

1.- (prueba extraordinaria) Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(1+x) - \sin x}{x \sin(x)}$

Resolución

Vamos a hallar el límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(1+x) - \sin x}{x \sin x} = \frac{\ln \ln(1+0) - \sin 0}{0 \sin 0} = \frac{0}{0}$  Indeterminación

Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln \ln(1+x) - \sin x]'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - x}{\sin x + x \cos x} = \frac{\frac{1}{1+0} - 0}{\sin 0 + 0 \cos 0} = \frac{0}{0} \text{ Indetermin.}$$

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{1+x} - x\right)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \sin x}{\cos x + (\cos x - x \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{\frac{-1}{(1+0)^2} + \sin 0}{2 \cos 0 - 0 \sin 0} = \frac{-1}{2}$$

Por la regla de L'Hôpital,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(1+x) - \sin x}{x \sin x} = \frac{-1}{2}$

2.- (prueba extraordinaria) Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = e^{x/3}$

(a) ¿En qué punto de la gráfica de  $f$  la recta tangente a esta pasa por el origen de coordenadas?

Halla la ecuación de dicha recta tangente.

Resolución

Sea  $P(a, e^{a/3})$  el punto al que se hace referencia. La ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto

$P$  es  $rtg: y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ;  $f'(x) = \frac{e^{x/3}}{3}$ ;  $f'(a) = \frac{e^{a/3}}{3}$ ;  $f(a) = e^{a/3}$ ;  $rtg: y = \frac{e^{a/3}}{3}(x - a) + e^{a/3}$

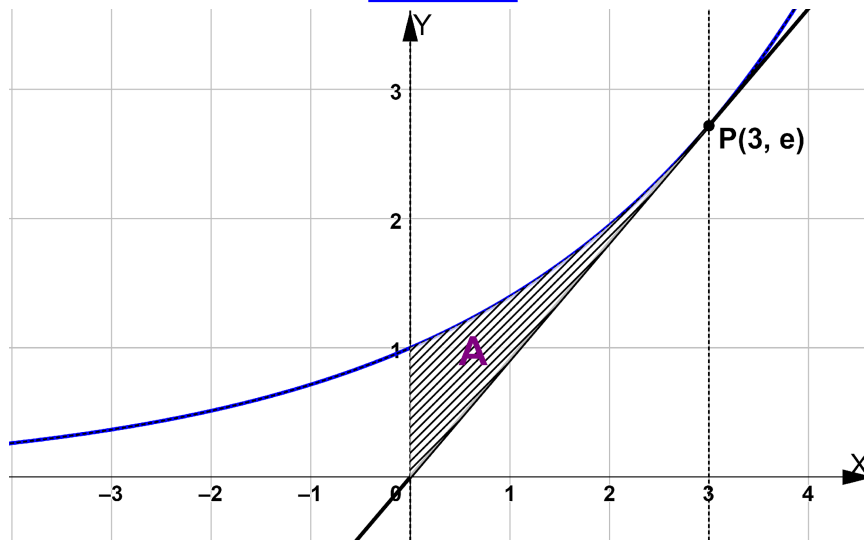
Como la recta tangente pasa por el origen de coordenadas,  $(0, 0)$ , entonces  $0 = \frac{e^{a/3}}{3}(0 - a) + e^{a/3}$

Luego,  $\frac{a \cdot e^{a/3}}{3} = e^{a/3} \Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3$ ; El punto que se pide es  $P(3, e^{3/3}) \Rightarrow P(3, e)$

La ecuación de la recta tangente es  $rtg: y = \frac{e^{3/3}}{3}(x - 3) + e^{3/3} \Rightarrow rtg: y = \frac{e}{3}(x - 3) + e \Rightarrow rtg: y = \frac{ex}{3}$

(b) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de  $f$ , la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

Resolución



El área que se pide es  $A = \int_0^3 (e^{x/3} - \frac{ex}{3}) dx$ . Una primitiva es  $p(x) = 3e^{x/3} - \frac{e}{3} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{18e^{x/3} - ex^2}{6}$ .

Por la regla de Barrow,

$$A = p(3) - p(0) = \frac{18e^{3/3} - e3^2}{6} - \frac{18e^{0/3} - e0^2}{6} = \frac{9e - 18}{6} = \frac{3e - 6}{2} \cong 1,078 u^2$$

**3.- (prueba extraordinaria)** Sea  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = (x - 1) \ln x$ . Calcula la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(1, -3/2)$ .

### Resolución

Una primitiva  $F$  de la función  $f$  es  $F(x) = \int (x - 1) \ln x dx$ . Usamos el método de integración por partes:

$$\left[ x \cdot \frac{1}{x} dx \quad dv = (x - 1) dx \quad v = \frac{(x-1)^2}{2} \right] \Rightarrow F(x) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{(x-1)^2}{x} dx \quad I_1$$

Dado que  $\frac{(x-1)^2}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = x - 2 + \frac{1}{x}$ ;  $I_1 = \int (x - 2) dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{(x-2)^2}{2} + \ln x$

$$\text{Luego, } F(x) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(x-2)^2}{2} + \ln x \right] + k = \frac{(x-1)^2 \ln x}{2} - \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x + k$$

$$F(x) = \frac{2(x-1)^2 \ln x - (x-2)^2 - 2 \ln x}{4} + k. \text{ Como la primitiva pasa por } (1, -3/2) \text{ entonces } F(1) = \frac{-3}{2}$$

$$\frac{2(1-1)^2 \ln 1 - (1-2)^2 - 2 \ln 1}{4} + k = \frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{-1}{4} + k = \frac{-3}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{-5}{4}.$$

$$\text{Luego, la primitiva que se busca es } F(x) = \frac{2(x-1)^2 \ln x - (x-2)^2 - 2 \ln x - 5}{4} = \frac{(2x^2 - 4x) \ln x - x^2 + 4x - 9}{4}$$

**4.- (prueba extraordinaria)** Estudia la derivabilidad de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-|x|}, & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq -1 \\ 0, & \text{si } x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

### Resolución

Como  $|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  entonces

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{x}{1-x}, & \text{si } x \geq 0, x \neq 1 \\ 0, & \text{si } x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

Si  $x \neq 0; 1; -1$ ,  $f$  es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2}, & \text{si } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2}, & \text{si } x > 0, x \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & \text{si } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{1}{(1-x)^2}, & \text{si } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Estudiemos el caso  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0}{1+0} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{1-0} = 0 = f(0). \text{ Luego, } f \text{ es continua en } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{1}{(1+0)^2} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1. \text{ Luego, } f \text{ es derivable en } x = 0$$

Estudiemos el caso  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} = -\infty; \quad f(1) = 0$$

$f$  NO es continua en  $x = 1$

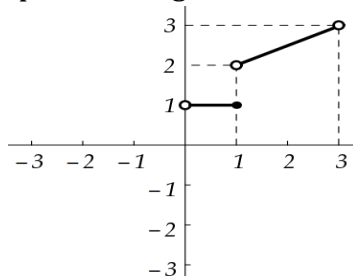
En consecuencia, tampoco es derivable en  $x = 1$

Estudiamos el caso  $x = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty; \quad f(1) = 0 \Rightarrow f \text{ NO es continua en } x = -1$$

En consecuencia, tampoco es derivable en  $x = -1$

5.- En la figura adjunta puedes ver representada parte de la gráfica de una función  $f$  que está definida en el intervalo  $(-3, 3)$  y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.



