

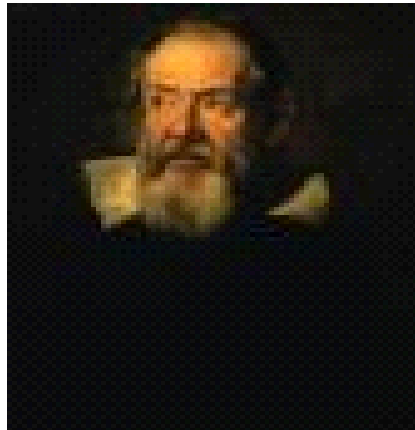
Sommaire

introduction générale	2
L'historique de la mécanique classique	2
A chapitre 1 : Le centre de masse et la matrice d'inertie d'un solide rigide de forme usuel	2
A.I Le centre de masse	2
A.I.1 Théorème de Guldin	4
A.II La matrice d'inertie	5
A.II.1 Théorèmes de Huygens:	6
B CHAPITRE2: protocole expérimentaux	7
B.I Le centre de gravité	7
B.I.1 Protocole expérimental 1 : méthode de basculement	7
Résultats et interprétation	8
Conclusion :	8
B.I.2 Protocole expérimental 2	8
B.II La matrice d'inertie	9
B.II.1 Première méthode	9
C Les solides usinés	13
Exemple :1	13
L'annexe	15
D Travaux cités	19

INTRODUCTION GÉNÉRALE

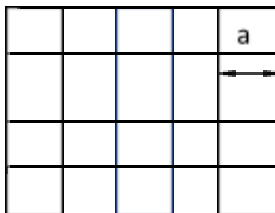
L'HISTORIQUE DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE

La mécanique classique est une branche de la physique dont l'objet est l'étude du mouvement des objets macroscopiques qui se déplacent par une vitesse inférieure à celle de la lumière.



AVANT-PROPOS

ce sujet concerne particulièrement des solides indéformables (rigides), qui défini par des ensembles des points matériels dont les distances entre eux sont constantes au cours du temps c'est à dire : $d(a)/dt=0$ tel que a est la distance entre deux points successive.



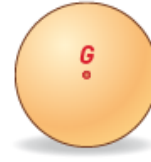
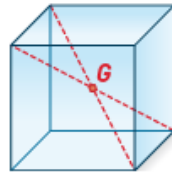
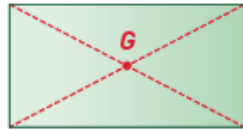
Le matériau considéré

CHAPITRE 1 : LE CENTRE DE MASSE ET LA MATRICE D'INERTIE D'UN SOLIDE RIGIDE DE FORME USUEL

1.I LE CENTRE DE MASSE

Le centre de gravité d'un solide homogène (constitué de même matière) est situé au centre géométrique de celui-ci.

Par exemples, pour quelques exemples d'objets homogènes représentant des figures géométriques élémentaires, le centre de gravité est le centre de symétrie de chaque figure.



Le centre de gravité d'un solide hétérogène (constitué de matières différentes) est situé dans la partie la plus dense de celui-ci.

Par exemple, le centre de gravité d'un marteau est décalé vers la tête.



On définit aussi le centre de masse (ou centre de gravité) d'un système (Σ) mathématiquement le point noté G déterminé d'après la relation suivante :

Pour les systèmes discrets: on a $\sum_{(s)} GM dm = 0$

Soit $\vec{OG} = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$ donc $x_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mN} m_i x_i$, $y_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i y_i$ et $z_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i z_i$ avec $m = \sum_{i=1}^N m_i$

Pour les systèmes continus : Dans ce cas on a : $\int_{(\Sigma)} GM dm(p) = 0$

$x_G = \frac{1}{m} \int_s x dm$, $y_G = \frac{1}{m} \int_s y dm$ et $z_G = \frac{1}{m} \int_s z dm$

Exemple :

Le demi-disque est dans le plan (xOy) :

$z = 0$ donc $z_G = 0$

coordonnées polaires (r, θ) :

