

Цель занятия:

Деятельностная:

- создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с тригонометрическими функциями произвольного угла.

Содержательная:

- актуализировать знания о тригонометрии: синус, косинус;
- расширить знания учеников за счет включения новых зависимостей, выраженных тригонометрическими формулами: Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму;
- познакомиться с задачами на преобразование тригонометрических выражений.

План занятия:

1. Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.
2. Преобразования простейших тригонометрических выражений

1. Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму

Синус

Преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

Ещё одним полезным следствием формул сложения (наряду с формулами двойного угла) служат формулы преобразования сумм тригонометрических функций в произведения и обратно – произведений в суммы.

Начнём с формул синуса суммы и разности:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (2)$$

Сложим формулы (1) и (2):

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta. \quad (3)$$

Отсюда:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

Мы получили формулу преобразования произведения синуса на косинус в сумму синусов

(эта сумма в реальности может оказаться разностью). Примеры:

$$\sin \frac{7\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{7\pi}{11} + \frac{3\pi}{11} \right) + \sin \left(\frac{7\pi}{11} - \frac{3\pi}{11} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{10\pi}{11} + \sin \frac{4\pi}{11} \right)$$

$$\sin 2x \cos 5x = \frac{1}{2} (\sin(2x + 5x) + \sin(2x - 5x)) = \frac{1}{2} (\sin 7x + \sin(-3x)) = \frac{1}{2} (\sin 7x - \sin 3x)$$

Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

Промежуточное равенство (3) приводит нас к ещё двум важным формулам. Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta, \\ y = \alpha - \beta. \end{cases} \quad (4)$$

Складывая и вычитая эти равенства, выразим из них α и β :

$$\begin{aligned}x + y = 2\alpha &\Rightarrow \alpha = \frac{x + y}{2}; \\x - y = 2\beta &\Rightarrow \beta = \frac{x - y}{2}.\end{aligned}$$

Подставляя всё это в (3), получим:

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.} \quad (5)$$

Это формула преобразования суммы синусов в произведение. Запоминаем словесную формулировку: сумма синусов есть два синус полусуммы на косинус полуразности.

Делая в (5) замену y на $-y$, придём к формуле преобразования разности синусов в произведение:

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}.$$

Словами: разность синусов есть два синус полуразности на косинус полусуммы.

Косинус

Теперь сделаем те же самые операции, но начнём с формул косинуса суммы и разности:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad (6)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (7)$$

Сложим формулы (6) и (7):

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta. \quad (8)$$

Отсюда:

$$\boxed{\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).}$$

Это формула преобразования произведения косинусов в сумму косинусов.

С помощью замены (4) приходим к формуле преобразования суммы косинусов в произведение косинусов:

$$\boxed{\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.$$

Словами: сумма косинусов есть два косинус полусуммы на косинус полуразности.

Теперь вычтем из равенства (7) равенство (6):

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta. \quad (9)$$

Отсюда:

$$\boxed{\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).}$$

Это формула преобразования произведения синусов в разность косинусов.

Делаем в равенстве (9) замену (4) и приходим к формуле преобразования разности косинусов в произведение синусов:

$$\cos y - \cos x = 2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

В целях единообразия записи поменяем местами x и y в последней формуле:

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}.$$

Словами: разность косинусов есть два синус полусуммы на синус обратной полуразности

2. Преобразования простейших тригонометрических выражений

Задачи

1. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 48^\circ + \sin 32^\circ$;

б) $\sin 71^\circ - \sin 13^\circ$;

в) $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5}$;

г) $\cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{9\pi}{7}$.

а) $2 \sin 40^\circ \cos 8^\circ$; б) $2 \sin 29^\circ \cos 42^\circ$; в) $2 \cos \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10}$; г) $2 \sin \frac{6\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}$

2. Упростите выражение:

а) $\sin 83^\circ - \sin 23^\circ$;

б) $\cos 35^\circ + \cos 25^\circ$;

в) $\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8}$;

г) $\cos \frac{4\pi}{15} - \cos \frac{2\pi}{5}$.

а) $\cos 53^\circ$; б) $\sqrt{3} \cos 5^\circ$; в) $\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}$; г) $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{15}$;

3. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 3\alpha - \sin 7\alpha$;

б) $\cos 4\alpha + \cos 10\alpha$;

в) $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) - \cos \alpha$;

г) $\sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) + \sin \alpha$.

а) $-2 \sin 2\alpha \cos 5\alpha$; б) $2 \cos 7\alpha \cos 3\alpha$; в) $-\sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right)$; г) $\cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right)$

4. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 10^\circ + \cos 70^\circ$;

б) $\cos 50^\circ - \sin 14^\circ$;

в) $\cos 40^\circ + \sin 40^\circ$;

г) $\sin 20^\circ - \cos 20^\circ$.

а) $2 \sin 15^\circ \cos 5^\circ$; б) $2 \sin 13^\circ \cos 27^\circ$; в) $\sqrt{2} \cos 5^\circ$; г) $-\sqrt{2} \sin 25^\circ$

5. Преобразуйте в сумму или разность:

а) $2 \sin 10^\circ \cos 5^\circ$;

б) $2 \sin 25^\circ \cos 55^\circ$;

в) $2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$;

г) $2 \sin \frac{7\pi}{18} \sin \frac{2\pi}{9}$.

а) $\sin 15^\circ + \sin 5^\circ$; б) $\sin 80^\circ - \frac{1}{2}$; в) $\cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \frac{11\pi}{18}$

6. Преобразуйте в сумму или разность:

а) $\sin 2\alpha \cos 5\alpha$;

б) $\cos \beta \cos 3\beta$;

в) $\sin 6\gamma \cos \gamma$;

г) $\sin 3\varphi \sin 11\varphi$.

а) $\frac{1}{2}(\sin 7\alpha - \sin 3\alpha)$; б) $\frac{1}{2}(\cos 4\beta + \cos 2\beta)$; в) $\frac{1}{2}(\sin 7\gamma + \sin 5\gamma)$; г) $\frac{1}{2}(\cos 8\varphi - \cos 14\varphi)$

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

- 1.1. Сформулируйте этапы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение для:
- суммы (разности) синусов;
 - суммы (разности) косинусов;
- 1.2. Сформулируйте этапы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Укажите в таблице соответствующий знак:

α	135°	216°	400°	460°
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\operatorname{tg} \alpha$				
$\operatorname{ctg} \alpha$				

2.2. Вычислите:

А) $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ =$

Б) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ =$

2.3. Представьте в виде произведения:

А) $\sin 40^\circ + \sin 16^\circ =$

Б) $\sin 2\alpha + \sin \alpha =$

Отчетность

Работы принимаются до 26 января 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 19.01.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 19.01.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGly>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.