(a) Razona cual debe ser el valor de  $f(0)$ .

#### Resolución

$f$  está definida en  $(-3, 3)$  y, por tanto, en  $x = 0$ . Al ser simétrica respecto al origen de coordenadas se cumple que  $f(-x) = -f(x)$ . Para  $x = 0$ ,  $f(0) = -f(0)$ . Trasponiendo,  $2f(0) = 0$ . Luego,  $f(0) = 0$

(b) Completa la gráfica de  $f$ .

(c) Halla  $f'(x)$  para los  $x \in (-3, 3)$  en los que dicha derivada exista.

#### Resolución

Aunque la gráfica se puede completar usando la simetría respecto del origen vamos a hallar la expresión analítica.

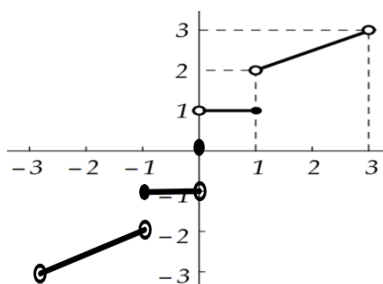
Para  $0 < x \leq 1$ ,  $f(x) = 1$ ; Para  $1 < x < 3$ ,

$$\frac{f(x)-2}{x-1} = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-1) + 2 = \frac{x-1+4}{2} = \frac{x+3}{2}$$

En el intervalo  $[0, 3)$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x+3}{2}, & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$

Al ser simétrica respecto al origen,  $f(-x) = -f(x)$ . Luego, en  $(-3, 3)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x+3}{2}, & \text{si } -3 < x < -1 \\ -1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x+3}{2}, & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$$



Si  $x \neq 0; 1; -1$ ,  $f$  es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo  $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{si } -3 < x < -1 \\ 0, & \text{si } -1 < x < 1, x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$

Estudiamos el caso  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ;  $f(0) = 0 \Rightarrow f$  NO es continua en  $x = 0$

En consecuencia, tampoco es derivable en  $x = 0$

Estudiamos el caso  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1+3}{2} = 2 \Rightarrow f$  NO es continua en  $x = 1$

1

En consecuencia, tampoco es derivable en  $x = 1$

$$x = -1: \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1+3}{2} = 1; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 = f(-1) \Rightarrow \text{NO es continua en } x = -1$$

En consecuencia, tampoco es derivable en  $x = -1$

6.- Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tiene máximo absoluto en el punto de abscisa  $x = 1$ , que su gráfica pasa por el punto  $(1, 4)$  y que  $\int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{32}{2}$ . Halla  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

### Resolución

$f$  es derivable y  $f'(x) = 2ax + b$ . Al ser una función cuadrática definida en  $\mathbb{R}$ , el máximo absoluto en  $x = 1$  es también relativo:  $f'(1) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow b = -2a$  y  $f(x) = ax^2 - 2ax + c$

Como la gráfica pasa por el punto  $(1, 4)$ , entonces  $f(1) = 4 \Rightarrow a \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 + c = 4 \Rightarrow c = 4 + a$ .

Luego,  $f(x) = ax^2 - 2ax + 4 + a$ .

Por otra parte,  $\int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{32}{2}$ ;  $\int f(x) dx = \int (ax^2 - 2ax + 4 + a) dx$ .

$$\int f(x) dx = \frac{ax^3}{3} - ax^2 + 4x + ax + k = \frac{ax^3 - 3ax^2 + 12x + 3ax}{3} + k.$$

Una primitiva es  $F(x) = \frac{ax^3 - 3ax^2 + 12x + 3ax}{3}$ .

Por la regla de Barrow,  $\frac{32}{2} = F(3) - F(-1) = \frac{a \cdot 3^3 - 3a \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 3a \cdot 3}{3} - \frac{a(-1)^3 - 3a(-1)^2 + 12(-1) + 3a(-1)}{3}$

Luego,  $\frac{16a + 48}{3} = \frac{32}{2} \Rightarrow 32a + 96 = 96 \Rightarrow a = 0$ .

Conclusión:  $a = 0$ ,  $b = 0$  y  $c = 4$ ;  $f(x) = 4$

7.- Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  es tal que  $f(0) = 4$  y que su gráfica tiene un punto de inflexión en  $(1, 2)$ . Conociendo además que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$  es horizontal, calcula  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

### Resolución

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; f''(x) = 6ax + 2b.$$

- Como  $f(0) = 4$  entonces,  $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 4 \Rightarrow d = 4$ . Nos queda  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$

- Como la gráfica tiene un punto de inflexión en  $(1, 2)$ , entonces  $\Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 1 + 2b = 0 \Rightarrow b = -3a$

$$\text{Queda } f(x) = ax^3 - 3ax^2 + cx + 4$$

Como además pasa por  $(1, 2)$ ,  $f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^3 - 3a \cdot 1^2 + c \cdot 1 + 4 = 2 \Rightarrow c = 2a - 2$ .

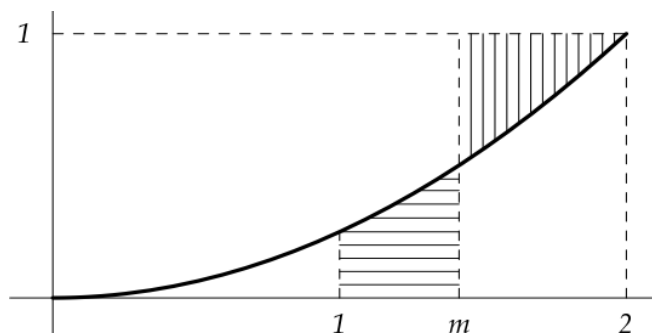
$$\text{Queda } f(x) = ax^3 - 3ax^2 + (2a - 2)x + 4.$$

- Como la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$  es horizontal, entonces  $f'(0) = 0$ .

Al ser  $f'(x) = 3ax^2 - 6ax + 2a - 2$ , entonces  $3a \cdot 0^2 - 6a \cdot 0 + 2a - 2 = 2a - 2 = 0$ . De donde,  $a = 1$

Conclusión:  $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $c = 0$ ,  $d = 4$ ;  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ .

8.- En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo  $[0, 2]$  la gráfica de la parábola de ecuación  $y = \frac{x^2}{4}$ . Halla el valor de  $m$  para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



### Resolución

Como las áreas son iguales,  $\int_1^m \frac{x^2}{4} dx = \int_m^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \int_m^2 dx - \int_m^2 \frac{x^2}{4} dx$ .

Trasponiendo términos,  $\int_1^m \frac{x^2}{4} dx + \int_m^2 \frac{x^2}{4} dx = \int_m^2 dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{x^2}{4} dx = \int_m^2 dx$

Halleamos  $\int_1^2 \frac{x^2}{4} dx$ . Una primitiva es  $p(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{12}$ .