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

surface élémentaire : $ds = r dr d\theta$

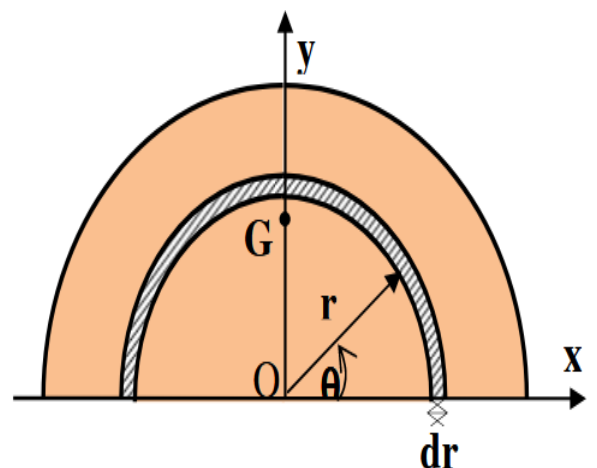
donc la surface de demi-disque de rayon R est : $s =$

$$\int_0^R \int_0^\pi r dr d\theta = \pi \frac{R^2}{2}$$

la masse élémentaire : $dm = \sigma ds = \sigma r dr d\theta$

on a système homogène donc $\sigma = \text{cte}$ alors $m = \sigma s$ et $\sigma = \frac{2m}{\pi R^2}$

Coordonnée du centre d'inertie, G :



$$y_G = \frac{1}{m} \iint_S y dm = \frac{\sigma}{m} \iint_S y ds = \frac{1}{s} \iint_S y ds = \left(\frac{2}{\pi R^2} \right) \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

$$x_G = \frac{1}{s} \iint_S x ds = \left(\frac{2}{\pi R^2} \right) \int_0^R \int_0^\pi r^2 \cos \theta dr d\theta = 0$$

Donc le centre de masse G a pour coordonnées dans (R) : $G(0, \frac{4R}{3\pi}, 0)$

1.1.1 THÉORÈME DE GULDIN

1.1.1.1 LE PREMIER THÉORÈME

Soit une courbe (C) de longueur L et de centre de gravité G, engendre une surface S par son rotation autour de l'axe Δ : donc la distance entre le centre de gravité et l'axe Δ est : $d = \frac{S}{2\pi L}$

Exemple : Quart de cerceau de rayon R

La longueur du quart de cerceau de rayon R est : $L = \frac{\pi R}{2}$ Rotation autour de l'axe (Oy) : Cette rotation engendre une demi-sphère creuse de surface : $S = 2\pi R^2$

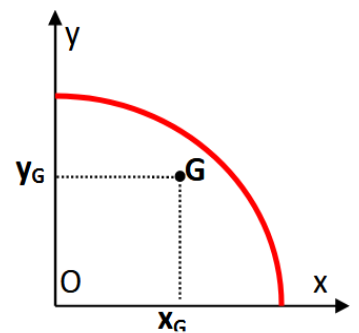
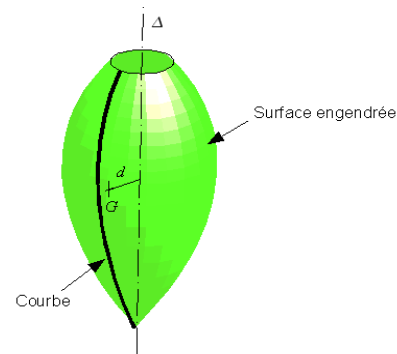
La distance de G à l'axe (Oy) est donc :

$$x_G = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2R}{\pi}$$

Rotation autour de l'axe (Ox) : Cette rotation engendre une demi-sphère creuse de surface : $S = 2\pi R^2$ La distance de G à l'axe (Ox) est donc :

$$y_G = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2R}{\pi}$$

Donc le centre d'inertie, G a pour coordonnées dans (R) : $G(\frac{2R}{\pi}, \frac{2R}{\pi}, 0)$.

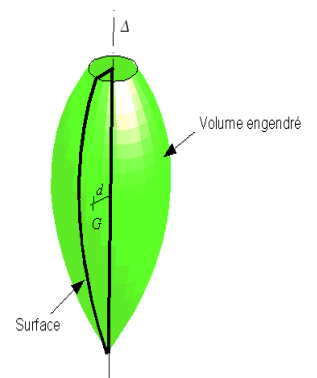


1.1.1.2 LA DEUXIÈME THÉORÈME

Soit une surface d'aire S et de centre de gravité G, engendre un volume v par son rotation autour de l'axe Δ : donc la distance entre le centre de gravité et l'axe Δ est : $d = \frac{V}{2\pi S}$

