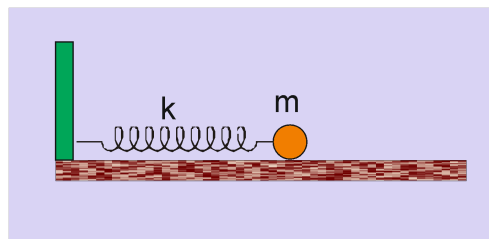


Η εξάρτηση της περιόδου μιας Α.Α.Τ. από τη μάζα και τη σταθερά ελατηρίου

Στο εισαγωγικό μάθημα για την απλή αρμονική ταλάντωση, ο δάσκαλος περιέγραψε το απλούστερο μοντέλο του απλού αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή ένα σώμα μάζας m δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Έδωσε ως δεδομένο ότι η περίοδος T της ταλάντωσης εξαρτάται από τη μάζα του σώματος και από τη σταθερά του ελατηρίου και ζήτησε από τους μαθητές να εκτιμήσουν τη μορφή της σχέσης που συνδέει τα T , m , k . Ένας μαθητής αφού σκέφτηκε το ερώτημα, πήρε το λόγο. Ας δούμε τι απάντησε.



Απάντηση

Η ζητούμενη σχέση θα είναι της μορφής $T = c \cdot m^\alpha \cdot k^\beta$ (1), όπου c μια αδιάστατη σταθερά και α, β ανήκουν στο $\mathbb{R}$. Παρόμοια σχέση λοιπόν θα πρέπει να συνδέει και τις μονάδες μέτρησης των εμπλεκόμενων μεγεθών. Ας συμβολίσουμε με $[x]$ τη μονάδα μέτρησης του μεγέθους x . Τότε

$$[T] = [m]^\alpha \cdot [k]^\beta \rightarrow s = \text{kg}^\alpha \cdot \left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)^\beta \rightarrow s = \text{kg}^\alpha \cdot \left(\frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}}\right)^\beta \rightarrow s = \text{kg}^\alpha \cdot \left(\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}\right)^\beta \rightarrow$$

$$\rightarrow s = \text{kg}^\alpha \cdot \frac{\text{kg}^\beta}{\text{s}^{2\beta}} \rightarrow s^1 = \text{kg}^{\alpha+\beta} \cdot s^{-2\beta}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι: $-2 \cdot \beta = 1 \rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$ και $\alpha + \beta = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) τα α, β προκύπτει:

$$T = c \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot k^{-\frac{1}{2}} \rightarrow T = c \cdot \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow T = c \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Σχόλιο

Η παραπάνω μέθοδος ονομάζεται διαστατική ανάλυση και μας βοηθά να προβλέψουμε σχέσεις μεταξύ μεγεθών (χωρίς βέβαια τις όποιες σταθερές), αλλά και να καταλάβουμε αν μια δοσμένη σχέση μπορεί να είναι κατ' αρχήν σωστή, με κριτήριο να επιβεβαιώνεται και η σχέση μεταξύ των αντίστοιχων μονάδων μέτρησης. Για παράδειγμα η σχέση (με προφανείς συμβολισμούς)

$\Delta x = v \cdot \Delta t^2$ δεν μπορεί να είναι σωστή, διότι για το Δx προκύπτει μονάδα μέτρησης $m \cdot s \dots$

Παπάζογλου Αποστόλης

apostolospapazoglou@gmail.com