Por la regla de Barrow,  $\int_1^2 \frac{x^2}{4} dx = p(2) - p(1) = \frac{2^3}{12} - \frac{1^3}{12} = \frac{7}{12}$

Halleamos  $\int_m^2 dx$ . Una primitiva es  $p(x) = x$ . Por la regla de Barrow,  $\int_m^2 dx = p(2) - p(m) = 2 - m$

Sustituyendo,  $\frac{7}{12} = 2 - m \Rightarrow m = 2 - \frac{7}{12} = \frac{17}{12}$

9.- Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  tiene un punto de derivada nula en  $x = 1$  que no es extremo relativo y que  $f(1) = 1$ . Calcula  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

### Resolución

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c ; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b ; f''(x) = 6x + 2a.$$

Al ser  $f'(1) = 0$  entonces,  $3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$ . Como no es extremo relativo, entonces  $f''(1) = 0$ . Luego,  $6 \cdot 1 + 2a = 0$ ,  $a = -3$ . De donde,  $2 \cdot (-3) + b = -3$ ,  $b = 3$ .

Nos queda  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + c$ . Como  $f(1) = 1 \Rightarrow 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + c = 1 \Rightarrow c = 0$ .

Conclusión:  $a = -3$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0$  y  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .

10.- Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ .

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 3$ .

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función  $f$  en un punto  $A(x_0, f(x_0))$  es  $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

En este caso,  $x_0 = 3$ ;  $f'(x) = 2x - 2$ ,  $f'(x_0) = f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$ ;

$f(x_0) = f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 5$ .

La ecuación de la recta tangente es  $rtg: y = 4(x - 3) + 5$ ;  $rtg: y = 4x - 7$

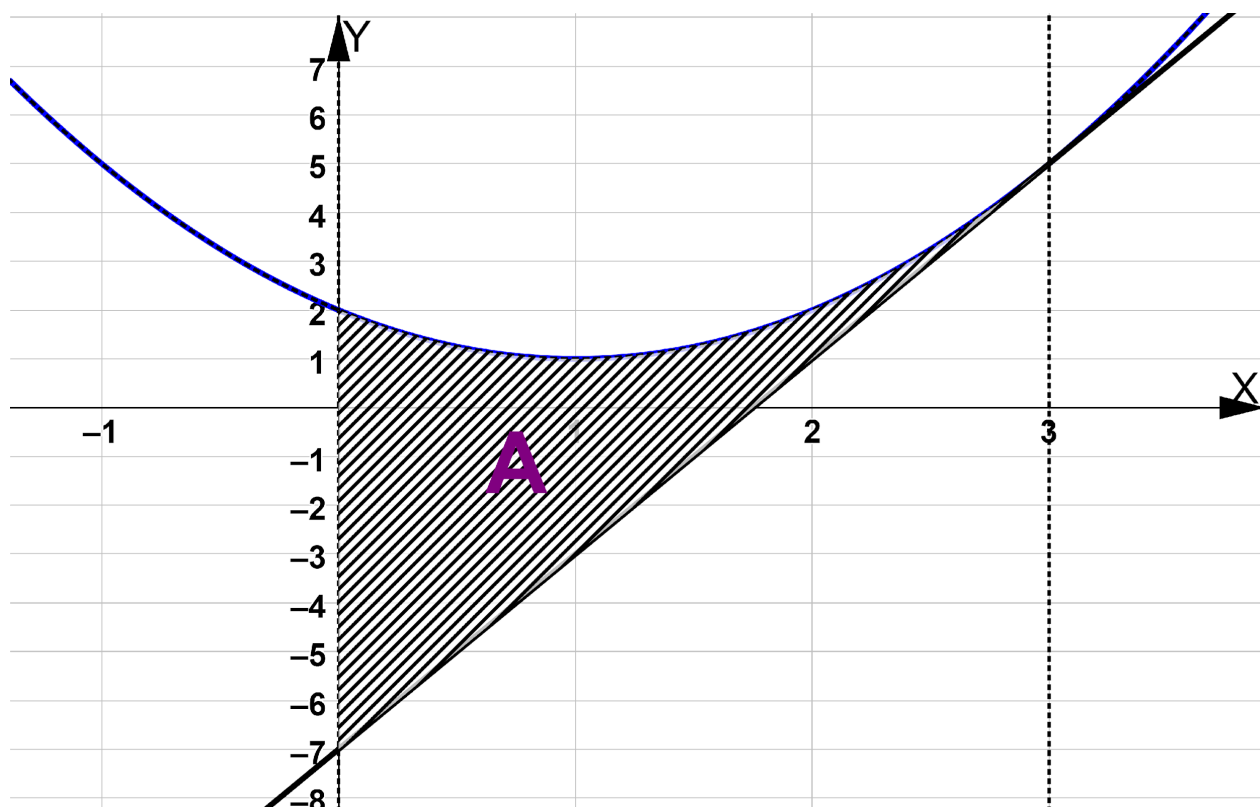
(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta tangente obtenida y el eje OY.

Resolución

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = 4x - 7 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 4x - 7 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \cdot 3 - 7 \end{cases} \text{ . Punto } (3, 5)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}, \text{ imposible ; } f(0) = 2. \text{ Corte con OY: } (0, 2)$$



$$A = \int_0^3 [x^2 - 2x + 2 - (4x - 7)] dx = \int_0^3 (x - 3)^2 dx. \text{ Una primitiva es } p(x) = \frac{(x-3)^3}{3}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A = p(3) - p(0) = \frac{(3-3)^3}{3} - \frac{(0-3)^3}{3} = 9 u^2$$

11.- Se sabe que la función  $f: (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en todo punto de su dominio,

siendo  $f'(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -x + 3, & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$ , y que  $f(1) = 0$ . Halla la expresión analítica de  $f$ .

Resolución

$$f(x) = \int f'(x) dx = \left\{ \int (x-1)dx, \text{ si } 0 < x \leq 2 \int (-x+3)dx, \text{ si } 2 < x < 3 \right\} = \left\{ \frac{x^2}{2} - x + a, \text{ si } 0 < x \leq 2 \frac{-x^2}{2} + 3x + b, \text{ si } 2 < x < 3 \right\}$$

Como  $f(1) = 0 \Rightarrow \frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 2a}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2a-1}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ .

Por ser continua en  $x = 2$ :  $f(x) = f(x) \Rightarrow \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{-2^2 + 6 \cdot 2 + 2b}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = b + 4 \Rightarrow b = \frac{-7}{2}$

Por tanto,  $f(x) = \left\{ \frac{x^2 - 2x + 1}{2}, \text{ si } 0 < x \leq 2 \frac{-x^2 + 6x - 7}{2}, \text{ si } 2 < x < 3 \right\}$

12.- Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función continua definida por  $f(x) = \begin{cases} |2-x|, & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7, & \text{si } x \geq a \end{cases}$ , donde  $a$  es un número real.

(a) Determina  $a$ .

Resolución

Para  $x \neq a$   $f$  es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas

Como es continua en  $x = a$ :  $f(x) = f(x) \Rightarrow |2-a| = a^2 - 5a + 7$

$a^2 - 5a + 7 = 2 - a \Leftrightarrow a^2 - 4a + 9 = 0 \Leftrightarrow (a-3)^2 = 0$ ;  $a = \frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ , imposible ó  $a = 3$

Conclusión: debe ser  $a = 3$

(b) Halla la función derivada de  $f$ .