Exemple : Quart de disque de rayon R

La surface du quart de disque est : $S = \pi R^2 / 4$



Rotation autour de l'axe (Oy) : Cette rotation engendre une demi-sphère pleine de volume : $V = \frac{2}{3} \pi R^3$

La distance de G à l'axe (Oy) est donc : $x_G = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi(\frac{\pi R^2}{4})} = \frac{4R}{3\pi}$

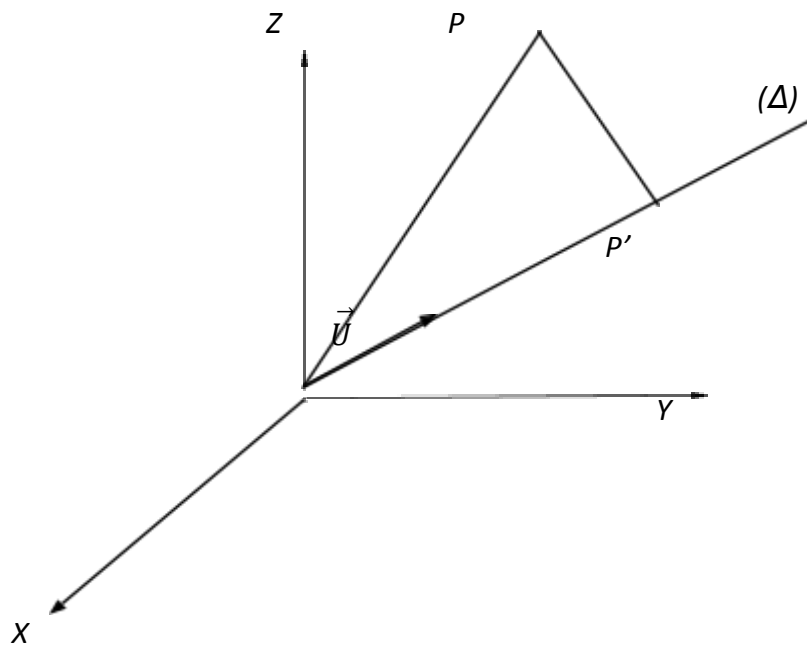
Rotation autour de l'axe (Ox) : Cette rotation engendre une demi-sphère pleine de volume : $V = \frac{2}{3} \pi R^3$

La distance de G à l'axe (Ox) est donc : $y_G = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi(\frac{\pi R^2}{4})} = \frac{4R}{3\pi}$

Donc le centre d'inertie, G a pour coordonnées dans $(\mathcal{R})$: $G\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, 0\right)$.

1.II LA MATRICE D'INERTIE

Soit $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct.



On considère un axe qui passe par l'Origine O et défini par ses cosinus directeurs α, β et γ , le point P générique de coordonnées x, y et z avec P' la projection orthogonale de ce point sur un axe (Δ) et α, β et γ sont les composants d'un vecteur unitaire U de direction (Δ) telle que : $\vec{U} \cdot \vec{OP} = \alpha x + \beta y + \gamma z$

On le triangle OPP' est rectangle donc selon la relation de Pythagore : $||\vec{OP}||^2 = ||\vec{OP'}||^2 + ||\vec{P'P}||^2$

Et donc : $||\vec{PP'}||^2 = ||\vec{OP}||^2 - ||\vec{OP'}||^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$

$$||\vec{PP'}||^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - (\alpha x)^2 - (\beta y)^2 - (\gamma z)^2 - (2\alpha\beta xy) - (2\alpha\gamma xz) - (2\beta\gamma yz)$$

En utilisant le fait que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ($\vec{U}$ est un vecteur unitaire), il vient : $||\vec{PP'}||^2 = \alpha^2(Y^2 + Z^2) + \beta^2(X^2 + Z^2) + \gamma^2(X^2 + Y^2) - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz$

Comme $||\vec{U} \wedge \vec{OP}||^2 = ||\vec{PP'}||^2$, l'expression du moment d'inertie $I_{\Delta}(\Sigma) = \int_{\Sigma} ||\vec{PP'}||^2 dm(p)$

$$2dm(p) = \alpha^2 \int_{\Sigma} (Y^2 + Z^2) dm(p) + \beta^2 \int_{\Sigma} (X^2 + Z^2) dm(p) + \gamma^2 \int_{\Sigma} (X^2 + Y^2) dm(p) - 2\alpha\beta \int_{\Sigma} xy dm(p)$$

$$- 2\alpha\gamma \int_{\Sigma} xz dm(p) - 2\beta\gamma \int_{\Sigma} yz dm(p)$$

$$= \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} - 2\alpha\beta I_{xy} - 2\alpha\gamma I_{xz} - 2\beta\gamma I_{yz}$$

