan d'expériences ?*

Imaginez que vous êtes confrontés à un problème technique, complexe : de multiples paramètres sont susceptibles d'influer sur le résultat d'une problématique donnée. La question auquel pourra répondre un plan d'expérience est :

***Quelle est l'influence de ces réglages sur le résultat?
Quels sont les réglages pour lesquels le résultat est le plus garanti ?***

Ce type d'étude peut être schématisé dans une boîte noire



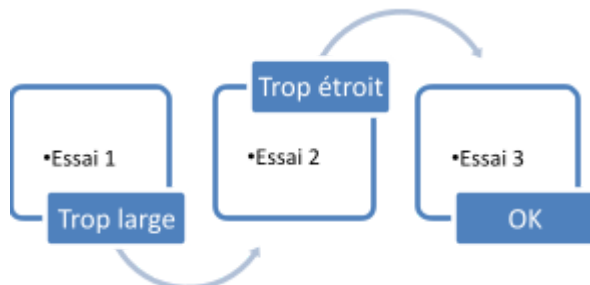
Le plan d'expérience **ne permet pas de comprendre comment fonctionne la boîte noire**. Il permet simplement de déterminer :

- ✓ **L'importance d'un paramètre dans la génération du résultat**
- ✓ **Déterminer le réglage optimum de manière relativement fiable.**

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 5/54

3) *Intérêt de la méthode des plans d'expérience*

a) *Cas de l'expérimentation empirique*

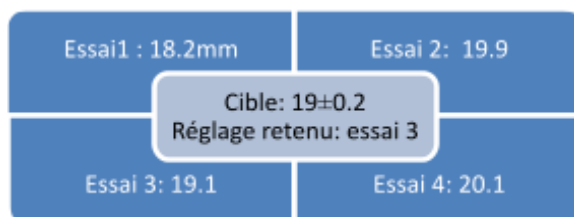


Supposez que vous montez une méthode expérimentale basique. Guidé par l'intuition, vous déduisez chaque essai des précédents pour trouver la première solution acceptable. Cette démarche, simple au demeurant, comporte un inconvénient majeur :

✓ La solution que vous trouvez est acceptable ponctuellement, mais elle n'est pas forcément la solution optimale. Vous vous exposez donc à une variation des résultats à venir générant des échecs.

o Exemple lors d'un rainurage : Usinage à 18,2mm, alors que la cote tolérancée est de $19 \pm 0,2$.

b) *Cas de l'expérimentation planifiée basique*

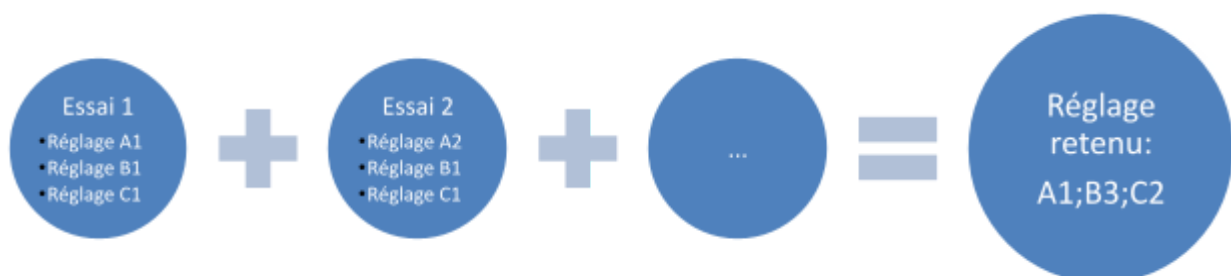


Supposez que vous mettez une campagne d'expérimentation un peu plus élaborée. Vous effectuez les tests en fonction de différents réglages que vous aurez prédéfinis à l'avance. En fonction des résultats obtenus, vous sélectionnerez la combinaison de réglage ayant donné le résultat le plus probant. C'est ce réglage que vous mettrez

en place. Cette démarche comporte elle aussi deux inconvénients majeurs :

- ✓ Rien ne vous garanti que ce résultat probant est la résultante d'une combinaison de facteurs chanceux.
 - o Exemple lors d'un rainurage : copeau de bois compensant le défaut de réglage de profondeur.
- ✓ Vous n'avez pas connaissance de l'importance de tel ou tel réglage dans l'obtention du résultat. Vous ne pouvez donc savoir sur quel réglage apporter une attention toute particulière.
 - o Exemple lors d'un rainurage : le réglage de profondeur est plus important que la vitesse d'avance.

c) *Cas d'un plan d'expérience*



BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 6/54

Le plan d'expérience compense ces défauts. L'efficacité d'un plan d'expériences est supérieure à celle de toute autre suite d'essais de même taille. En effet :

- ✓ le plan d'expériences permet de déterminer l'importance de tel ou tel réglage dans la production du résultat, ce qui permet d'optimiser efficacement la performance du système étudié
- ✓ La combinaison optimale est plus garantie car elle est issue d'une étude statistique.
- ✓ la méthode permet, par la planification, d'organiser et d'estimer la durée et le coût des essais
- ✓ les conclusions sont fiables et reproductibles, car il est aisé de savoir exactement dans quelles conditions elles sont obtenues;
- ✓ la méthode permet d'acquérir un savoir-faire dont la diffusion est simplifiée par la présentation des résultats (en particulier sous forme graphique).
- ✓ Permet de détecter les interactions éventuelles entre les différents facteurs

Contrairement à la notion communément admise, la meilleure précision sur les résultats est obtenue lorsque tous les facteurs varient à chaque essai. Or, les plans d'expérience permettent de tester les effets de plusieurs facteurs en même temps. Donc, non seulement les plans d'expérience sont un outil d'expérimentation économique, mais en plus ils sont techniquement plus précis que les outils d'expérimentation classiques.

B - *Vocabulaire*

1) *Définitions*

Expérience Fait de provoquer un phénomène sur un système en fonctionnement pour observer ou mesurer les effets

Facteur ou paramètre Un facteur est une variable ou un état qui fait varier la réponse du système. Il peut être de 2 types :

- ✓ Continu (ex : vitesse d'avance, température, distance, pression...)
- ✓ Discret (ex : type d'outil, nature du vernis, etc...)

Niveau d'un facteur Le niveau représente les différentes positions (= « réglages ») d'un facteur

Réponse La réponse est le résultat obtenu suite à un essai (la réponse doit être mesurable)

2) *Exemples*

Expérience	Réponse (comment peut-on mesurer l'expérience ?)	Facteurs (Quels sont les éléments qui vont influencer sur la réponse?)	Niveaux (Quelles sont les positions de ces éléments)
Usure des pneus d'une voiture	Ø roue	Pression Type de route Distance parcourue	1bar – 2 bars – 3 bars Goudron – Terre – Sable 100 km – 100 000 km
Essai de traction de pièces de bois	Déformation résiduelle (en mm)	Essence Force de traction Section pièce	Chêne – Ebène 30kN – 50kN – 100kN 30*40 – 50-60

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet		QU 620
Qualité			Page 7/54
Expérience	Réponse	Facteur	Niveau
<i>Essai de dégauchissage</i>	Pas d'usinage (mm)	Vitesse d'avance Profondeur de passe Nombre de dents	12 m/min – 6m/min 0.5mm – 1mm – 1.5mm 2-4
<i>Test sur la résistance d'un assemblage par tenon-mortaise</i>	Effort de rupture (kN)	Type de colle Essence de bois Section tenon	Vinylique – PU Baobab – Sycomore 40*20 – 30*20

C - Contexte de mise en place

La recherche de la qualité est devenue un point clé de la compétitivité des entreprises. Les plans d'expériences sont un outil permettant d'atteindre la maîtrise de la qualité plus rapidement et à moindre coût

1) Dans la phase de conception :

Le technicien a besoin d'optimiser des spécifications afin de répondre à des cahiers des charges de plus en plus exigeants. Le concepteur a besoin d'une méthode expérimentale, peu coûteuse, qui lui permettra rapidement de mesurer l'influence de chacun des paramètres. Les plans d'expériences répondent à cette exigence.

Exemples :

✓ Conception d'une maison :

- Réponse : délai de mise en fabrication
- Facteurs : ordre des tâches, etc...

