

Сложная функция

1. Если задана некоторая функция $y = f(x)$, например, $y = 2x + 1$, то это значит, что задано правило соответствия f . Это правило предписывает произвести над значением аргумента x определенные действия, а именно, в нашем случае, умножить его на 2 и затем к произведению прибавить 1. В итоге получаем определенное число - соответствующее значение функции $f(x)$. Так, если $x = 0$, то $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, а если $x = 1 + \sqrt{2}$, то $f(1 + \sqrt{2}) = 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) + 1 = 2\sqrt{2} + 3$. При $x = a$ получаем $f(a) = 2a + 1$. Областью определения функции является числовое множество, в нашем примере – это R .

Рассмотрим следующее выражение $f(t^2 + 1)$, в котором вместо аргумента данной функции подставляется некоторая функция от другого аргумента, а именно $\varphi(t) = t^2 + 1$. Можно записать это выражение в виде $f(\varphi(t))$. Таким образом, мы имеем «функцию от функции». Аргументом этой новой функции является переменная t . Значения функции $f(t^2 + 1)$, то есть $f(\varphi(t))$, вычисляются следующим образом. Берется значение аргумента t , например, равное 2, и находится значение функции $\varphi(t) = t^2 + 1$ при $t = 2$. Имеем $\varphi(2) = 2^2 + 1 = 5$. Далее вычисляем значение функции f при $x = 5$. Получаем $f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$. Таким образом, $f(\varphi(2)) = 11$. Для произвольного значения t имеем $\varphi(t) = t^2 + 1$, то есть $x = t^2 + 1$, значит $f(t^2 + 1) = 2(t^2 + 1) + 1 = 2t^2 + 3$ (1). Поэтому формула функции $f(\varphi(t))$ имеет вид $y = 2t^2 + 3$. Отметим, что фактически в (1) были проделаны те действия, которые предусматриваются правилом f , однако эти действия были проделаны не над аргументом x , а над выражением $t^2 + 1$. Функция $f(\varphi(t))$ получена в результате описанной операции называется сложной. Термин «сложная» используется здесь в смысле «составная», то есть сложная функция составлена из других функций. Дадим точное определение сложной функции.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X , а функция $x = \varphi(t)$ – на множестве U , причем множество значений функции φ содержится в области определения функции f . Поставим в соответствие каждому числу t из U число $f(\varphi(t))$. Тем самым на множестве U будет задана функция $y = f(\varphi(t))$. Эту функцию называют сложной функцией или композицией функций f и φ .

При этом f называют внешней, а φ — внутренней функцией композиции.

Пример 1. Пусть $y = f(x)$, где $f(x) = 2x + 1$. Составьте сложную функцию $y = f(\varphi(t))$, если а) $\varphi(t) = t + \sqrt{t}$; б) $\varphi(t) = t^2 + t - 1$.

Решение. Подставим вместо x в формулу функции $y = f(x)$, соответственно, $t + \sqrt{t}$ и $t^2 + t - 1$):

$$а) f(t + \sqrt{t}) = 2(t + \sqrt{t}) + 1 = 2t + \sqrt{t} + 1. \text{ Получаем } f(\varphi(t)) = 2t + \sqrt{t} + 1$$

$$б) f(t^2 + t - 1) = 2(t^2 + t - 1) + 1 = 2t^2 + 2t - 1. \quad \text{В итоге}$$
$$f(\varphi(t)) = 2t^2 + 2t - 1.$$

Пример 2. Даны две функции f и g , соответственно, $y = \frac{5x+1}{x^2+1}$, $x = t + 1$.

Найдите сложную функцию $y = f(g(t))$.

Решение. $y = \frac{5x+1}{x^2+1}$, $y = \frac{5(t+1)+1}{(t+1)^2+1}$, $y = \frac{5t+6}{t^2+2t+2}$.