Où les coefficients $I_{xy} = \int_{\Sigma} yx dm(p)$ $I_{xz} = \int_{\Sigma} xz dm(p)$ $I_{yz} = \int_{\Sigma} yz dm(p)$ sont

appelés produit d'inertie du système matériel (Σ) dans le repère R.

On peut écrire cette expression sous forme d'un produit de matrice

$$I_{\Delta}(\Sigma) = (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

On appelle la matrice d'inertie du système (Σ) par rapport aux axes ($OX, \rightarrow OY, \rightarrow OZ \rightarrow$)

Du repère R ($i \rightarrow, j \rightarrow, k \rightarrow$) orthonormé direct et s'écrit sous la forme suivant :

$$I_{\Delta}(\Sigma) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{avec } I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} \text{ le moment}$$

d'inertie respectivement par rapport aux axes (OX), (OY), (OZ). (1) (Zeggwagh, 2002)

Exemple :

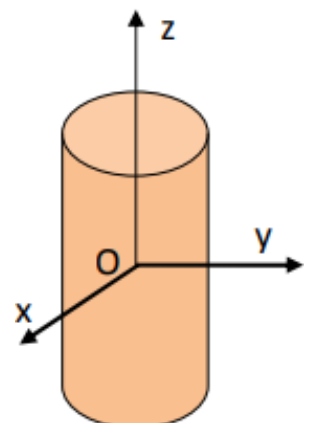
Exemple 3: Cylindre homogène plein de rayon $R=2m$ et de hauteur $h=4m$

Et de masse $M=50kg$, L'axe (Oz) est un axe de symétrie de révolution, donc le repère $\mathcal{RC}$ (Oxyz) munide la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère principal d'inertie.

Symétrie cylindrique : $I_{xx} = I_{yy}$

$$dm = \rho dv = \rho r dr d\theta dz$$

Cylindre homogène : $\rho = \text{cte}$ donc $M = \rho \pi R^2 h$



$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz} + 2 \int_S z^2 dM$$

Coordonnée polaire $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dM = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r^3 dr d\theta dz = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi h = \frac{MR^2}{2} = 100 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{xoy} = \int_S z^2 dM = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 r dr d\theta dz = \frac{Mh^2}{12}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} / 2 + \int_S z^2 dM = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12} = 116,66 \text{ kg.m}^2$$

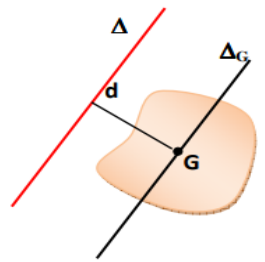
La matrice d'inertie au centre d'inertie O :

$$II_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}$$

1.II.1 THÉORÈMES DE HUYGENS:

SOIT L'axe (Δ_G) est un axe passant par le centre de masse G de (S) et L'axe (Δ) est parallèle à l'axe (Δ_G) donc le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe (Δ) , d'un solide (S) de masse m, est égal à son moment d'inertie I_{Δ_G} par rapport à l'axe (Δ_G) , augmenté du produit de la masse, m, de (S) par le carré de la distance, d, des deux axes :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + md^2 \quad \text{Où : d est la distance entre le point G et l'axe } (\Delta).$$



1.II.1.1 THÉORÈME HUYGENS GÉNÉRALISÉ:

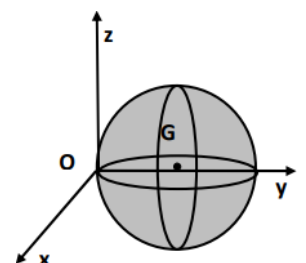
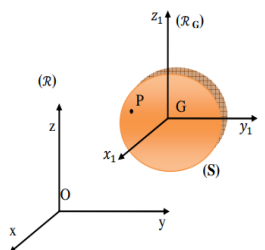
Dans une même base orthonormée directe : La matrice d'inertie II_O au point O, d'un solide (S) de masse m, est égale à sa matrice d'inertie II_G en son centre de masse G, augmentée de la matrice d'inertie $II_O(G, m)$ au point O, du centre de masse G, considéré comme point fictif affecté de la masse, m de (S) : $II_O(S) = II_G(S) + II_O(G, m)$