Resolución

$f(x) = \begin{cases} |2-x|, & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 5x + 7, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  y como  $|2-x| = \begin{cases} 2-x, & \text{si } x < 2 \\ x-2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ ,

entonces  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{si } x < 2 \\ x-2, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 5x + 7, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

$f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y derivable en  $\mathbb{R} - \{2, 3\}$  siendo

$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 2 \\ 1, & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5, & \text{si } x > 3 \end{cases}$ .

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 1$ . Luego,  $f$  NO es derivable en  $x = 2$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ . Luego,  $f$  es derivable en  $x = 3$

Conclusión:  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y derivable en  $\mathbb{R} - \{2\}$  siendo

$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 2 \\ 1, & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ .

13.- (prueba ordinaria) Sea  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \ln(1-x^2)$ . Calcula la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(0, 1)$ .

Resolución

Una primitiva  $F$  de la función  $f$  es  $F(x) = \int \ln(1-x^2) dx$ . Usamos el método de integración por partes:

$$\left[ u = \ln(1-x^2) \quad \frac{-2x}{1-x^2} dx \quad dv = dx \quad v = x \right] \Rightarrow F(x) = x \ln(1-x^2) - \int \frac{2x^2}{x^2-1} dx$$

Hallando la forma mixta,  $\frac{2x^2}{x^2-1} = 2 + \frac{2}{x^2-1}$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:  $\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

Multiplicando los dos miembros por  $(x + 1)(x - 1)$ , tenemos  $2 = A(x - 1) + B(x + 1)$

- Para  $x = 1$ , sustituyendo,  $2 = 2B$ , de donde  $B = 1$ ; para  $x = -1$ , sustituyendo,  $-2 = -2A$ , de donde  $A = 1$

$$I_1 = \int \left( 2 + \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x-1} \right) dx = 2x + \ln |x+1| - \ln |x-1| + k_1$$

$$F(x) = x \ln(1 - x^2) - 2x - \ln |x+1| - \ln |x-1| + k$$

Como la gráfica de la primitiva pasa por  $(0, 1)$ ,

$$F(0) = 1 \Rightarrow 0 \ln 1 - 2 \cdot 0 - \ln 1 - \ln 1 + k = 0 \Rightarrow k = 0$$

Luego, la primitiva que se busca es  $F(x) = x \ln(1 - x^2) - 2x - \ln |x+1| - \ln |x-1|$

**14.- (prueba ordinaria)** Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  tiene un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 0$  y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de

abscisa  $x = -1$ . Conociendo además que  $\int_0^1 f(x) dx = 6$ , halla  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

### Resolución

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c ; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b ; f''(x) = 6x + 2a.$$

En  $x = 0$  tiene un extremo relativo  $\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$ .

En  $x = -1$  tiene un punto de inflexión  $\Rightarrow f''(-1) = 0 \Rightarrow 6(-1) + 2a = 0 \Rightarrow a = 3$ .

Nos queda la función  $f(x) = x^3 + 3x^2 + c$

Hallems  $\int_0^1 f(x) dx$ . Una primitiva es  $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 + cx = \frac{x^4 + 4x^3 + 4cx}{4}$ .

Por la regla de Barrow,

$$6 = \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \frac{1^4 + 4 \cdot 1^3 + 4c \cdot 1}{4} - \frac{0^4 + 4 \cdot 0^3 + 4c \cdot 0}{4} = \frac{4c + 5}{4}$$

Despejando,  $4c + 5 = 24$ ,  $c = \frac{19}{4}$ . Luego,  $a = 3$ ,  $b = 0$ ,  $c = \frac{19}{4}$  y  $f(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{19}{4}$

**15.- (prueba ordinaria)** Dada la parábola  $y = 1 + x^2$  y la recta de ecuación  $y = 1 + x$ , se pide:

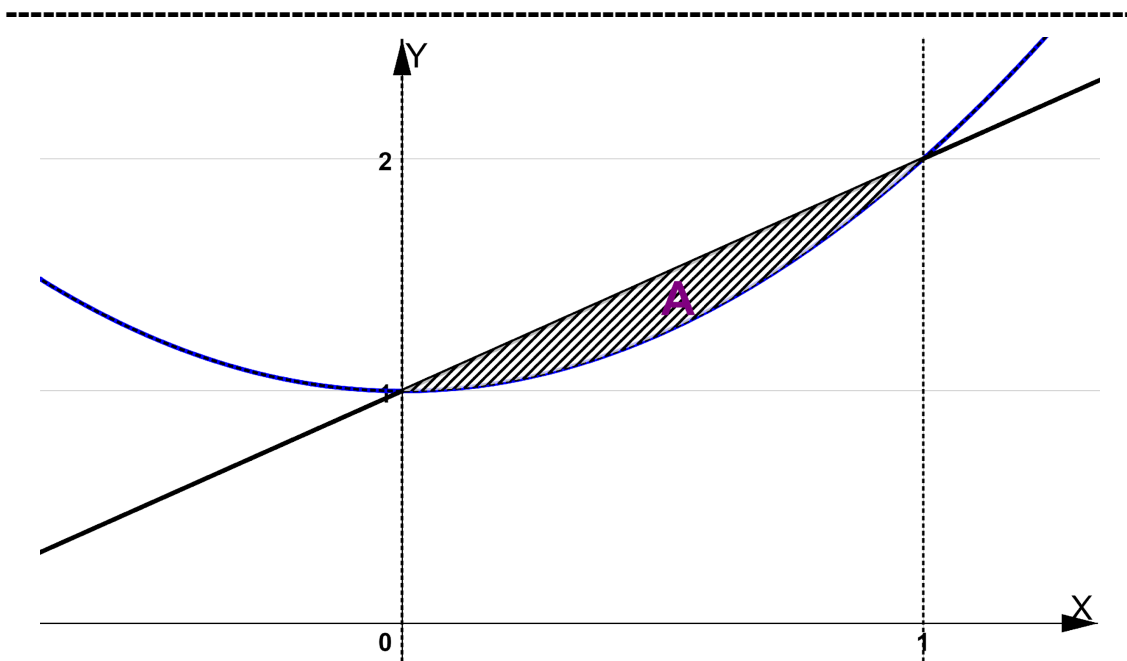
(a) Área de la región limitada por la recta y la parábola.

### Resolución

Puntos de corte de la recta y la parábola:  $\{y = 1 + x^2, y = 1 + x\}$ .

Iguando,  $1 + x^2 = 1 + x$ ;  $x^2 - x = x(x - 1) = 0$ ;  $x = 0$ ,  $y = 1$ , punto  $(0, 1)$ ;  $x = 1$ ,  $y = 2$ , punto  $(1, 2)$

Como  $(1 + x^2)' = 2x = 0$  si  $x = 0$ ,  $y = 1 + 0^2 = 1$  se trata de una parábola convexa de vértice  $(0, 1)$ .



El área que se pide es  $A = \int_0^1 [1 + x - (1 + x^2)] dx = \int_0^1 (x - x^2) dx$ .

