

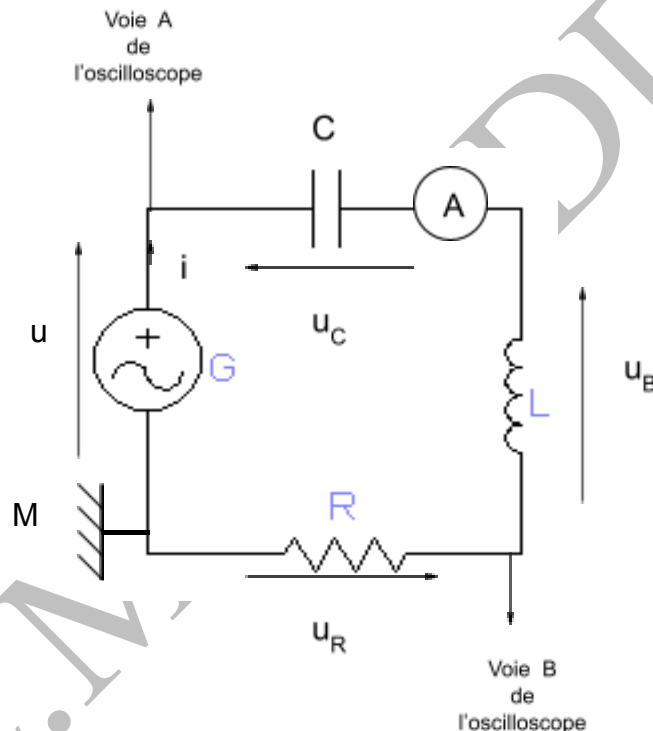
3/ Oscillations forcées en régime sinusoïdale :

Introduction :

Nous avons vu que dans le cas d'un circuit RLC en oscillations libres amorties, l'énergie électrique finissait par se dissiper complètement par effet Joules et les oscillations disparaissaient. Pour entretenir les oscillations, il est nécessaire de compenser continuellement les pertes énergétiques ; ceci peut être réalisé à l'aide d'un G.B.F qui impose aux bornes du circuit RLC série, une tension excitatrice sinusoïdale. Le G.B.F est alors appelé excitateur et le circuit RLC répondant à l'excitation le résonateur ; il y a donc un transfert continu d'énergie de l'excitateur vers le résonateur ; ce dernier étant obligé de suivre la cadence de l'excitateur ; les oscillations sont qualifiées d'oscillations forcées en régime sinusoïdale.

A- Influence de la fréquence excitatrice : résonance d'intensité

Le schéma du circuit est le suivant :



La tension excitatrice instantanée $u(t)$ s'exprime de la manière suivante :