✓ Type de finition

- Réponse : degré de brillance_____
- Facteurs : Nombre de couches, type d'application, type de finition_____

2) Dans la phase de production :

L'optimisation des réglages d'une machine ou d'un processus de fabrication demande la maîtrise des effets de nombreux facteurs. Les plans d'expériences se révèlent aussi indispensables pour répondre à cette exigence et ainsi améliorer la qualité et aussi les temps de production.

Exemples :

✓ Qualité de séchage d'un placage

- Réponse : nombre de fentes de séchage
- Facteurs : vitesse d'avance, température de séchage, etc...

✓ Qualité d'usinage d'une toupie

- Réponse : Justesse dimensionnelle des cotes usinées_____
- Facteurs : Vitesse d'avance, Usure de l'outil, Age de la machine_____

D - Démarche de mise en place d'un plan d'expérience

1) Définir l'objectif et sa mesure

Question clé :

Que va-t-on mesurer et comment ?



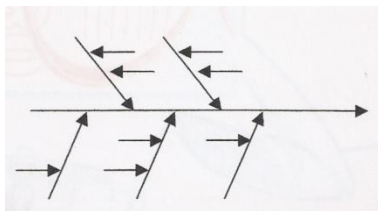
Réunion d'un groupe de spécialistes connaissant le système à étudier

- ✓ Choix de la caractéristique et de la qualité de la mesure (= réponse)
- ✓ Niveau de qualité à atteindre : limites de couts, délais, etc... (= protocole de mesure)

2) Sélectionner les facteurs – Choisir les niveaux

Question clé :

Qu'est ce qui va influencer sur cette mesure ?



Réunion d'un groupe de spécialistes connaissant le système à étudier

- ✓ Réalisation d'un diagramme cause – effet
- ✓ Classement des causes par ordre d'importance
- ✓ Sélection des causes les plus importantes
- ✓ Limitation des autres causes à un seul niveau pour toute l'expérience (=causes neutralisées)
- ✓ Identifier les interactions éventuelles entre ces causes

3) Construire la table orthogonale

Question clé :

Dans quel ordre réaliser les essais ?

1	1	1
2	1	1
3	1	
4	1	
5	2	
6		

Elaboration par un technicien :

- ✓ Ecrire le modèle recherché
- ✓ Définir le nombre d'essais (PPCM)
- ✓ Choisir la table de Tagushi (s'il s'agit d'un plan fractionnaire)
- ✓ Affecter les valeurs aux colonnes

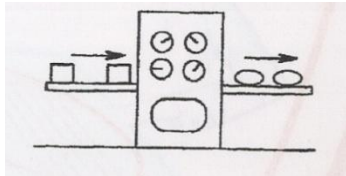
BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 9/54

4) *Réaliser les essais*

Question clé :

Quelle va-être la réponse à chaque essai ?

Exécution point par point, par un technicien :



- ✓ Protocole d'essai
- ✓ Tableau booléen

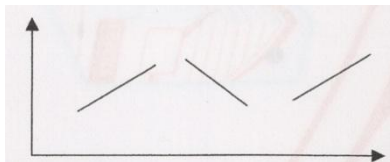
NB : ☐ Faire attention à ce que les facteurs non sélectionnés au B°) ne varient pas.
☐ Bien repérer les éprouvettes

5) *Analyser les résultats*

Question clé :

Quel est le réglage statistiquement le meilleur ?

Elaboration par un technicien :

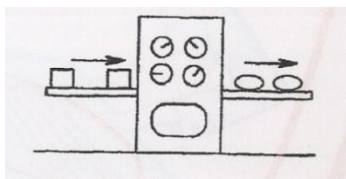


1. Calcul de la moyenne générale
2. Calcul des effets par rapport à la moyenne des facteurs
3. Calcul des effets par rapport à la moyenne des interactions
4. Mise en évidence des facteurs les plus influents (test de SNEDECOR par l'analyse de la variance)
5. Tracé du graphe du plan
6. Exploitation des résultats

6) *Vérifier les résultats*

Question clé :

Mon réglage trouvé grâce au plan d'expérience est-il effectivement le meilleur ?



Elaboration par un technicien :

- ✓ D'une expérience de confirmation en testant le réglage proposé dans le plan d'expérience

II- Introduction :

Un plan d'expérience complet consiste à faire une expérimentation de toutes les positions possibles des facteurs sans exception, afin de connaître toutes les réponses sans exception.

✓ **Exemple :** dans le cas d'un plan d'expérience de 4 facteurs à 2 niveaux, pour réaliser la totalité des réglages possibles, il faudra faire :

Avantages	Inconvénients
✓ Ce type de plan reste relativement simple à - o Elaborer - o mettre en place - o dépouiller. ✓ Il évite toute perte d'information concernant la réponse aux essais, tant au niveau des facteurs que des interactions.	Dans le cas d'un système avec de nombreux facteurs et/ou de nombreux niveaux, les essais à réaliser peuvent vite être très nombreux. Les expériences seront donc longues à effectuer : le procédé peut vite devenir très coûteux et les délais très long !

En somme, ce type de plan est particulièrement adapté aux systèmes disposant peu de facteurs et peu de niveaux : dans ce cas, le plan sera relativement rapide à mettre en place, et encore plus rapide à dépouiller. Dans le cas d'un système disposant de nombreux facteurs et de nombreux niveaux, un plan complet ne semble pas être la solution idéale : il faut alors passer au plan fractionnaire¹

✓ **Exemple 1 :** dans le cas d'un plan d'expérience de 7 facteurs à 7 niveaux, pour réaliser la totalité des réglages possibles, il faudra faire :

...cela est très long et très coûteux !

✓ **Exemple 2 :** dans le cas d'un plan d'expérience de 7 facteurs à 2 niveaux, pour réaliser la totalité des réglages possibles, il faudra tout de même faire :

...cela reste très long et très coûteux !

La démarche préparatoire à la réalisation d'un plan d'expérience complet est indiquée dans le cours page . Nous ne nous intéresseront ici qu'à la partie dans laquelle des calculs interviennent, c'est-à-dire :

- ✓ La construction de la table orthogonale
- ✓ L'analyse des résultats

Pour la démarche complète, se référer à la page . Pour rappel, cette démarche est articulée autour de 6 points :

1. Définir l'objectif et sa mesure
2. Sélectionner les facteurs – Choisir les niveaux
- 3. Construire la table orthogonale**

¹ Un plan fractionnaire est un plan d'expérience dont le nombre d'essais à réaliser à été réduit selon la méthode dite de « Tagushi ». Voir le cours « QU 620 - Les plans d'expérience - Plan fractionnaire.docx »

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 11/54

4. Réaliser les essais
- 5. Analyser les résultats**
6. Vérifier les résultats

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 12/54

III- Construire la table orthogonale :

Cette étape suit la sélection des facteurs et des niveaux, et précède la réalisation des essais

La table orthogonale permet de référencer la totalité des essais à réaliser. Sa bonne construction est donc fondamentale pour la poursuite du plan d'expérience. La démarche à réaliser est simple :

- ✓ Détermination du nombre d'essais
- ✓ Construction de la table

A - *Détermination du nombre d'essais*

Le nombre d'essai à réaliser dépend du nombre de facteurs à prendre en compte et du nombre de niveaux pour chaque facteur.

Soit :

- ✓ N le nombre d'essais à réaliser
- ✓ n_1 le nombre de niveaux du facteur 1
- ✓ n_2 le nombre de niveaux du facteur 2
- ✓ n_3 le nombre de niveaux du facteur 3
- ✓ n_n le nombre de niveaux du facteur n

Le nombre d'essais suit la formule :

$$N = n_1 * n_2 * n_3 * ... * n_n$$

En imaginant que $n_1 = n_2$ et que $n_3 = n_4 = n_n$ nous obtenons par simplification mathématique :

$$N = (n_1)^2 * (n_n)^3$$

1) *Exemple :*

Exp	Numéro Facteurs	Nombre niveaux	Formule mathématique	Nombre d'essais
1	A	2		8
	B	2		
	C	2		
2	A	4		576
	B	4		
	C	3		
	D	3		
	E	4		
3	A	4		120
	B	2		
	C	3		
	D	5		
4	✓ 3 facteurs à 2 niveaux ✓ 1 facteur à 3 niveaux			384

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 13/54

✓ 2 facteurs à 4 niveaux	
--------------------------	--

B - Construction de la table

Une table orthogonale est constituée d'autant de colonnes que de facteurs. La difficulté consiste, en fonction des niveaux pour chaque facteur, de déterminer l'ensemble des combinaisons possibles. Une méthode simple

- ✓ Décliner dans la première colonne, chaque niveau du premier facteur
- ✓ Pour chaque niveau du premier facteur, décliner tous les facteurs du second niveau dans la seconde colonne
- ✓ Pour chaque niveau du second facteur, décliner tous les facteurs du troisième niveau dans la troisième colonne
- ✓ Etc...