Una primitiva es  $p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{3x^2 - 2x^3}{6}$ .

Por la regla de Barrow,  $A = p(1) - p(0) = \frac{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3}{6} - \frac{3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3}{6} = \frac{1}{6} u^2$ .

(b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.

#### Resolución

Busquemos el punto  $P(x, y)$  de la parábola  $y = f(x) = 1 + x^2$  donde la recta tangente es paralela a la recta  $y = 1 + x$ .

Como la pendiente de la recta dada es 1, la pendiente de la recta tangente también es 1.

Luego,  $f'(x) = 2x = 1$ . De donde,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente que se busca es

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{5}{4} = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = x + \frac{3}{4}$$

**16.- (prueba ordinaria)** Considera la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = (x + 3) \cdot e^{-x}$ .

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

#### Resolución

Como  $f$  es continua (y derivable) en  $\mathbb{R}$ , no hay asíntotas verticales.

$f(x) = \frac{x+3}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$  Indeterminación. Aunque la indeterminación se puede resolver

aplicando la regla de L'Hôpital, podemos deducir que el límite es 0 porque cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ ,  $e^x$  es un infinito de orden superior al de  $x + 3$ .

Luego, la A.H. en  $+\infty$  es A.H.:  $y = 0$  (eje X);  $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x+3}{e^x} - 0 = \frac{x+3}{e^x}$ .

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$ . Luego, la gráfica está "por encima" de la asíntota en  $+\infty$

$f(x) = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$ . No hay AH en  $-\infty$ .

Veamos si tiene asíntota oblicua en  $-\infty$ , AO:  $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(-x+3)e^x}{-x} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ Indeterminación.}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(-x+3)e^x]'}{(-x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x + (3-x)e^x}{-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)e^x = +\infty$

Por tanto, por la regla de L'Hôpital,  $\frac{f(x)}{x} = +\infty$ . No hay asíntota oblicua en  $-\infty$ .

(b) Determina los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

### Resolución

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+3)e^{-x}(-1) = e^{-x}(-x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f''(x) = -1 \cdot e^{-x} + (-x-2)e^{-x}(-1) = e^{-x}(x+1); \quad f''(-2) = e^2(-1) < 0$$

Luego, en  $x = -2$  hay un máximo relativo,  $y = f(-2) = (-2+3)e^2 = e^2 \cong 7,3$ . Máximo  $M(-2, e^2)$

$$f''(x) = e^{-x}(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

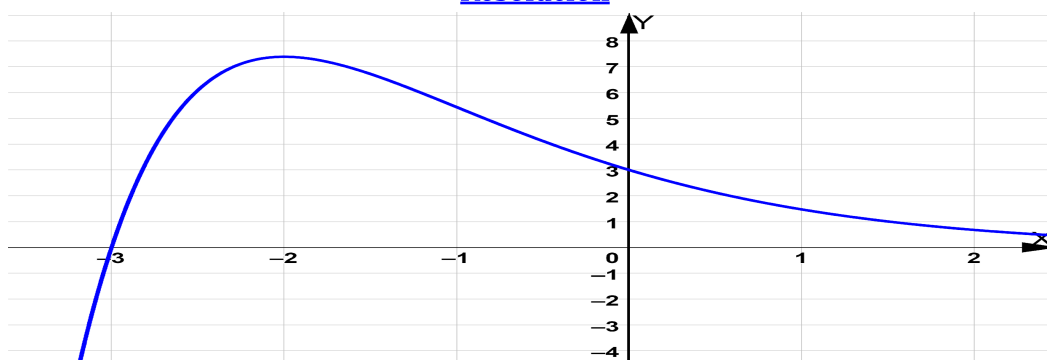
Hagamos una tabla de signos de  $f''(x)$ :

|          |                 |                    |                 |
|----------|-----------------|--------------------|-----------------|
|          | $(-\infty, -1)$ | $-1$               | $(-1, +\infty)$ |
| $f''(x)$ | -               | 0                  | +               |
| $f(x)$   | cóncava         | Punto de inflexión | convexa         |

Luego, en  $x = -1$  hay un punto de inflexión,  $y = f(-1) = (-1+3)e = 2e \cong 5,4$ . Punto  $I(-1, 2e)$

(c) Esboza la gráfica de f.

### Resolución



17.- Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(a) Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en  $x = 1$ .

### Resolución

Para  $x \neq 1$ , f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$f(x) = 1^2 + 3 = 4 = f(1); \quad f'(x) = 2 - 1^2 = 1. \text{ Luego, f no es continua en } x = 1$$

$$\text{Si } x < 1, f'(x) = (x^2 + 3)' = 2x; \quad \text{Si } x > 1, f'(x) = (2 - x^2)' = -2x$$

$$\text{Derivadas laterales: } f'(1^-) = f'(x) = 2 \cdot 1 = 2; \quad f'(1^+) = f'(x) = -2 \cdot 1 = -2$$

(b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.

### Resolución

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0, x < 1 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad -2x = 0, x > 1, \text{ imposible.}$$

Hagamos una tabla de signos de  $f'(x)$ :

|         |                |   |           |   |                |
|---------|----------------|---|-----------|---|----------------|
|         | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, 1)$  | 1 | $(1, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | -              | 0 | +         | - | -              |
| $f(x)$  | decreciente    |   | creciente |   | decreciente    |

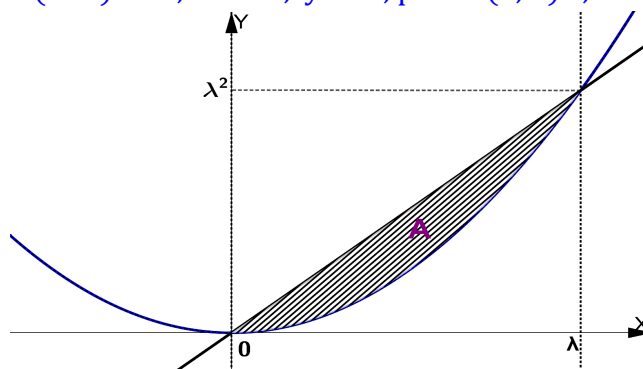
$f$  es decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  y creciente en  $(0, 1)$

18.- Determina el valor positivo de  $\lambda$  para el que el área del recinto limitado por la parábola  $y = x^2$  y la recta  $y = \lambda x$  es 1.

**Resolución**

Puntos de corte de la recta y la parábola:  $\{y = x^2, y = \lambda x\}$ .

Iguando,  $x^2 = \lambda x$ ;  $x^2 - \lambda x = x(x - \lambda) = 0$ ;  $x = 0$ ,  $y = 0$ , punto  $(0, 0)$ ;  $x = \lambda$ ,  $y = \lambda^2$ , punto  $(\lambda, \lambda^2)$



El área es  $A = 1 = \int_0^{\lambda} (\lambda x - x^2) dx$ . Una primitiva es  $p(x) = \frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{3\lambda x^2 - 2x^3}{6}$ .