Tel que Les matrices d'inertie doivent être exprimées dans une même base orthonormée directe

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & -I_{xz} & -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} & -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xG} & I_{xGyG} & -I_{xGzG} & -I_{xGyG} & I_{yG} & -I_{yGzG} & -I_{xGzG} & -I_{yGzG} & I_{zG} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G & -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G & -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}$$

Exemple : Les coordonnées du centre de masse G dans $\mathcal{R}$:

$$x_G = 0, y_G = R, z_G = 0$$



La matrice d'inertie du système (S) au point G s'écrit :

$$I_G(S) = \frac{2}{5} mR^2 [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Matrice d'inertie en O : $I_O(S) = I_G(S) + I_O(G,m)$

$$I_O(G,m) = m \begin{bmatrix} y_G^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_G^2 \end{bmatrix} = mR^2 [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Figure 1: système S .

La matrice d'inertie du système (S) au point O, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, s'écrit : $I_O(S) =$

$$\frac{2}{5} mR^2 [7/2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7/2]$$

2 CHAPITRE2: PROTOCOLE EXPÉRIMENTAUX

2.1 LE CENTRE DE GRAVITÉ

2.1.1 PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL 1 : MÉTHODE DE BASCULEMENT

On dispose d'une plaque percée de trois trous espacés.

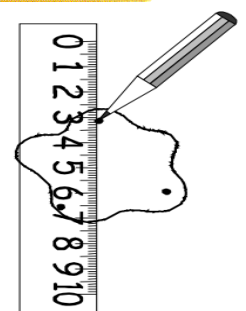
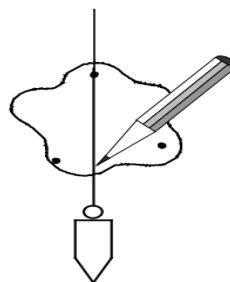
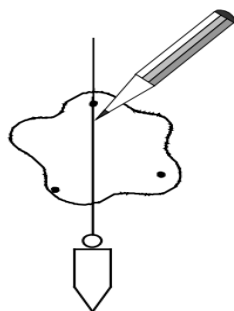
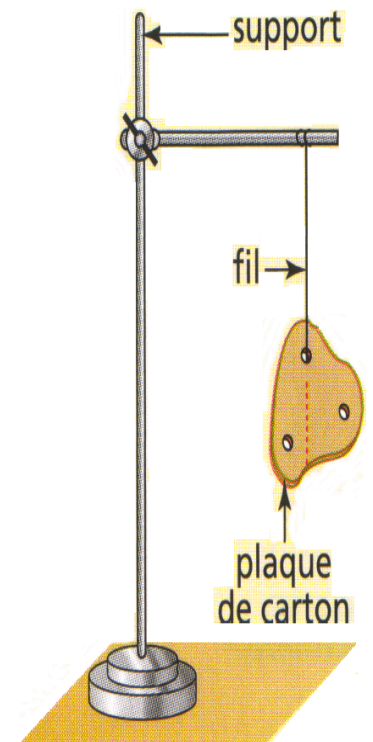
Suspendre la plaque au support par un fil accroché

à l'un des trous. Attendre que la plaque soit en équilibre.

A l'aide d'un crayon de papier et d'une règle, marquer sur la plaque la verticale passant par l'accroche, matérialisée par le prolongement du fil.

Recommencer les deux dernières étapes pour les autres trous.

Décrocher la plaque.



RÉSULTATS ET INTERPRÉTATION

Le centre de gravité de ce corps est l'intersection des droites d'action représentées
 Sur la plaque car à l'équilibre le centre de gravité est le point d'appui
 Appartiennent à une même droite d'action.

CONCLUSION :

Un objet est en équilibre si la verticale passant par son centre de gravité coupe la base de sustentation.(2) (Trillaud, 2009)

2.1.2 PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL 2

On considère un système au repos on veut déterminer son centre de masse, soit R un repère absolu et une chronologie de temps tels que dans tout mouvement d'un système matériel rapporté à ce repère et temps, le torseur dynamique soit équivalent au torseur des forces extérieures.

$$[D(S/R)] = [F_{ext-S}]$$

Puisque le système est au repos donc :

$$\{m\vec{\gamma}(G/R) = \vec{R}(F_{ext-S}) = \vec{0}$$

$$\{\delta\vec{G}(G/R) = \vec{M}(G, F_{ext-S}) = \vec{0}$$

D'après cette relation on peut déterminer la position de centre de masse par résolution de ces équations.

