Chapitre XII : Composition de fonctions

Objectifs :

- Identifier la composée de deux fonctions dans une expression simple
- Calculer la dérivée des fonctions composées usuelles
- Calculer des primitives de fonctions de la forme $u'f(u)$ en fonction d'une primitive de f et de la fonction u

---

I. Composée de deux fonctions

Exemple : On considère la fonction h définie $f(x) = \sqrt{x - 3}$
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$ selon le schéma

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x - 3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$

Définition composée de fonctions
Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et I de $\mathbb{R}$ tels que pour tout réel $x \in I$, $u(x) \in J$. On note $v \circ u$ la fonction définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$ $v \circ u$ est appelée la fonction composée de u par v $\mathrm{I} \mapsto \mathrm{J} \mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto u(x) \mapsto v[u(x)]$ $x \longmapsto v \circ u(x)$

Exercice 1 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$, quelles sont les fonctions u et v telles que $f = v \circ u$?
$u(x) =$ ....
$v(x) =$ ....
La fonction f est la composée de...

Exercice 2 :

On considère les fonctions $u(x) = x^3$ et $v(x) = ln(x)$

a) Donner l'expression de la fonction $g = v \circ u$
....
b) Donner l'expression de la fonction $h = u \circ v$
....
c) Que constate-t-on ? ....

Exercice 3 :

On considère les fonctions $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$

d) Donner l'expression de la fonction $g = v \circ u$
....
e) Donner l'expression de la fonction $h = u \circ v$
....

II. Dérivée de la composée de fonctions

a) Dérivée des fonctions composées usuelles

Fonction	Dérivée
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

Exemple : Calcul la dérivée de la fonction $f(x) = e^{x^2+x}$

f est de la forme e^u avec $u(x) = x^2 + x$, on calcule $u'(x) = 2x + 1$, la dérivée est $(e^u)' = u'e^u$
donc $f'(x) = (2x + 1)e^{x^2+x}$

Exercice : Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1) $f(x) = (3x^2 + 6x - 7)^4$

2) $g(x) = ln(7x^5 - 9x)$

3) $h(x) = cos(\frac{1}{x})$

b) Cas général

Théorème de la dérivée d'une composée de fonctions
Soient u et v deux fonctions dérivables respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que $u(x) \in J$. Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ $(v(u(x)))' = u'(x) \times v'(u(x))$

Exemple : Calcul de la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = v(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice : Calculer la dérivée de la fonction $g(x) = \frac{1}{x^3-1}$

III. Primitive de la fonction $u'f(u)$

Théorème de la primitive de $u'f(u)$
Soient u et f deux fonctions telles que $f \circ u$ soit définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive de f alors $F(u)$ est une primitive de la fonction $u'f(u)$.

Primitives des fonctions usuelles :

Fonction	Une primitive
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$ où F est une primitive de f
$u'u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$

Exemple : Donner une primitive de la fonction $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$

f est de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = x^2 - 5x + 4$

Une primitive de $u'u^2$ est $\frac{1}{3}u^3$ donc $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

Exercice 1 : Donner une primitive des fonctions suivantes

a) $g(x) = xe^{x^2}$

b) $h(x) = cox(2x) - sin(3x - 1)$

Exercice 2 : Calculer $\int_{-1}^{1}(2x + 1)e^{x^2+x}\,dx$