Por la regla de Barrow,  $1 = A = p(\lambda) - p(0) = \frac{3\lambda^2 - 2\lambda^3}{6} - \frac{3\lambda \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3}{6} = \frac{\lambda^3}{6}$ . Luego,  $\lambda^3 = 6 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{6}$

19.- Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(a) Calcula la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

**Resolución**

La ecuación de la recta tangente en un punto  $A(x_0, f(x_0))$  es  $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

En este caso,  $x_0 = 1$ ;  $f'(x) = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ ,  $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{3}1^{-2/3} = \frac{1}{3}$ ;  $f(x_0) = f(1) = \sqrt[3]{1} = 1$ .

La ecuación de la recta tangente es  $rtg: y = \frac{1}{3}(x - 1) + 1$ ;  $rtg: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ;  $rtg: y = \frac{x+2}{3}$

(b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$  y la recta tangente obtenida.

(c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

**Resolución**

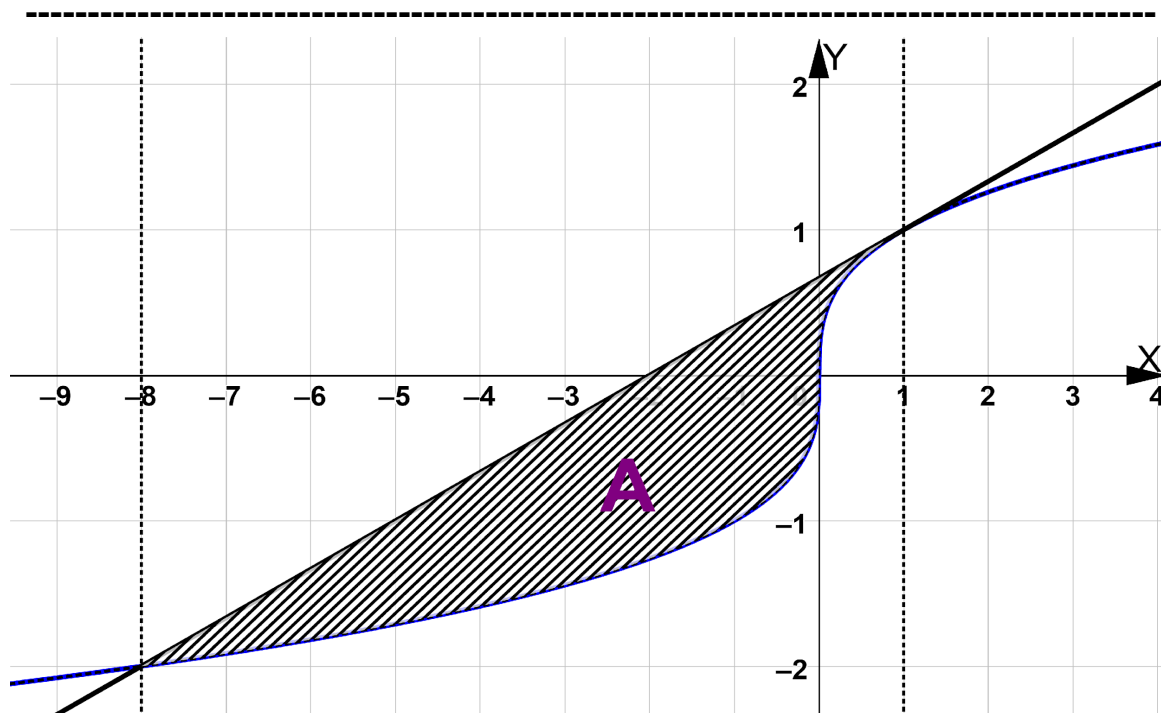
Puntos de corte de la gráfica de  $f$  y la recta tangente:  $\{y = \sqrt[3]{x}, y = \frac{x+2}{3}\}$ .

Iguando,  $\sqrt[3]{x} = \frac{x+2}{3}$ ; elevando al cubo,  $x = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{27}$ ;  $x^3 + 6x^2 - 15x + 8 = 0$

Usamos la regla de Ruffini:  $1 \ 6 \ -15 \ 8 \ 1 \ \downarrow \ 1 \ 7 \ -8 \ 17 \ -8 \ 0$ ;  $(x-1)(x^2 + 7x - 8) = 0$

Resolviendo:  $x = 1$ ;  $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 9}{2}$ ,

$x = 1$ ,  $y = \sqrt[3]{1}$  punto  $(1, 1)$ ;  $x = -8$ ,  $y = \sqrt[3]{-8} = -2$  punto  $(-8, -2)$



El área que se pide es  $A = \int_{-8}^1 \left( \frac{x+2}{3} - \sqrt[3]{x} \right) dx = \int_{-8}^1 \left( \frac{x+2}{3} - x^{1/3} \right) dx$ .

Una primitiva es  $p(x) = \frac{1}{3} \frac{(x+2)^2}{2} - \frac{x^{4/3}}{4/3} = \frac{(x+2)^2}{6} - \frac{3x^{4/3}}{4} = \frac{2(x+2)^2 - 9x^{4/3}}{12}$ .

Por la regla de Barrow,  $A = p(1) - p(-8) = \frac{2(1+2)^2 - 9 \cdot 1^{4/3}}{12} - \frac{2(-8+2)^2 - 9(-8)^{4/3}}{12} = \frac{9}{12} - \frac{72 - 9 \cdot 16}{12}$

$A = p(1) - p(-8) = \frac{9}{12} - \frac{72 - 144}{12} = \frac{9}{12} + \frac{72}{12} = 6,75 \text{ u}^2$

20.- Considera la función  $f$  definida para  $x \neq -2$  por  $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x + 2}$

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

(b) Estudia la posición relativa de la gráfica de  $f$  respecto de sus asíntotas.

### Resolución

Como  $x + 2 = 0$  si  $x = -2$ , para  $x = -2$  no es continua;  $f(x) = \frac{2(-2)^2 + 2}{-2 + 2} = \frac{10}{0} = \pm\infty$ .

Luego,  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = -2$  cuya ecuación es A.V.:  $x = -2$

Además,  $f(x) = \frac{10}{0^-} = -\infty$  y  $f(x) = \frac{10}{0^+} = +\infty$

Estudiemos las asíntotas en  $\pm\infty$ :

$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x) = \pm\infty$ . Luego,  $f$  tiene o no tiene asíntota horizontal en  $\pm\infty$ .

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO:  $y = mx + n$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x^2 + 2}{x + 2}}{x} = \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 2x} = \frac{2}{1} = 2$ .

$[f(x) - mx] = \left( \frac{2x^2 + 2}{x + 2} - 2x \right) \frac{2x^2 + 2 - 2x^2 - 4x}{x + 2} = \frac{2 - 4x}{x + 2} = -4$ .

Luego, la asíntota oblicua en  $\pm\infty$  es la recta de ecuación AO:  $y = 2x - 4$

Estudiamos la posición de la gráfica respecto de la asíntota:

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{2x^2 + 2}{x + 2} - (2x - 4) = \frac{2x^2 + 2 - 2x^2 + 8}{x + 2} = \frac{10}{x + 2}.$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$ . Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en  $+\infty$

Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} < 0$ . Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en  $-\infty$

21.- Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$ . Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función.