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi_u) .$$

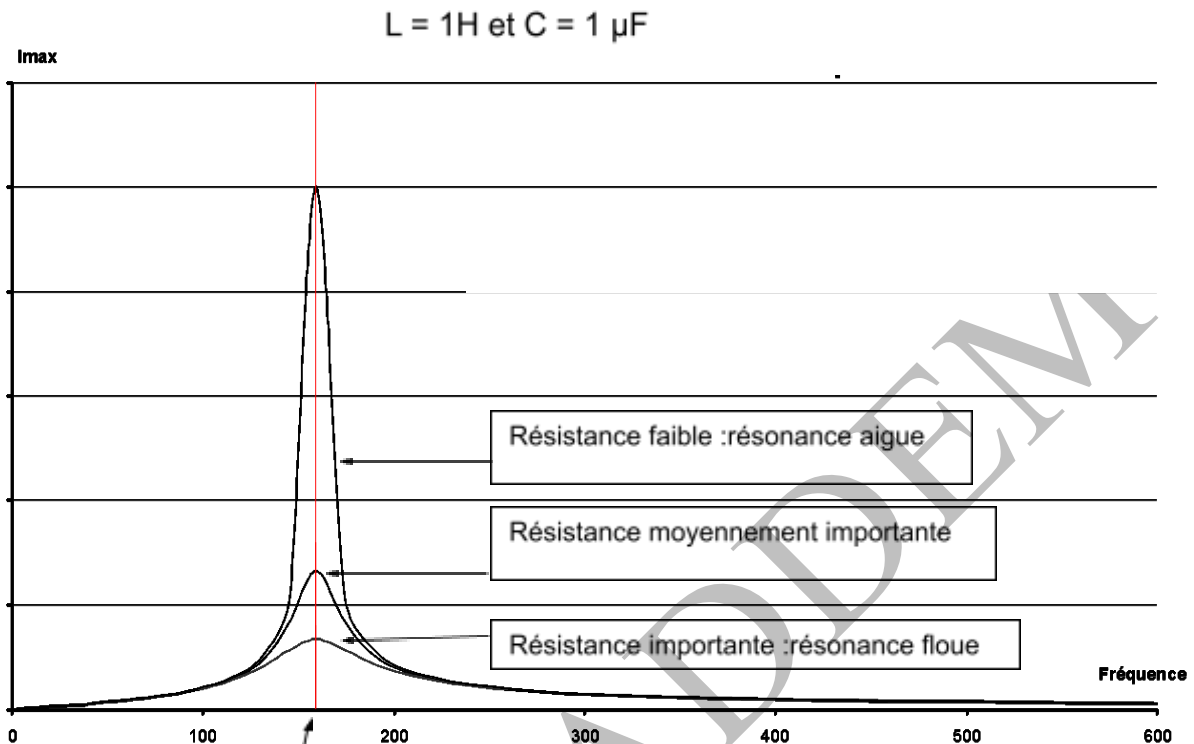
S'agissant d'oscillations forcées, l'intensité instantanée du courant $i(t)$ oscille avec la même pulsation ω que la tension excitatrice et s'exprime de la manière suivante : $i(t) = i_m \sin(\omega t + \varphi_i) .$

a) Observations expérimentales

Faisons varier la fréquence de la tension excitatrice à l'aide du G.B.F et relevons à chaque fois l'intensité efficace I_{eff} à l'aide de l'ampèremètre. On rappelle que l'amplitude i_m et l'intensité efficace sont reliés par la relation suivante : $i_m = \sqrt{2} \cdot I_{\text{eff}}$

Pour différentes valeurs de la résistance totale traçons l'allure de la courbe de réponse $i_m = f(N)$

• **Influence de la fréquence sur i_m : courbe de réponse $i_m = f(N)$**



159

On constate que :

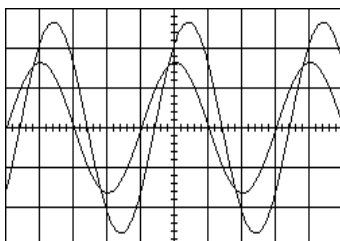
- Pour une valeur de la résistance totale donnée, l'amplitude i_m de la réponse en courant dépend de la fréquence imposée par l'excitateur.
- Il existe une fréquence, pour laquelle l'amplitude i_m est maximale, ce phénomène est appelé phénomène de résonance.
- La fréquence pour laquelle on a résonance d'intensité est indépendante de la

résistance et elle est égale à la fréquence propre du circuit : $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L.C}}$

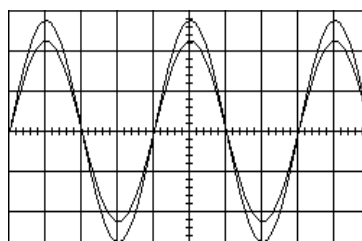
• **Influence de la fréquence sur le déphasage** $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_u - \varphi_{u_R}$

Dans les trois oscillographes suivants la courbe ayant la plus grande amplitude correspond à u et l'autre à u_R .