Par exemple :

- ✓ 2 facteurs (A, B) à 2 niveaux
- ✓ 1 facteur (C) à 3 niveaux

Nombre d'essais : _____

Essai : rupture d'un assemblage (Réponse : valeur du moment de rupture en kNm)

Facteur	Intitulé	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
A	Taux d'humidité bois	8%	15%	Ø
B	Type de colle	Vinylique	PU	Ø
C	Essence de bois	Hêtre	Chêne	Merisier

H%	Colle	Essence
8%	Vinylique	Hêtre
		Chêne
		Merisier
	Cellulosique	Hêtre
		Chêne
		Merisier
15 %	Vinylique	Hêtre
		Chêne
		Merisier
	Cellulosique	Hêtre
		Chêne
		Merisier
Nbre d'essais		12

... Ou bien ...

A	B	C
1	1	1
		2
		3
	2	1
		2
		3
2	1	1
		2
		3
	2	1
		2
		3
Nbre d'essais		12

...Ce qui donne ...

A	B	C
1	1	1
1	1	2
1	1	3
1	2	1
1	2	2
1	2	3
2	1	1
2	1	2
2	1	3
2	2	1
2	2	2
2	2	3
Nbre d'essais		12



Le facteur A sera modifié 1 fois seulement dans l'ensemble de l'expérience
 Le facteur B sera modifié 3 fois dans l'ensemble de l'expérience
 Le facteur C sera modifié 11 fois dans l'ensemble de l'expérience

Le facteur C change de niveau à chaque expérience. On veillera donc à inscrire dans les colonnes :

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 14/54

- ✓ Les facteurs faciles à modifier dans les colonnes ou les modifications de réglage sont les plus nombreuses (colonne C par exemple)
- ✓ Les facteurs faciles à modifier dans les colonnes ou les modifications de réglage sont les plus nombreuses (colonne A par exemple)

C - *Exemple :*

Une entreprise réalisant des ouvrages en bois exotique (lauan) désire améliorer la qualité de la finition de ses produits les réponses correspondent à une note attribuée par les clients. Pour ce faire, elle met en place un plan d'expérience et les 3 facteurs retenus sont:

Facteurs	Niveau 1	Niveau 2
Vitesse d'avance	13 m/min	22 m/min
Ponçage	grain de 120	grain de 240
Epaisseur de finition	20 µm	50 µm

Compléter la table orthogonale ci-dessous :

Essai n°	A	B	C	Réponse R
1				4.55
2				2.64
3				20.36
4				18.36
5				2.36
6				1.55
7				30.55
8				29.18

Déterminer l'intitulé des facteurs se positionnant dans la colonne A, B, et C :

Vitesse d'avance	•	•	Facteur A
Ponçage	•	•	Facteur B
Epaisseur de finition	•	•	Facteur C

Ce plan est-il fractionnaire ou complet ?

IV- Analyse des résultats

Cette étape suit la sélection des réalisation des essais, et précède la vérification des résultats

L'analyse des résultats consiste en une succession de séries et de représentation statistiques permettant, en une seule campagne d'essais, d'apporter une réponse statistique fiable au problème posé. Cette analyse est constituée de 6 grandes étapes majeures

- A. Calcul de la moyenne générale
- B. Calcul des effets par rapport à la moyenne des facteurs
- C. Calcul des effets par rapport à la moyenne des interactions

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 15/54

- D. Mise en évidence des facteurs les plus influents (test de SNEDECOR par l'analyse de la variance)
- E. Tracé du graphe du plan
- F. Exploitation des résultats

A - *Calcul de la moyenne générale des réponses :*

- ✓ Soit y la valeur d'une réponse
- ✓ Soit $\bar{Y}$ la moyenne générale des réponses
- ✓ Soit n le nombre de réponses

$$\bar{Y} = \frac{\sum y}{n}$$

1) *Exemple :*

Essai n°	A	B	C	Réponse y
1	1	1	1	4.55
2	1	1	2	2.64
3	1	2	1	20.36
4	1	2	2	18.36
5	2	1	1	2.36
6	2	1	2	1.55
7	2	2	1	30.55
8	2	2	2	29.18
Moyenne=				

B - *Calcul des effets par rapport à la moyenne des facteurs*

Le calcul des effets par rapport à la moyenne se calcule de la manière suivante :

- ✓ Calcul des effets totaux : moyenne des réponses quand les niveaux d'un facteurs sont sur une position (1 ou 2, etc...)
- ✓ Calcul des effets par rapport à la moyenne (différence entre la moyenne et les effets totaux)
- ✓ Rédaction de l'équation du modèle non validé sans les interactions

1) *Calcul des effets totaux*

Soit :

- ✓ y_{A1} la valeur d'une réponse quand le facteur A est positionné au niveau 1
- ✓ n_{A1} le nombre de réponses quand le facteur A est positionné au niveau 1
- ✓ Y_{A1} l'effet total du facteur A positionné au niveau 1

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 16/54

$$Y_{A1} = \frac{\sum y_{A1}}{n_{A1}}$$

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 17/54

2) *Calcul des effets par rapport à la moyenne*

a) *Déduction du nombre de degrés de libertés ddl*

Le nombre de degrés de liberté (ddl) d'un facteur est le nombre d'effet par rapport à la moyenne à calculer pour parvenir à la description complète de ce facteur. Ce degré de liberté pour les facteurs s'exprime de la manière suivante :

$$ddl_X = n_X - 1$$

Ou :

- ddl_X est le nombre de degrés de liberté du facteur
- n_X est le nombre de niveaux du facteur X

Par exemple, pour le facteur A (A=3 niveaux), nous aurons

$$ddl_A = 3 - 1 = 2$$

C'est-à-dire qu'avec le calcul de 2 effets par rapport à la moyenne du facteur, il est possible de déterminer les autres. C'est la notion de symétrie



Oltre la démarche détermination du nombre de calculs nécessaires pour donner l'expression matricielle des effets par rapport à la moyenne des actions, la détermination de ces degrés de libertés sera utile pour l'analyse de la variance.

b) *Effet par rapport à la moyenne*

Soit :

- ✓ $\bar{Y}$ la moyenne générale des réponses
- ✓ $A1$ l'effet par rapport à la moyenne quand le facteur A est positionné au niveau 1
- ✓ Y_{A1} l'effet total du facteur A positionné au niveau 1
- ✓ y_{A1} la valeur d'une réponse quand le facteur A est positionné au niveau 1
- ✓ n_{A1} le nombre de réponses quand le facteur A est positionné au niveau 1

$$A1 = Y_{A1} - \bar{Y} \quad \text{d'ou} \quad A1 = \frac{\sum y_{A1}}{n_{A1}} - \bar{Y}$$

Notons que nous obtenons ainsi la relation :

$$Y_{A1} = \bar{Y} + A1$$

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 18/54

c) *Notion de symétrie des effets par rapport à la moyenne*

La somme des effets par rapport à la moyenne du facteur A est nulle, c'est-à-dire :

$$\sum Ax = 0$$



Grace à cette relation, il est possible de déterminer rapidement un effet par rapport à la moyenne à l'aide de la somme des autres !

Exemple :

Soit :

$$B1 = 21.33$$

$$B2 = -19.17$$

$$\bar{Y} = -119.17$$

$$Y_{A1Bx} = 1300$$

$$Y_{A2Bx} = 1375$$

A l'aide de ces deux calculs de l'effet par rapport à la moyenne il est possible de trouver totalement l'expression matricielle du facteur B !