Рассмотрим следующую задачу, в которой требуется найти композицию функций $y = \sqrt{x+1}$ и $y = x^2 + 2$, причем первая функция – внешняя, а вторая – внутренняя. Для удобства имеет смысл ввести новые обозначения для переменных второй функции, обозначив ее аргумент буквой t , а зависимую переменную – буквой x . Имеем $x = t^2 + 2$. Важно понимать, что введение других обозначений переменных никак не повлияло на функцию. Записи $x = t^2 + 2$ и $y = x^2 + 2$ представляют одну и ту же функцию, с областью определения R , действие которой состоит в возведении аргумента в квадрат и прибавлении числа 2.

Композицией функций $y = \sqrt{x+1}$ и $x = t^2 + 2$ является функция $y = \sqrt{t^2 + 3}$. В этом случае также ничего не мешает обозначить другой буквой аргумент сложной функции, а именно – буквой x , то есть так, как обозначены аргументы обеих функций в условии задачи. Таким образом, получаем ответ: $y = \sqrt{x^2 + 3}$. Заметим, что тот же результат можно получить, если формально подставить в формулу первой функции $y = \sqrt{x+1}$ вместо x выражение $x^2 + 2$. На практике, конечно, можно пользоваться этим приемом, при этом понимая математический смысл произведенной операции.

Пример 3. Найдите сложную функцию, составленную из функций $y = x^3$ и $y = x^2 + 2$, где первая функция будет внешней, а вторая – внутренней.

Решение. В первую функцию вместо x подставим выражение $x^2 + 2$. В итоге получаем $y = (x^2 + 2)^3$.

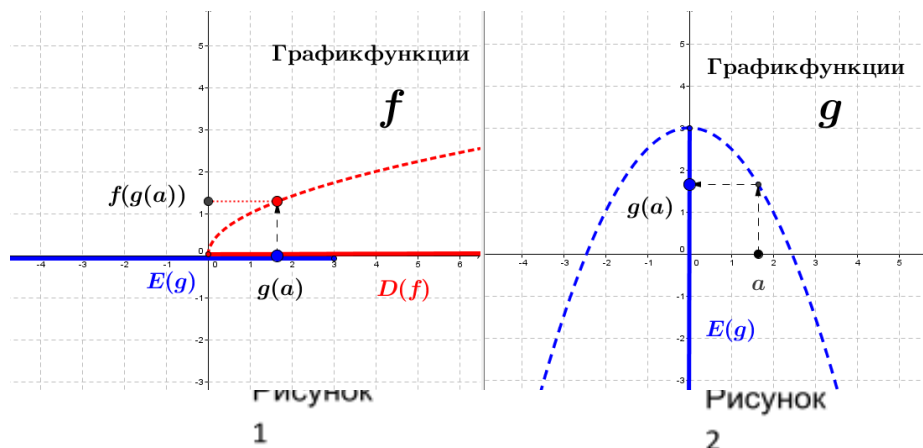
2. Пусть даны две функции $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = 2x + 1$

- сложная функцию, в которой f – внешняя функция, а g – внутренняя, то есть функция $f(g(x))$, имеет вид $y = \sqrt{2x + 1}$ (2)
- Если, наоборот, в качестве внешней функции взять g , а в качестве внутренней – f , то есть составить сложную функцию $g(f(x))$, то получим функцию $y = 2\sqrt{x} + 1$ (3).

В итоге получены две разные функции: $y = \sqrt{2x + 1}$ и $y = 2\sqrt{x} + 1$. Они имеют разные области определения, у первой $x \geq -\frac{1}{2}$, а у второй $x \geq 0$. Кроме того, функции принимают разные значения, например, при $x = 1$: значение первой равно $\sqrt{3}$, а второй равно 3. Таким образом, для заданных функций f и g оказалось, что

$f(g(x)) \neq g(f(x))$. На основании этого можно сделать вывод о том, что если в сложной функции внутреннюю и внешнюю функции поменять местами, то может получиться другая функция. На самом деле, практически всегда так и происходит, поэтому нужно внимательно следить в каком порядке берутся функции при составлении из них сложной функции.