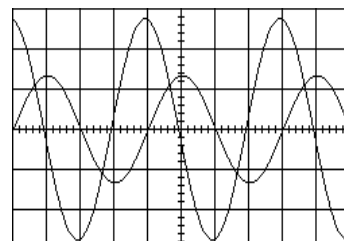
$f < f_0$
 u est en retard de phase
par rapport à u_R



$f = f_0$
 u est en phase
avec u_R



$f > f_0$
 u est en avance de phase
par rapport à u_R



b) Etude théorique : Représentation de Fresnel

La loi des mailles permet d'écrire :

$$u_R + u_C + u_B = u = u_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\Leftrightarrow (R+r)i + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} = u_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

On associe à chaque terme de cette équation, le vecteur de Fresnel correspondant :

$$(R+r)i = (R+r) i_m \sin(\omega t + \varphi_i) \rightarrow u_1 : [(R+r) i_m ; \varphi_i]$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = \frac{i_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \rightarrow u_2 : [\frac{i_m}{\omega} ; \varphi_i - \frac{\pi}{2}]$$

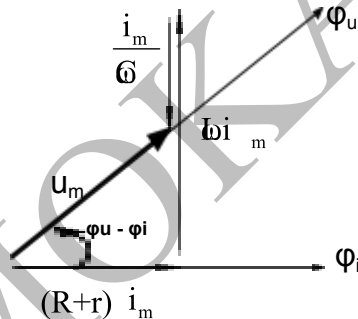
$$L \frac{di}{dt} = \omega L i_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) \rightarrow u_3 : [\omega L i_m ; \varphi_i + \frac{\pi}{2}]$$

$$u = u_m \sin(\omega t + \varphi_u) \rightarrow u_4 : [u_m ; \varphi_u]$$

Les grandeurs sinusoïdales se traitent comme les vecteurs, on peut donc écrire:

$$u_4 = u_1 + u_2 + u_3$$

Pour simplifier, on prendra la direction de u_1 horizontale:



Il apparaît dans cette représentation, un triangle rectangle, appliquons alors le théorème de Pythagore :

$$u_m^2 = (R+r)^2 i_m^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 i_m^2 = [(R+r)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2] i_m^2$$

$$\Leftrightarrow i_m = \frac{u_m}{\sqrt{(R+r)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

On peut aussi tirer de la représentation de Fresnel les expressions suivantes:

$$\cos(\varphi) = \frac{(R+r)i_m}{u_m} \quad \text{et} \quad \tan(-\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R+r}$$

Conséquences :

- A la résonance d'intensité , c'est-à-dire quand i_m est maximale , on a :

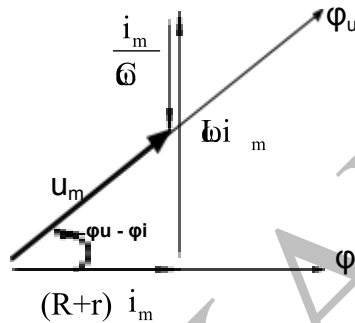
$$\omega - \frac{1}{\omega} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

La résonance d'intensité est obtenue quand la pulsation de l'excitateur est égale à la pulsation propre du résonateur .

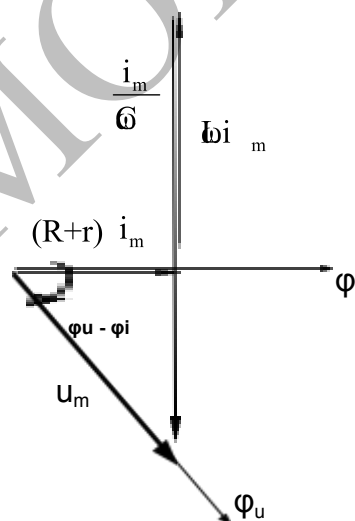
On a donc : $i_{m(\text{résonance})} = \frac{u_m}{R+r}$ et par conséquent : $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{(R+r)i_{m(\text{résonance})}}{u_m} = 1$

$\Rightarrow \varphi_u - \varphi_i = 0$; la tension u de l'excitateur et l'intensité i sont en phase.