	B
1	21.33
2	-19.17
3	?
/	$\sum Ax = 0$

Donne :

$$21.33 - 19.17 + B3 = 0$$

$$B3 = -2.17$$

	B
1	21.33
2	-19.17
3	-2.17

Soit la mise en forme matricielle suivante :

$$[21.33 \quad -19.17 \quad -2.17][A]$$

3) *Rédaction de l'équation du modèle non validé sans les interactions*

Cette équation est simplement une mise en forme matricielle du calcul d'une réponse en fonction de la moyenne et des effets par rapport à la moyenne.

Soit :

- ✓ y une réponse quelconque
- ✓ $\bar{Y}$ la moyenne générale des réponses
- ✓ A, B, C, ..., X des facteurs ayant plusieurs niveaux
- ✓ A1 l'effet par rapport à la moyenne du facteur A positionné au niveau 1

La mise en forme matricielle de cette équation sera :

$$y = \bar{Y} + [A1 \ A2] [A] + [B1 \ B2 \ B3] [B] + [C1 \ C2] [C] \dots + [X1 \ X2] [X]$$



Cette équation est d'une grande utilité, car, à terme, elle permettra de donner la réponse statistique à toutes les combinaisons de réglages données.

✓ Exemple : $Y_{A1B1C2\dots X1} = \bar{Y} + A1 + B1 + C2 + \dots + X1$

4) **Exemple :**

Donner les effets par rapport à la moyenne des réponses suivantes et en donner l'équation matricielle des facteurs non validée :

Essai n°	A	B	C	Réponse y
1	1	1	1	4.55
2	1	1	2	2.64
3	1	2	1	20.36
4	1	2	2	18.36
5	2	1	1	2.36
6	2	1	2	1.55
7	2	2	1	30.55
8	2	2	2	29.18
Moyenne=				13.69

Effet total :

	A	B	C
1	11.48	2.78	14.46
2	15.91	24.61	12.93

Effet par rapport à la moyenne

	A	B	C
1	-2.22	-10.92	0.76
2	2.22	10.92	-0.76

Equation matricielle des facteurs non validée :

$$Y = 13.69 + [-2.22 \ 2.22] [A] + [-10.92 \ 10.92] [B] + [0.76 \ -0.76] [C]$$

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 20/54

c - *Calcul de l'effet par rapport à la moyenne des interactions*

1) *Notion d'interaction*

Il y a interaction lorsque l'effet total d'un facteur dépend du niveau d'un ou de plusieurs autres facteurs.

Imaginons que l'on souhaite mesurer la durabilité d'un bois. Pour cela on décide de mener deux expériences :

- La première expérience n'aura qu'un seul facteur : la présence ou non de vernis sans catalyseur sur le bois
On constatera alors que la présence ou non de vernis n'aura que peu d'influence sur la durabilité d'un bois, et pour cause : le vernis ne tient pas (non polymérisation du vernis : il ne sèche pas)
- La seconde expérience aura deux facteurs :
 - la présence ou non de vernis sans catalyseur sur le bois
 - la présence ou non de catalyseur dans le vernis
On constatera alors que la présence de ce vernis sur le bois aura une grande influence sur la durabilité de celui-ci. Grâce au catalyseur, le vernis séchera et protégera le bois, et ce par l'interaction du catalyseur avec le vernis.

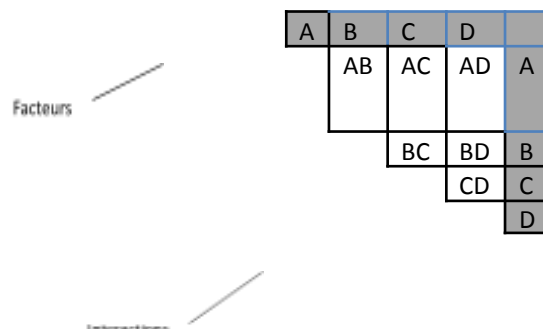
On dit alors qu'il y a interaction entre le catalyseur et le vernis !

Il s'agit d'une action commune aux deux facteurs. Elle se traduit par un renforcement (dans un sens ou dans l'autre) de l'action d'un facteur du fait de la présence de l'autre.

Cette notion d'interaction qu'elle soit explicite ou implicite dans le plan, doit nécessairement être prise en considération. La réponse de chacun des couples de facteurs pris en compte dans le plan doit alors être analysée

2) *Détermination des couples d'interaction*

Si un plan possède les facteurs A, B, C, et D il y aura alors toutes les interactions à étudier :



BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 21/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 22/54

3) *Calcul des effets totaux*

La démarche reste la même que pour l'effet total d'un seul facteur (voir page)

Soit :

- ✓ y_{A1B1Cx} la valeur d'une réponse quand le facteur A est positionné au niveau 1, que le facteur B est positionné au niveau 1 et que le facteur C est positionné à un niveau quelconque
- ✓ n_{A1B1Cx} le nombre de réponses quand le facteur A est positionné au niveau 1, que le facteur B est positionné au niveau 1 et que le facteur C est positionné à un niveau quelconque
- ✓ Y_{A1B1Cx} l'effet total quand le facteur A est positionné au niveau 1, que le facteur B est positionné au niveau 1 et que le facteur C est positionné à un niveau quelconque

$$Y_{A1B1Cx} = \frac{\sum y_{A1B1Cx}}{n_{A1B1Cx}}$$

4) *Calcul des effets par rapport à la moyenne*

a) *Déduction du nombre de degrés de libertés ddl*

Le nombre de degrés de liberté (ddl) d'une action (facteur ou interaction) est le nombre d'effet par rapport à la moyenne à calculer pour parvenir à la description complète de cette action. Ce degré de liberté pour les interactions s'exprime de la manière suivante :

$$ddl_{XY} = (n_X - 1)(n_Y - 1)$$

Ou :

- ddl_{XY} est le nombre de degrés de liberté de l'interaction XY
- n_X est le nombre de niveaux du facteur X
- n_Y est le nombre de niveaux du facteur Y

Par exemple, pour l'interaction AC (A=2 niveaux et C=3 niveaux), nous aurons

$$ddl_{AC} = (2 - 1)(3 - 1) = 2$$

C'est-à-dire qu'avec le calcul de 2 effets par rapport à la moyenne dans l'interaction, il est possible de déterminer l'ensemble de tous les autres. C'est la notion de symétrie



Outre la démarche détermination du nombre de calculs nécessaires pour donner l'expression matricielle des effets par rapport à la moyenne des actions, la détermination de ces degrés de libertés sera utile pour l'analyse de la variance.

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 23/54

b) *Effet par rapport à la moyenne*



La méthode utilisée pour le calcul des effets par rapport à la moyenne des interactions diffère de la méthode utilisée pour le calcul des effets par rapport à la moyenne des facteurs

La relation utilisée ici est la relation démontrée page :

Soit :

- ✓ $\bar{Y}$ la moyenne générale des réponses
- ✓ $A1$ l'effet par rapport à la moyenne quand le facteur A est positionné au niveau 1
- ✓ $B1$ l'effet par rapport à la moyenne quand le facteur B est positionné au niveau 1
- ✓ $A1B1Cx$ l'effet par rapport à la moyenne quand le facteur A est positionné au niveau 1, que le facteur B est positionné au niveau 1 et que le facteur C est positionné à un niveau quelconque
- ✓ Y_{A1B1Cx} l'effet total quand le facteur A est positionné au niveau 1, que le facteur B est positionné au niveau 1 et que le facteur C est positionné à un niveau quelconque

$$Y_{A1B1Cx} = \bar{Y} + A1 + B1 + A1B1Cx$$

Soit l'équation :

$$A1B1Cx = Y_{A1B1Cx} - \bar{Y} - A1 - B1$$

c) *Notion de symétrie des effets par rapport à la moyenne*

La somme des effets par rapport à la moyenne quand le facteur X est bloqué sur le niveau 1 (par exemple) est nulle, c'est-à-dire :

$$\sum X1YxZx = 0$$



Grace à cette relation, il est possible de déterminer rapidement un effet par rapport à la moyenne à l'aide de la somme des autres !

Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} A1 = -41.66 & A2 = 41.66 & C1 = -87.5 & C2 = 12.5 & C3 = 75 \\ \bar{Y} = 1400 & Y_{A1BxC1} = 1300 & Y_{A1BxC2} = 1375 & & \end{array}$$

A l'aide de ces deux calculs de l'effet par rapport à la moyenne...

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 24/54

- $A1BxC1 = 1300 - 1400 - (-41.66) - (-87.5) = 29.16$
- $A1BxC2 = 1375 - 1400 - (-41.66) - 12.5 = 4.16$

... il est possible de trouver totalement l'expression matricielle de l'interaction AC !

/	$\sum Ax C1 = 0$	$\sum Ax C2 = 0$	$\sum Ax C3 = 0$	/
A1	29.16	4.16	?	$\sum A1 Cx = 0$
A2	?	?	?	$\sum A2 Cx = 0$
AC	C1	C2	C3	/

En fonction de l'équation somme des lignes=0 et somme des colonnes=0, nous pouvons déduire

- $A1BxC2 + 29.16 + 4.16 = 0$ soit $A1BxC2 = -33.2$

A1	29.16	4.16	-33.2
A2	-29.16	-4.16	33.2
AC	C1	C2	C3

Soit la mise en forme matricielle suivante :

$$[29.16 \ 4.16 \ -33.2 \ -29.16 \ -4.16 \ 33.2][AC]$$

5) *Rédaction de l'équation du modèle non validé avec les interactions*

Cette équation est simplement une mise en forme matricielle du calcul d'une réponse en fonction de la moyenne et des effets par rapport à la moyenne.

Soit :

- ✓ y une réponse quelconque
- ✓ $\bar{Y}$ la moyenne générale des réponses
- ✓ A, B, ..., X des facteurs ayant plusieurs niveaux
- ✓ AB, AC, ..., XY des interactions entre les facteurs
- ✓ A1 l'effet par rapport à la moyenne du facteur A positionné au niveau 1
- ✓ A1B1 l'effet par rapport à la de l'interaction AB (entre A et B) quand le facteur A est positionné au niveau 1 et le facteur B au niveau 1
- ✓ x le nombre de niveaux du facteur X
- ✓ y le nombre de niveaux du facteur y

La mise en forme matricielle de cette équation sera :

$$y = \bar{Y} + [A1 \ A2][A] + [B1 \ B2 \ B3][B] + [C1 \ C2][C] \dots + [X1 \ X2][X] + \dots + [A1B1 \ A1B2 \ A1B3 \ A2B1 \ A2B2 \ A2B3]$$

Ainsi, la mise en forme matricielle d'une interaction XY ou X comporte x niveaux et Y comporte y niveaux

$$[X1Y1 \ \dots \ X1Yy \ \dots \ \dots \ XxY1 \ \dots \ XxYy][XY]$$

6) Exemple :

Donner les effets par rapport à la moyenne de toutes les interactions du modèle suivant et en donner l'équation matricielle globale non validée :

Equation matricielle des facteurs non validée :

$$y = 13.69 + [-2.22 \ 2.22] [A] + [-10.92 \ 10.92] [B] + [0.76 \ -0.76] [C]$$

Essai n°	A	B	C	Réponse y
1	1	1	1	4.55
2	1	1	2	2.64
3	1	2	1	20.36
4	1	2	2	18.36
5	2	1	1	2.36
6	2	1	2	1.55
7	2	2	1	30.55
8	2	2	2	29.18
Moyenne=				13.69

Effet total de AB

		B	
		1	2
A	1	3,595	19,36
	2	1,955	29,865

Nombre de ddl :

1

Effet total de AC

		C	
		1	2
A	1	12,455	10,5
	2	16,455	15,365

Nombre de ddl :

1

Effet total de BC

		C	
		1	2
B	1	3,455	2,095
	2	25,455	23,77

Nombre de ddl :

1

Effet par rapport à la moyenne de AB

$$Y_{A1B1C1} = \bar{Y} + A1 + B1 + A1B1$$

$$A1B1 = Y_{A1B1C1} - \bar{Y} - A1 - B1$$

$$A1B1 = 3.595 - 13.69 + 2.22 + 10.09$$

$$A1B1 \approx 3.03$$

$$A1B2 = 19.36 - 13.69 + 2.22 - 10.09$$

$$A1B2 \approx -3.03$$

$$A2B1 = 1.955 - 13.69 - 2.22 + 10.09$$

$$A2B1 \approx -3.03$$

$$A2B2 = 29.865 - 13.69 - 2.22 - 10.09$$

$$A2B2 \approx 3.03$$

Effet par rapport à la moyenne de AC

$$Y_{A1B1C1} = \bar{Y} + A1 + C1 + A1C1$$

$$A1C1 = Y_{A1B1C1} - \bar{Y} - A1 - C1$$

$$A1C1 = 12.455 - 13.69 + 2.22 - 0.76$$

$$A1C1 \approx 0.216$$

$$A1C2 = 10.5 - 13.69 + 2.22 + 0.76$$

$$A1C2 \approx -0.216$$

$$A2C1 = 16.455 - 13.69 - 2.22 - 0.76$$

$$A2C1 \approx -0.216$$

$$A2C2 = 15.365 - 13.69 - 2.22 + 0.76$$

$$A2C2 \approx 0.216$$

Effet par rapport à la moyenne de BC

$$Y_{A1B1C1} = \bar{Y} + B1 + C1 + B1C1$$

$$B1C1 = Y_{A1B1C1} - \bar{Y} - A1 - C1$$

$$B1C1 = 3.455 - 13.69 + 10.91 - 0.76$$

$$B1C1 \approx -0.081$$

$$B1C2 = 2.092 - 13.69 + 10.91 + 0.76$$

$$B1C2 \approx 0.081$$

$$B2C1 = 25.455 - 13.69 - 10.91 - 0.76$$

$$B2C1 \approx 0.081$$

$$B2C2 = 23.77 - 13.69 - 10.91 + 0.76$$

$$B2C2 \approx -0.081$$

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 26/54

Ecriture matricielle de l'interaction AB

Ecriture matricielle de l'interaction AC

Ecriture matricielle de l'interaction AC

$[3.03 \quad -3.03 \quad -3.03 \quad 3.03][AB]$

$[0.216 \quad -0.216 \quad -0.216 \quad 0.216][AC]$

$[-0.081 \quad 0.081 \quad 0.081 \quad -0.081][BC]$

Equation matricielle globale non validée :

$$y = 13.69 + [-2.22 \quad 2.22][A] + [-10.92 \quad 10.92][B] + [0.76 \quad -0.76][C] + [3.03 \quad -3.03 \quad -3.03 \quad 3.03][AB]$$

D - *Mise en évidence des facteurs les plus influents par l'analyse de la variance :*



L'objectif de cette partie est de vérifier sur les résultats obtenus (effets par rapport à la moyenne des facteurs et des interactions) sont réellement significatifs dans l'obtention du résultat, c'est-à-dire qu'il sera alors possible de connaître les facteurs sur lesquels il faudra porter une attention toute particulière.

A l'inverse, si trop peu de facteurs ou d'interactions sont significatifs, cela voudra dire que les facteurs qui ont été retenus pour l'expérience ne sont pas influents sur le résultat. Il faudra alors refaire une nouvelle expérience avec de nouveaux facteurs pour tenter d'en trouver des plus influents

1) *Calcul des résidus*

Nous disposons maintenant d'une équation rédigée sous forme matricielle prenant en compte :

- La moyenne $\bar{Y}$
- Les effets par rapports à la moyenne du facteur A nommées $A1$ et $A2$
- Les effets par rapports à la moyenne du facteur B nommées $B1$ et $B2$
- La réponse « théorique » (=déduite de l'équation matricielle) y

L'équation est de la forme :

$$y = \bar{Y} + [A1 \quad A2][A] + [B1 \quad B2][B] + [A1B1 \quad A1B2 \quad A2B1 \quad A2B2][AB]$$

La valeur y_{A1B1} de la réponse « estimée » calculée à partir de l'équation ci-dessus pour les positions de A et de B réglées sur 1 va différer de la réponse « réelle » mesurée lors de l'expérimentation pour ces mêmes positions de A et de B. Cela est notamment du à la dispersion des mesures pour cette position.