### Resolución

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 ; f''(x) = 12x.$$

Como  $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$  en  $x = 1$  hay un mínimo relativo ;  $y = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 4 = 0$  ; punto  $(1, 0)$

Como  $f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$  en  $x = -1$  hay un máximo relativo ,  $y = f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) + 4 = 8$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función  $f$  en un punto  $A(x_0, f(x_0))$  es

$$\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

En este caso,  $x_0 = -1$  ;  $f'(x_0) = f'(-1) = 0$  ;  $f(x_0) = f(-1) = 8$  ;

$$\text{rtg: } y = 0(x + 1) + 8 ; \text{rtg: } y = 8$$

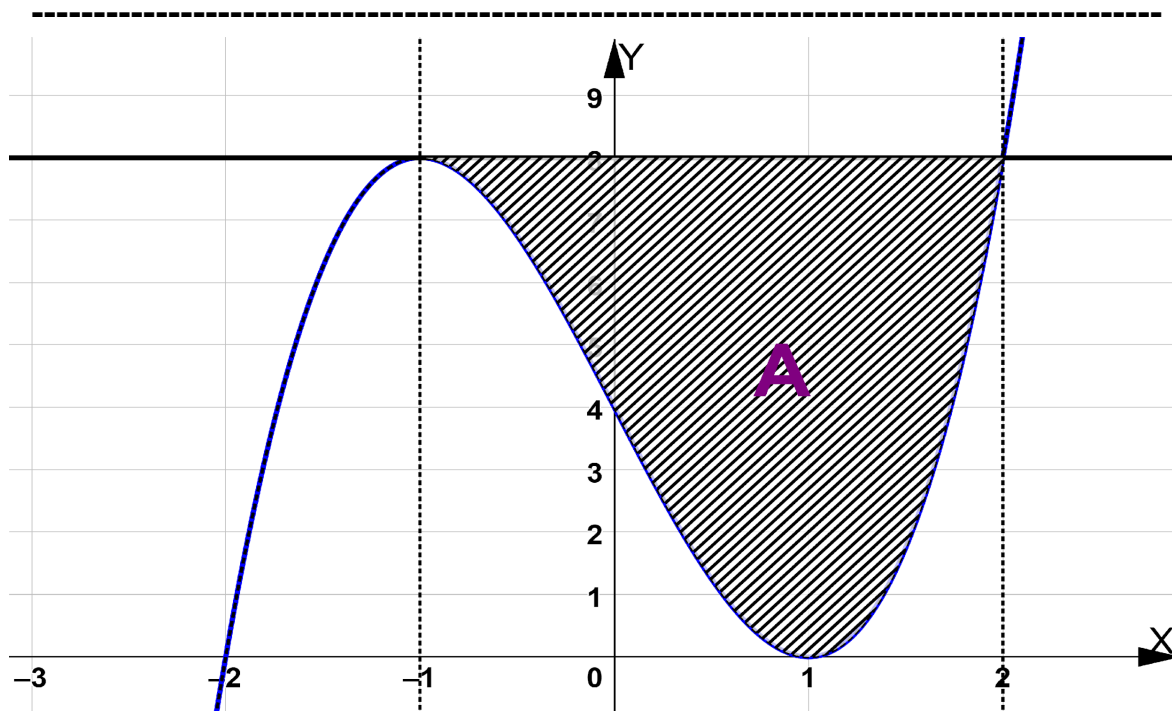
Puntos de corte de la gráfica de  $f$  y la recta tangente:  $\{y = 2x^3 - 6x + 4, y = 8\}$ .

Igualando,  $2x^3 - 6x + 4 = 8$  ;  $2x^3 - 6x - 4 = 0$ . Usamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} 2 & 2 & 0 & -6 & -4 & -1 & \downarrow & -2 & 2 & 4 & 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

$$(x + 1)(2x^2 - 2x - 4) = 0. \text{ Resolviendo: } x = -1 ; 2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}, x = 2, y = 8 \text{ punto } (2, 8) ; x = -1, y = 8 \text{ punto } (-1, 8)$$



El área que se pide es  $A = \int_{-1}^2 [8 - (2x^3 - 6x + 4)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^3 + 6x + 4) dx$ .

Una primitiva es  $p(x) = \frac{-2x^4}{4} + \frac{6x^2}{2} + 4x = \frac{-x^4}{2} + 3x^2 + 4x = \frac{6x^2 + 8x - x^4}{2}$ . Por la regla de Barrow,

$$A = p(2) - p(-1) = \frac{6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 2^4}{2} - \frac{6(-1)^2 + 8(-1) - (-1)^4}{2} = \frac{24}{2} - \frac{-3}{2} = \frac{27}{2} = 13,5 \text{ u}^2.$$

22.- Dada la función  $f$  definida para  $x \neq -1$  por  $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ , determina:

(a) Las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

### Resolución

Como  $(x+1)^2 = 0$  si  $x = -1$ , para  $x = -1$  no es continua;  $f(x) = \frac{(-1)^3}{(1-1)^2} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$ .

Luego,  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = -1$  cuya ecuación es A.V.:  $x = -1$

Además,  $f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$  y  $f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

Estudiemos las asíntotas en  $\pm\infty$ :

$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$ . Luego,  $f$  tiene no tiene asíntota horizontal en  $\pm\infty$ .

Veamos si tiene asíntota oblicua, A.O:  $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^3}{(1+x)^2}}{x} = \frac{x^2}{(1+x)^2} = 1.$$

$$[f(x) - mx] = \left( \frac{x^3}{(1+x)^2} - x \right) = \frac{x^3 - x - x^3 - 2x^2}{(1+x)^2} = \frac{-2x^2 - x}{(1+x)^2} = -2.$$

Luego, la asíntota oblicua en  $\pm\infty$  es la recta de ecuación A.O:  $y = x - 2$

Estudiamos la posición de la gráfica respecto de la asíntota:

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x^3}{(1+x)^2} - (x-2) = \frac{x^3 - (1+x^2+2x)(x-2)}{(1+x)^2} = \frac{x^3 - (x^3 - 3x - 2)}{(1+x)^2} = \frac{3x+2}{(1+x)^2}.$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$ . Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en  $+\infty$

Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} < 0$ . Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en  $-\infty$

(b) Los puntos de corte, si existen, de dicha gráfica con sus asíntotas.

### Resolución

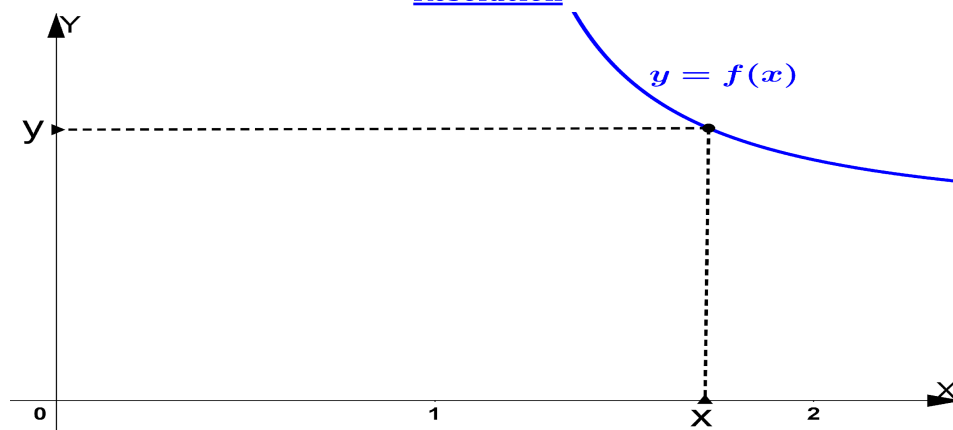
Lógicamente, no hay cortes con la asíntota vertical.