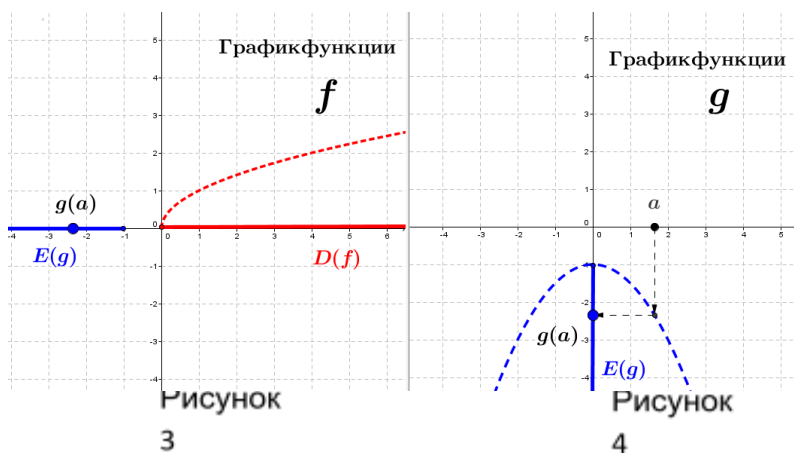
3. Рассмотрим вопрос об области определения и множестве значений сложной функции. Возьмем функции f и g , графики которых изображены на рисунках 1 и 2, и составим сложную функцию $y = f(g(x))$. С помощью графиков проследим, каким образом находятся значения сложной функции.



Рассмотрим число a , принадлежащее области определения внутренней функции g . В нашем примере $D(g) = R$. Находим значение $g(a)$ (рис.2). Далее нужно вычислить значение функции f от числа $g(a)$, то есть $f(g(a))$ (рис.1). Для этого необходимо, чтобы число $g(a)$ принадлежало области определения функции f , то есть $g(a) \in D(f)$ (рис.1). Если это условие не выполняется, то число a не входит в область определения сложной функции. Таким образом, число a должно быть таким, что $g(a) \in D(f) \cap E(g)$. Для нашего примера множество $D(f) \cap E(g)$ является отрезком $[0, 3]$ (рис.1). Это значит, что $g(a) \in [0, 3]$. По графику функции g определяем, что тогда $a \in [-2, 5; 2, 5]$ (рис.2). Поэтому областью определения сложной функции $y = f(g(x))$ является отрезок $[-2, 5; 2, 5]$, в то время как $D(g) = R$.

Итак, область определения сложной функции, как видно из приведенного примера, содержится в области определения внутренней функции, но может быть меньше ее. Точно также как и множество значений сложной функции в сравнении с множеством значений внешней функции.

Отметим, что не всякие функции могут составить сложную функцию. Так будет в случае, если множества $D(f)$ и $E(g)$ не содержат общих точек, то есть их пересечение $D(f) \cap E(g)$ пусто (рис. 5)



Пример 4. Найти множество значений сложной функции $y = g(f(x))$, если $g(x) = \frac{1}{x}$ и $f(x) = x^2 + 1$

Решение. Формула сложной функции имеет следующий вид: $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Решим эту задачу с привлечением графиков заданных функций. Напомним, что множество значений функции представляется проекцией графика на ось ординат. Множество значений внутренней функции f составляет промежуток $[1; +\infty)$, то есть $E(f) = [1; +\infty)$ (рис. 6). Внешняя функция g определена на всем промежутке $[1; +\infty)$ (рис. 5). Исходя из ее свойств, заключаем, что функция g принимает на этом промежутке все значения от нуля, не включая его, до единицы. Таким образом, множество значений сложной функции составляет промежуток $(0; 1]$. Ответ. $(0; 1]$.