Le résidu r sera alors la différence la réponse réellement mesurée $\tilde{y}$ et cette estimation y . On notera :

$$r = y - \tilde{y}$$

Ainsi, pour essai, il y aura un résidu. Par exemple :

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 27/54

- Essai 1 : $r_{A1B1} = y_{A1B1} - \tilde{y}_{A1B1}$
- Essai 2 : $r_{A2B1} = y_{A2B1} - \tilde{y}_{A2B1}$
- Essai 3 : $r_{AxBx} = y_{AxBx} - \tilde{y}_{AxBx}$

Il sera donc nécessaire de calculer les résidus pour chaque essai réalisé.

NB : Une méthode simple et rapide pour valider l'exactitude des calculs : $\sum r = 0$

2) Calcul de la valeur de F (valeur Fisher calculée)

Source	$\sum$ des carrés	dll	variances	Fexp	Fthéo	Sign ?
A	$S_A = \frac{N \sum E_A^2}{n_a}$	$n_a - 1$	$V_A = \frac{S_A}{V_r}$	$\frac{V_A}{V_r}$	$V_1 = n_a - 1$ $V_2 = V_r$	O/N
B	$S_B = \frac{N \sum E_B^2}{n_b}$	$n_b - 1$	$V_B = \frac{S_B}{V_r}$	$\frac{V_B}{V_r}$	$V_1 = n_b - 1$ $V_2 = V_r$	O/N
C	$S_C = \frac{N \sum E_C^2}{n_c}$	$n_c - 1$	$V_C = \frac{S_C}{V_r}$	$\frac{V_C}{V_r}$	$V_1 = n_c - 1$ $V_2 = V_r$	O/N
AB	$S_{AB} = \frac{N \sum E_{AB}^2}{n_A n_B}$	$(n_A - 1)(n_B - 1)$	$V_{AB} = \frac{S_{AB}}{(n_A - 1)(n_B - 1)}$	$\frac{V_{AB}}{V_r}$	$V_1 = dll_{AB}$ $V_2 = V_r$	O/N
Résidus	$S_R = \sum r^2$ (4)	$v_r = N - dll_{modèle}$	$V_R = \frac{S_R}{v_r}$			
Total	$S_T = \sum (Y - \bar{Y})^2$ (3)	$N - 1$ (2)	(1)			

N	Nombre total d'échantillons réalisés lors de l'expérimentation	n	Nombre de niveaux de l'action
E_A	Effet par rapport à la moyenne du facteur A	E_{AB}	Effet par rapport à la moyenne de l'interaction AB
dll	degré de liberté	r	résidu
V	Variance	$\bar{Y}$	Résultat d'un essai réalisé
F	Valeur Fisher calculée	$\bar{Y}$	Moyenne de tous les essais réalisés
v_r	Nombre de degrés de liberté des résidus	V1	Premier degré de liberté pour la table de SNEDECOR
O/N	Oui ou Non	V2	Second degré de liberté pour la table de SNEDECOR
σ_{N-1}	Ecart type de l'ensemble des essais réalisés lors de l'expérimentation	$dll_{modèle}$	$\sum dll_{facteurs et interactions} + 1$

Remarque :

$$S_T = (N - 1) * V_T$$

$$S_R = S_T - (S_A + S_B + S_C + S_{AB})$$

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 28/54



Cette dernière remarque nous permettra de gagner beaucoup de temps dans le cas des plans d'expérience à essais multiples pour une même position des actions (= pour une même ligne du plan). Ainsi, en calculant d'abord V_T (formule n°(1)) puis $(N-1)$ (formule n° (2)), nous pouvons alors, grâce à la remarque ci-dessus, calculer S_T (formule n° (3)) puis S_R (formule n° (4)) de manière nettement plus rapide que les formules initialement proposées dans la table ! Pour tous les cas de plan d'expérience, il est donc préférable de suivre cette démarche !

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 29/54

3) *Détermination de la valeur de F_{table} (valeur Fisher théorique)*

Cette valeur F_{table} se détermine pour chaque facteur, et pour chaque interaction. Elle se lit dans l'une des deux tables de Snédécour.

Ces tables vous sont présentées page . En fonction du niveau de probabilité choisi (99% soit 1% de risque d'erreur, ou 95% soit 5% de risque d'erreur).

La valeur se lit au point de rencontre entre la valeur :

- v_1 : nombre de degré de liberté de l'action (ddl_x)
- v_2 : nombre de degrés de liberté du résidu (ddl_r)

4) *Interprétation et conclusion*

Pour chaque facteur, et pour chaque interaction, il convient de se poser la question :

Si $F < F_{table}$, alors l'effet du facteur ou de l'interaction n'est pas significatif. Il est alors judicieux de le supprimer du modèle matriciel.

Une fois ce modèle matriciel épuré des facteurs ou interactions non significatifs, il est alors validé.

Ce modèle matriciel validé peut alors être utilisé pour donner un optimum théorique. Il permettra de déterminer les positions des facteurs pour lesquels l'effet total sera maximal (ou minimal, en fonction de la nature de la réponse). Ainsi, on pourra déterminer les meilleurs « choix » possibles pour une problématique donnée.

5) *Exemple*

$$y = 13.69 + [-2.22 \ 2.22][A] + [-10.92 \ 10.92][B] + [0.76 \ -0.76][C] + [3.03625 \ -3.03625] + 3.03625$$

Essai n°	A	B	C	Réponse mesurée $\tilde{y}$	Réponse estimée $\hat{y}$	Résidus r
1	1	1	1	4.55	4.49125	-0.05875
2	1	1	2	2.64	2.69875	0.05875
3	1	2	1	20.36	20.41875	0.05875
4	1	2	2	18.36	18.30125	-0.05875
5	2	1	1	2.36	2.41875	0.05875
6	2	1	2	1.55	1.49125	-0.05875
7	2	2	1	30.55	30.49125	-0.05875
8	2	2	2	29.18	29.23875	0.05875
$\sum r_x^2$						0.02761
$\sum r_x$						0

Action	$\sum$ des carrés	ddl	V	F _{calc}	F _{table} à 5%	F _{table} à 1%	Significatif ?
A	39.4272	1	39.4272	1428	161.4	4052	S
B	953.753	1	953.753	34541	161.4	4052	TS
C	4.636	1	4.636	168	161.4	4052	S
AB	73.75	1	73.75	2470.9	161.4	4052	S
BC	0.0528	1	0.0528	1.9126	161.4	4052	NS
AC	0.3741	1	0.3741	13.55	161.4	4052	NS
résidu	0.02761	1	0.02761	∅	∅	∅	∅

Conditions :

- Si $F > F_{table}$ à 1%, alors l'action est très significative (notée TS)
- Si $F > F_{table}$ à 5%, alors l'action est significative (notée S)
- Si $F < F_{table}$ à 5%, alors l'action est non significative (notée NS). L'action est supprimée

Modèle matriciel validé :

$$y = 13.69 + [-2.22 \ 2.22][A] + [-10.92 \ 10.92][B] + [0.76 \ -0.76][C] + [3.03625 \ -3.03625] + 3.03625$$

E - *Tracé du graphe du plan*

Si l'on sait, grâce à l'analyse de la variance quels facteurs ou interactions sont suffisamment influents dans l'absolu, c'est à dire pour être pris en compte dans la résolution du plan, il est encore difficile de savoir quels sont les facteurs les plus influents par rapport aux autres. Le graphe du plan permet d'identifier tout cela. Ce graphe représente donc les effets totaux :

- ✓ Des facteurs
- ✓ Des interactions

L'interprétation de ce graphe est donc fondamentale pour la résolution d'un des objectifs du plan d'expérience : connaître les facteurs les plus influents

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 31/54

1) *Graphes des facteurs*

Il s'agit de la représentation graphique **des effets totaux** calculés précédemment (voir page), ou :

- ✓ L'axe des abscisses représente les niveaux de chaque facteur
- ✓ L'axe des ordonnées représente la réponse y



Ce graphique donne une idée de l'influence présumée d'un facteur par rapport aux autres vis-à-vis de la réponse. Plus les points représentant les effets par rapport à la moyenne d'un même facteur sont loin de la ligne représentant la moyenne, plus ce facteur influe sur la réponse.