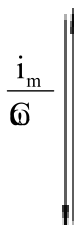
- Si $\omega > \frac{1}{\omega}$: $\varphi_u - \varphi_i > 0$, le circuit est dit inductif :



- Si $\omega < \frac{1}{\omega}$: $\varphi_u - \varphi_i < 0$, le circuit est dit capacitif :



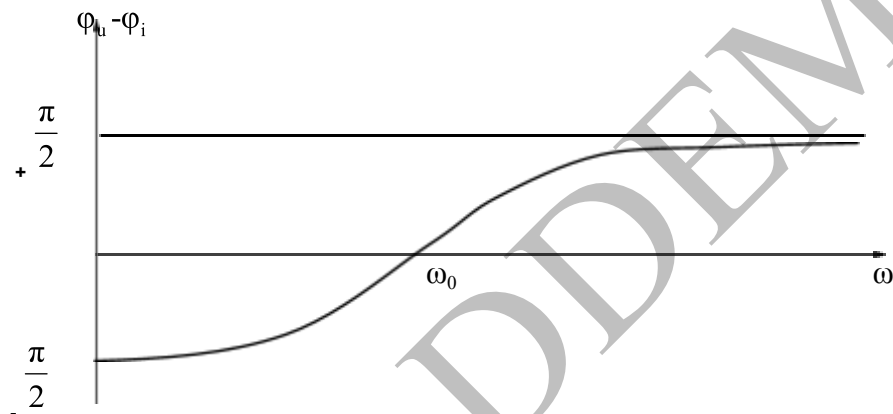
- Si $\omega = \frac{1}{\omega}$: $\varphi_u - \varphi_i = 0$ et $u_m = (R+r) i_m$; le circuit est dit résistif :



$$L i_m$$

$$\frac{(R+r) i_m}{U_m} \rightarrow \varphi_i = \varphi_u$$

- $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{(R+r) i_m}{U_m} > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_u - \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}$ et la courbe de variation de $\varphi_u - \varphi_i = f(\omega)$ possède l'allure suivante :



c) Impédance électrique:

• Définition :

L'impédance Z d'un dipôle est le rapport de la tension efficace (mesurée par un voltmètre) à ses bornes par le courant efficace (mesuré par un ampèremètre) qui le traverse :

$$Z = \frac{U}{I} \quad \begin{matrix} \nearrow (V) \\ \nwarrow (A) \end{matrix}$$

(Ω)

Remarque : Le rapport des grandeurs efficaces est aussi égale au rapport des grandeurs maximale :

$$U = \frac{u_m}{\sqrt{2}} \text{ et } I = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow Z = \frac{u_m}{i_m}$$

• Cas particuliers :

$$Z_R = \frac{u_{Rm}}{i_m} = R$$

$$Z_C = \frac{u_{Cm}}{i_m} = \frac{i_m}{C \omega_m} = \frac{1}{C \omega_m}$$

$$Z_B = \frac{u_{Bm}}{i_m} ; \text{ en utilisant la représentation de Fresnel de } u_B = r i + L \frac{di}{dt}$$



$$\Rightarrow \omega_{Bm} = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} i_m \Rightarrow Z = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$$

Pour une bobine purement inductive : $Z_L = L\omega$

$$Z_T = \frac{u_m}{i_m} = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

- L'impédance totale du circuit RLC est :

d) Puissance électrique moyenne:

On montre que la puissance électrique moyenne absorbée par le circuit RLC (ou transférée par le générateur) est donnée par l'expression suivante :

$$P_{moy} = \frac{1}{2} u_m i_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

$\cos(\varphi_u - \varphi_i)$ est appelé facteur de puissance

$$\text{Or } \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{(R+r)i_m}{u_m} \Rightarrow P_{moy} = \frac{1}{2} (R+r) i_m^2 = (R+r) I^2$$

Conclusions :

- La résonance d'intensité correspond à une résonance de puissance : à la résonance d'intensité , le transfert d'énergie du générateur au circuit RLC est maximal.
- La puissance moyenne transférée par le générateur est égale à la puissance moyenne dissipée par effet Joules dans les résistances.
- La puissance instantanée absorbée par le circuit RLC est $p(t) = u(t).i(t)$ avec $u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ et $i(t) = i_m \sin(\omega t + \varphi_i)$.
à la résonance d'intensité : $u_m = (R+r) i_m$ et $\varphi_u = \varphi_i$
 $\Rightarrow p(t) = (R+r) i_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i) = (R+r) i^2$
 $\Rightarrow$ à la résonance d'intensité , la puissance instantanée absorbée par le circuit RLC est égale à la puissance instantanée dissipée par effet Joules.
De ce fait, le circuit se comporte à la résonance d'intensité comme s'il était libre non amorti , en effet :

$$(R+r)i + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} = u_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Or à tout instant , on a $(R+r)i = u_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow$$

e) Coefficient de surtension:

•Définition :

Le coefficient de surtension notée Q d'un circuit RLC série est défini par le rapport suivant :

$$Q = \left(\frac{U_C}{U_G} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{Z_C \cdot I}{Z_{R,L,C} \cdot I} = \frac{1}{C\omega_0(R+r)} = \frac{L\omega_0}{R+r}$$

• Expression :

$$Q = \left(\frac{U_C}{U_G} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{Z_C \cdot I}{Z_{R,L,C} \cdot I} = \frac{1}{C\omega_0(R+r)} = \frac{L\omega_0}{R+r}$$

• Intérêt :

Pour transférer le maximum d'énergie au circuit RLC, il faut se placer à la résonance d'intensité ; par ailleurs si la résistance totale du circuit est trop faible, on risque d'avoir une très grande surtension aux bornes du condensateur qui risque de claquer. Le coefficient de surtension permet de prévoir les risques encourus avant le branchement du circuit

B- Résonance de charge (4sc):

A partir de l'expression de i_m on peut tirer celle de q_m de la manière suivante :

$$q_m = \frac{i_m}{\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{u_m}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2}} \quad q_m = \frac{u_m}{\sqrt{(R+r)^2 L\omega^2 - \left(\frac{1}{C}\right)^2}}$$

$$i_m = \omega q_m \Rightarrow$$

la résonance de charge consiste à rendre maximale l'amplitude de la charge q_m ,

pour cela la fonction $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2}}$ doit être minimale

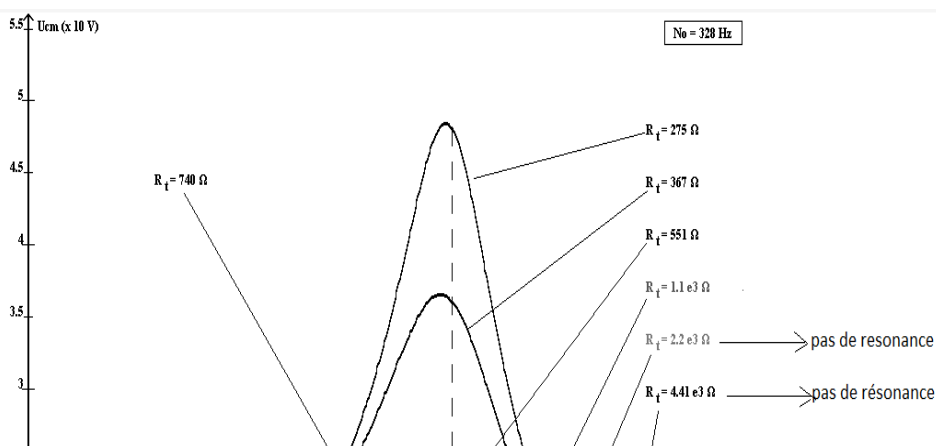
$$\Leftrightarrow \frac{df}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow 2(R+r)^2 + 2\left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)(2L\omega) = 0 \Leftrightarrow (R+r)^2 + 2L\omega^2 - \frac{2L}{C} = 0$$

$$\Leftrightarrow (R+r)^2 + 2L^2 \omega^2 - \frac{2L}{C} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \frac{(R+r)^2}{L^2} \Leftrightarrow \omega_{\text{rés}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \frac{(R+r)^2}{L^2}}$$

Conséquences :

- La résonance de charge s'obtient pour une pulsation $\omega_r \leq \omega_0$
- Autant la résistance augmente autant ω_r diminue par rapport à ω_0 ;
- Contrairement à la résonance d'intensité qu'on obtient quelque soit la valeur de la résistance, la résonance de charge ne s'obtient que si :

$$\omega_0^2 - \frac{1}{2} \frac{(R+r)^2}{L^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \frac{(R+r)^2}{L^2} \geq 0 \Leftrightarrow R+r \leq \sqrt{2} \frac{L}{C} = \text{résistance limite}$$



E.MOKKADDEM