Puntos de corte de la gráfica de  $f$  y la asíntota oblicua:  $\{y = \frac{x^3}{(1+x)^2} \mid y = x - 2\}$ .

Igualando,  $\frac{x^3}{(1+x)^2} = x - 2$ ;  $x^3 = x^3 - 3x - 2$ ;  $x = \frac{-2}{3}$ ,  $y = \frac{-2}{3} - 2 = \frac{-8}{3}$ . Punto  $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-8}{3}\right)$

23.- De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva  $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$  con  $(x > 1)$ , uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.

### Resolución



Función a minimizar:  $A(x) = A(\text{rectángulo}) = xy = x \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{2x^3}{x^2-1}$

$$A'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 6x^2 = 2x^2(x^2 - 3) = 0. \text{ Como } x > 1 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

Para  $x < \sqrt{3}$ ,  $A'(x) < 0$  y para  $x > \sqrt{3}$ ,  $A'(x) > 0$ . Luego, para  $x = \sqrt{3}$   $A(x)$  alcanza el mínimo.

$$\text{Base del rectángulo: } x = \sqrt{3} \cong 1,73 \text{ u} \quad \text{Altura del rectángulo: } y = \frac{2(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 - 1} = 3 \text{ u}$$

$$\text{El área sería } A = 3\sqrt{3} \cong 5,2 \text{ u}^2$$

24.- Considera las funciones  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = 6 - x^2$  y  $g(x) = |x|$ .

(a) Dibuja el recinto acotado que está limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

(b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior

### Resolución

Puntos de corte de las gráficas:  $\{y = 6 - x^2 \mid y = |x|\}$ .

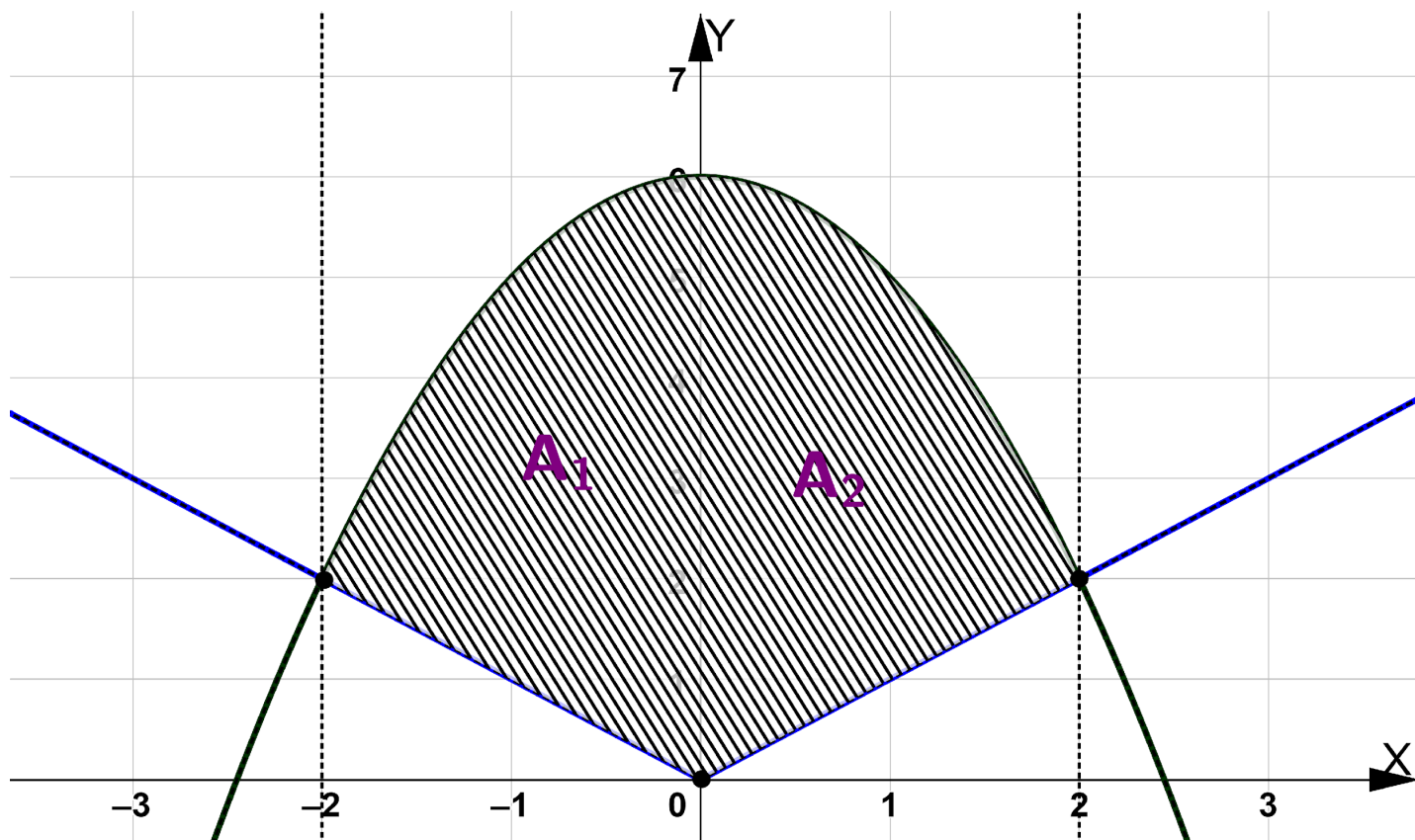
Igualando,

$$6 - x^2 = |x| ; \{ 6 - x^2 = x, x \geq 0 \quad 6 - x^2 = -x, x < 0 \Rightarrow \{ x^2 + x - 6 = 0, x \geq 0 \quad x^2 - x - 6 = 0, x < 0$$

$$x \geq 0, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 2, \quad y = |2| = 2 ; \text{ punto } (2, 2)$$

$$x < 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = -2, \quad y = |-2| = 2 ; \text{ punto } (-2, 2)$$

Teniendo en cuenta que además  $y = 6 - x^2$  es una parábola cóncava de vértice  $(0, 6)$  y que corta al eje X en los puntos de abscisa  $x = \pm \sqrt{6}$  se obtiene:



Debido a la simetría de las gráficas, el área que se pide es

$$A = 2 \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = 2 \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = 2 \int_0^2 (12 - 2x^2 - 2x) dx.$$

Una primitiva de la función del integrando es  $p(x) = 12x - \frac{2x^3}{3} - x^2 = \frac{36x - 2x^3 - 3x^2}{3}$ .

Por la regla de Barrow, el área es  $A = p(2) - p(0) = \frac{36 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2}{3} - \frac{36 \cdot 0 - 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2}{3} = \frac{44}{3} \cong 14,67 \text{ u}^2$