Plus le tracé entre les points représentant les effets par rapport à la moyenne d'un même facteur est incliné, plus ce facteur influe sur la réponse.

a) *Méthode de tracé*

1. Définir une échelle en fonction de la place disponible et de l'étendue des effets par rapport à la moyenne et la reporter sur l'axe des ordonnées
2. Positionner la moyenne $\bar{Y}$ du plan
3. Sur l'axe des abscisses, reporter les niveaux de chaque facteur
4. Reporter sur le graphique les effets par rapport à la moyenne calculée précédemment
5. Relier entre eux les effets par rapport à la moyenne d'un même facteur et uniquement d'un même facteur

2) *Tracé du graphe des effets totaux des interactions :*

Il s'agit de la représentation graphique **des effets totaux** calculé précédemment (voir page), ou :

- ✓ L'axe des abscisses représente les niveaux d'un facteur d'une interaction
- ✓ L'axe des ordonnées représente chaque niveau du deuxième facteur de l'interaction, et ce pour tous les niveaux du premier facteur de l'interaction. Les deux effets totaux pointés seront alors reliés par une droite



Ce graphique donne une idée de l'influence présumée d'une interaction par rapport aux autres facteurs et/ou interactions vis-à-vis de la réponse. Si les droites d'un graphe d'interaction sont parallèles les unes aux autres, alors l'influence de cette interaction est peu ou pas importante. A l'inverse, moins ces droites sont parallèles, plus l'influence de cette interaction est importante

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 32/54

a) *Méthode de tracé*

1. Définir une échelle en fonction de la place disponible et de l'étendue des effets par rapport à la moyenne et la reporter sur l'axe des ordonnées
2. Sur l'axe des abscisses, reporter les niveaux du premier facteur de chaque interaction
3. Sur l'axe des ordonnées, représenter la moyenne $\bar{Y}$
4. Sur l'axe des ordonnées, reporter les effets totaux de l'interaction pour chaque position du second facteur de l'interaction
5. Relier par une droite les effets totaux du facteur représenté en abscisse pour chacune de ses positions.
6. Cette droite, en fonction de ses valeurs, représente une position du deuxième facteur de l'interaction. Indiquer alors la position de ce deuxième facteur sur la droite

3) *Exemple*

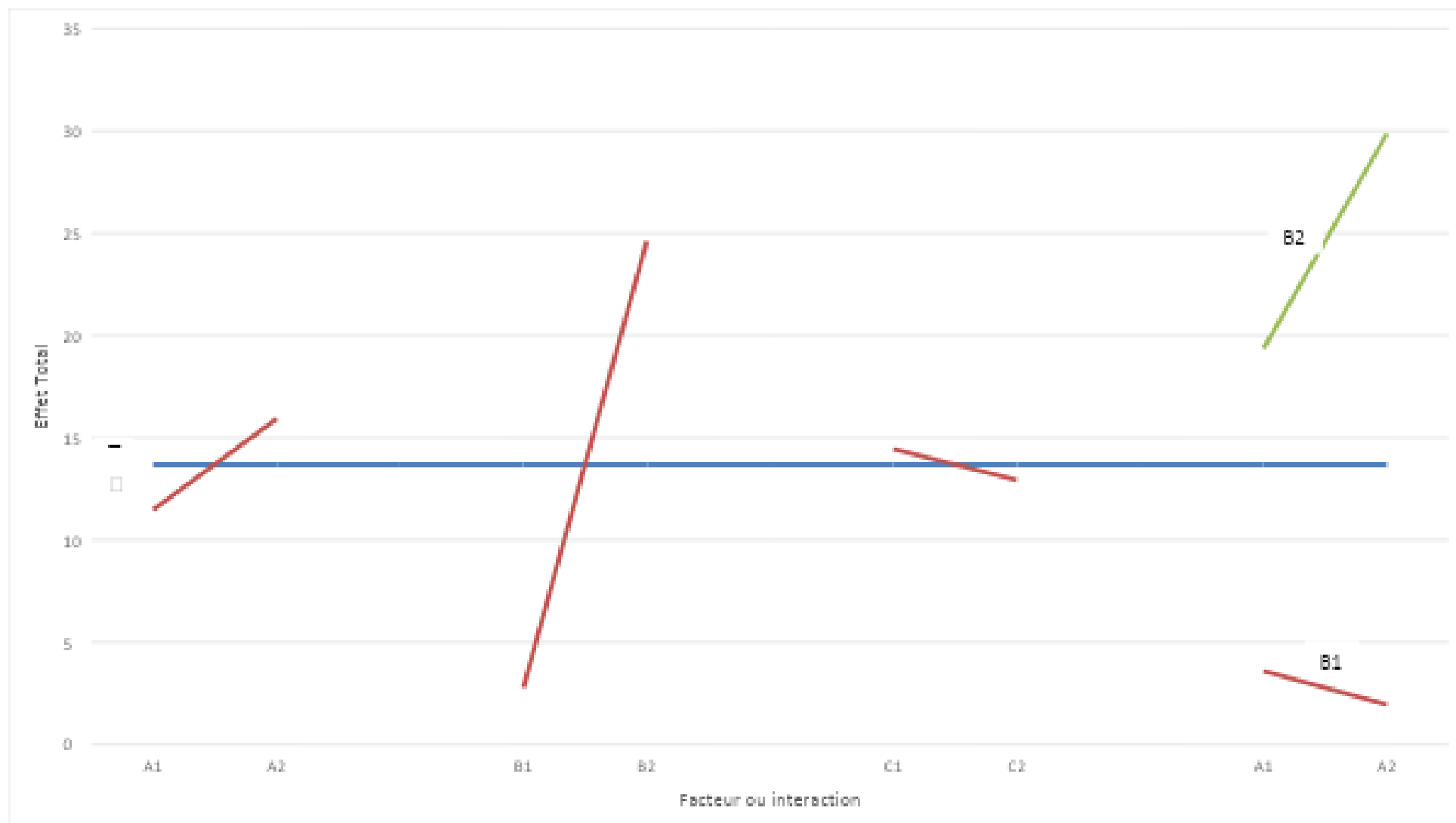
Tracer le graphe du modèle suivant (page suivante) :

$$y = 13.69 + [-2.22 \ 2.22][A] + [-10.92 \ 10.92][B] + [0.76 \ -0.76][C] + [3.03625 \ -3.03625 \ -3.03625]$$

Parmi les facteurs & interactions significatives, quels facteurs ou interactions sont les plus influents par rapport aux autres ?

Par rapport aux autres, les facteurs particulièrement influents, sont :

- Le facteur B
- L'interaction AB



BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 34/54

F - Conclusion

Après cette analyse complète des résultats, il est enfin possible de répondre aux questions initiales d'un plan d'expérience :

- ✓ Quels sont les facteurs à prendre en compte ?
- ✓ Quels sont les facteurs les plus influents ?
- ✓ Quelle est alors la combinaison optimale ?

1) *Quels sont les facteurs à prendre en compte ?*

Cette information est donnée par l'analyse de la variance (voir page). Elle permet de valider le modèle matriciel en prenant en compte que les facteurs/interactions suffisamment significatives. Cette étude est donnée par la comparaison entre la valeur F (Fisher) calculée dans l'analyse de la variance et une valeur F_{table} repérée dans une table de Snédécour avec un niveau de précision adapté. Ainsi,

Si $F > F_{table}$, alors le facteur/interaction est significative (il est à prendre en compte pour le modèle)

a) *Exemple*

A partir du modèle matriciel suivant...

$$y = 13.69 + [-2.22 \ 2.22][A] + [-10.92 \ 10.92][B] + [0.76 \ -0.76][C] + [3.03625 \ -3.03625 \ -3.03625]$$

...dire si les actions (facteurs ou interactions) sont significatives ou non...

Source	F	F_{table} à 5%	Significatif ?
A	1423	161.4	S
B	34541	161.4	S
C	167	161.4	S
AB	2670	161.4	S
AC	13.55	161.4	NS
BC	1.91	161.4	NS

Et rédiger le modèle matriciel validé

$$y = 13.69 + [-2.22 \ 2.22][A] + [-10.92 \ 10.92][B] + [0.76 \ -0.76][C] + [3.03625 \ -3.03625 \ -3.03625]$$

2) *Quels sont les facteurs les plus influents ?*

Cette réponse est donnée grâce au graphe du modèle.

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 36/54

- ✓ Pour un facteur : plus la pente est inclinée, plus le facteur est influent
- ✓ Pour une interaction : moins les droites sont parallèles, plus l'interaction est influente

Il suffit alors de déterminer de relever les pentes les plus inclinées, et les droites les moins parallèles !

a) **Exemple :**

Facteurs	Lettre facteur	Niveau 1	Niveau 2
Epaisseur de finition	B	20 µm	50 µm
Ponçage	A	non poncé	grain de 240
Vitesse d'avance	C	13 m/min	22 m/min

Au regard du graphe tracé page et du tableau spécifiant la nature des facteurs & niveaux ci dessus, quelles est l'action la plus influente pour ce plan d'expérience ?

Le facteur B : « Epaisseur de la finition »

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 37/54

3) Quelle est alors la combinaison optimale ?

Cette information est calculée à partir du modèle matriciel validé par l'analyse de la variance. Il s'agit donc, en fonction de la nature de la réponse, de trouver la combinaison de facteurs optimale, c'est à dire celle donnant la note optimale.



Attention, cette combinaison de facteur doit aussi considérer les interactions générées par les réglages de ces facteurs.

Exemple pour le modèle suivant (on considérera ici que la réponse doit être la plus grande possible) :

$$y = 1.69 + [-4.22 \ 4.22][A] + [-13.8 \ 13.8][B] + [1.5 \ -1.5][C] + [-10.3 \ 10.3 \ 10.3 \ -10.3][AB] +$$

Réflexion simpliste	Réflexion plus approfondie
Dans un premier temps,	Il est possible de faire mieux
<u>On se focalise immédiatement sur les effets par rapport à la moyenne des facteurs</u> et on néglige les interactions.	<u>Au regard des résultats, on se focalise plutôt sur les effets par rapport à la moyenne des interactions</u> et en négligeant les facteurs.
La combinaison optimale semble être la combinaison A2B2C1.	La combinaison A1B2C1 est alors étudiée
Si l'on calcule la réponse de cette combinaison, il sera alors important de considérer les interactions A2B2 et A2C1.	Si l'on calcule la réponse de cette combinaison, il sera alors important de considérer les interactions A1B2 et A1C1.
La réponse sera alors $y = -39.49$.	La réponse sera alors $y = 73.47$. Ce résultat est nettement meilleur !
<u>Contrairement à ce que nous pensions initialement, la combinaison optimale est donc A1B2C1 et la note optimale est $y = 73.47$</u>	

a) Exemple :

A partir du modèle matriciel suivant...

$$y = 13.69 + [-2.22 \ 2.22][A] + [-10.92 \ 10.92][B] + [0.76 \ -0.76][C] + [3.03625 \ -3.03625 \ -3.03625 \ 3.03625][AB] +$$

... et du tableau spécifiant paramètres réels correspondant aux lettres des facteurs...

Facteurs	Lettre facteur	Niveau 1	Niveau 2
Epaisseur de finition	B	20 μ m	50 μ m
Ponçage	A	non poncé	grain de 240
Vitesse d'avance	C	13 m/min	22 m/min

... donner la meilleure combinaison possible ainsi que la note maximale

Combinaison optimale ? A2-B2-C1

Facteurs + niveaux réels correspondants :

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 38/54
Epaisseur de finition(B) : 50 μm Ponçage (A) : grain de 240 Vitesse d'avance (C) :13 m/min Note maximale : 30.49		

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 39/54

V- Table de SNEDECOR

v1 : nombre de degré de liberté de l'action (ddl ₁)
v2 : nombre de degrés de liberté du résidu (ddl ₂)

Table de SNEDECOR pour $p = 0,950$

v2	v1 - Degrés de liberté du numérateur									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,2
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
120	3,92	3,00	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91

v2 - Degrés de liberté du dénominateur

Table de SNEDECOR pour $p = 0,99$

v2	v1 - Degrés de liberté du numérateur									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47

v2 - Degrés de liberté du dénominateur

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 41/54

VI- Pour aller plus loin...

- ✓ Mémotech productique/industrialisation bois et matériaux associés, pages 361 à 382, Chapitre 12 « Les plans d'expérience, Educavivre

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 42/54

VII- Exercices :

A - *Exercice 1 : finition*

Un célèbre fabricant de portes alu souhaite améliorer la qualité de la finition de ses menuiseries. Il choisit donc de mettre en place un plan d'expérience dont les modalités d'essai sont les suivantes.

Facteur	Définition	Niveau Bas	Niveau haut
A	Température du bain	229°C	234°C
B	Température de préchauffe	140°C	160°C
C	Hauteur de la vague sur buse	8mm	10mm
Réponse Y :		Moyenne du nombre de défauts sur 20 menuiseries observées	

Les résultats des essais sont les suivants

Table			
A	B	C	Réponse
1	1	1	0,62
2	1	1	0,35
1	2	1	2,022
2	2	1	1,96
1	1	2	0,385
2	1	2	0,155
1	2	2	3,05
2	2	2	2,908

Réaliser le dépouillement, la validation des résultats et la conclusion de ce plan pour un risque de 5%. Donner la valeur optimale du résultat ainsi que la position des réglages

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 43/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 44/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 45/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 46/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 47/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 48/54

B - *Exercice 2 : séchage*

Plysorol est une société spécialisée dans la fabrication de contreplaqué. Dans cette société, le séchoir permettant de sécher le placage déroulé à partir des billes de bois génère un nombre important de fentes et fait baisser significativement le rendement matière de la bille. Le principe de fonctionnement de ce séchoir est simple : un tapis roulant supportant le placage déroulé passe dans une sorte de tunnel de séchage. L'air chaud est alors « propulsé » sur ce placage par l'intermédiaire de tuyères (sortes de tubes dans lequel l'air s'engouffre). Le taux d'humidité du séchoir est géré par le biais de ventilateurs et de cheminées d'évacuation à ouvrir ou à fermer.

Pour tenter de limiter le nombre de fentes dues au séchage, un plan d'expérience a été mis en place sur ce séchoir, avec les paramètres suivants :

Facteur	Définition	Facilité de modification du facteur	Niveau 0	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
A	Température du séchoir	Difficile	80°C	/	/	90°C
B	Vitesse d'avance du tapis	Très facile	5 m/min	10 m/min	15 m/min	10 m/min
C	Bouchage des tuyères	Très difficile	1 sur 2	/	/	1 sur 4
Réponse Y : <i>Moyenne du nombre de fentes dues au séchage sur 5 bobines d'Okoumé de 50m</i>						

Les résultats des essais sont les suivants

A	B	C	Résultat 1	Résultat 2	Résultat 3	Moyenne
0	0	0	4	6	3	
0	1	0	17	15	18	
0	2	0	13	10	14	
0	3	0	15	13	16	
3	0	0	12	10	13	
3	1	0	10	10	11	
3	2	0	5	6	7	
3	3	0	17	18	18	
0	0	3	12	14	15	
0	1	3	10	12	13	
0	2	3	17	19	17	
0	3	3	5	7	6	
3	0	3	16	17	17	
3	1	3	6	8	8	
3	2	3	12	13	14	
3	3	3	13	14	16	

Questions :

1. En fonction de la difficulté à modifier ces facteurs, construire la table orthogonale.
2. Rédiger le modèle matriciel non validé de ce plan en indiquant les effets.
3. Valider le modèle de ce plan pour un risque de 5% (en indiquant les effets)
4. S'il y a lieu, représenter le graphe de ce plan et rédiger son modèle matriciel en indiquant les effets
5. a°) S'il y a lieu, donner la valeur optimale du résultat ainsi que la position des paramètres.

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience	QU 620
Qualité	Plan d'expérience complet	Page 49/54

b°) Quel outil utiliseriez-vous pour approfondir cette démarche ? Mettre en place cet outil et sélectionner parmi les éléments trouvés 3 autres facteurs a priori significatifs pouvant influencer sur cette problématique, ainsi que deux niveaux pour chacun.

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 50/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 51/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 52/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 53/54

BTS2 Prod.	Les plans d'expérience Plan d'expérience complet	QU 620
Qualité		Page 54/54