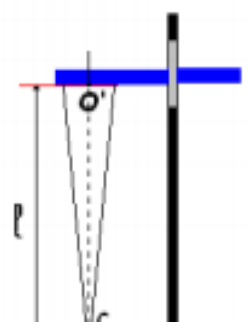
2.II LA MATRICE D'INERTIE

2.II.1 PREMIÈRE MÉTHODE

Pour déterminer la matrice principale d'inertie d'un corps, premièrement on va déterminer le moment d'inertie I de ce corps par rapport à ses axes principales passant par son centre de gravité G .

Pour déduire le moment d'inertie on le suspend en accrochant deux fils identiques de masses négligeables et de longueurs l aux extrémités de l'axe Δ , maintenant ainsi l'axe Δ horizontal. Puis on mesure la durée d'une demi-oscillation dans la direction transverse à l'axe Δ . En on obtient le moment d'inertie I_{Δ} .

| 2 |



Utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour obtenir une équation différentielle du premier ordre portant sur l'angle déviation du pendule.

Le pendule oscille dans le plan transverse à l'axe Δ , les deux fils formant un angle identique θ avec la verticale. Appelons Δ' l'axe parallèle à Δ passant par les points d'attache des fils au plafond.

L'énergie cinétique du solide se compose de l'énergie cinétique de translation du centre de gravité et de l'énergie cinétique de rotation autour de l'axe passant par le centre de gravité :

$$\mathcal{E}_K = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2}_{\text{rotation}}$$

où v est la vitesse de translation du centre de gravité ici $v = l\dot{\theta}$ et ω la vitesse de rotation autour de l'axe Δ' .

On détermine facilement les relations entre v , ω et l'angle θ paramétrant la position du solide : $\omega = \dot{\theta}$ et $v = l\omega = l\dot{\theta}$.

En regroupant ces résultats, on trouve :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{\Delta}\dot{\theta}^2$$

Remarquons que l'on aurait pu aussi décrire le mouvement comme une rotation autour de l'axe Δ' dans ce cas l'énergie cinétique aurait pris la forme

Δ' se déterminant en utilisant le théorème de Huygens :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + md_{\Delta,\Delta'}^2 = I_{\Delta} + ml^2.$$

ce qui donne bien évidemment le même résultat.

L'énergie potentiel est composée uniquement d'énergie potentiel de pesanteur :

$$\mathcal{E}_P = -mgl \cos \theta + \mathcal{E}_0$$

$$\mathcal{E}_K = \underbrace{\frac{1}{2}I_{\Delta'}\omega^2}_{\text{rotation}}$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe

Soit pour l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{\Delta}\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta + \mathcal{E}_0.$$

L'énergie mécanique est une constante du mouvement. Il est commode de l'évaluer au point de rebroussement du pendule c'est-à-dire à l'angle de déviation maximal θ_m où la vitesse s'annule et où toute l'énergie mécanique est sous forme d'énergie potentiel.

$$\mathcal{E}_M = -mgl \cos \theta_m + \mathcal{E}_0 .$$

On en déduit l'équation différentielle portant sur l'angle θ :

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2mgl}{I_{\Delta} + ml^2} (\cos \theta - \cos \theta_m)}$$

On obtient en fait deux équations différentielles, une pour les valeurs croissantes de θ et l'autre pour les valeurs décroissantes. En appelant θ_m l'angle de déviation maximal du pendule, l'équation différentielle avec la racine positive décrit l'oscillation de $-\theta_m$ à θ_m . Le temps T d'une demi-oscillation correspond à l'intégrale

$$T = \int_t^{t+T} dt = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \sqrt{\frac{I_{\Delta} + 2ml^2}{2mgl (\cos \theta - \cos \theta_m)}} d\theta$$

Cette intégrale se détermine simplement dans l'approximation des petits angles (

$$\cos \theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2)$$

$$T = \sqrt{\frac{I_{\Delta} + ml^2}{mgl}} \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{1}{\sqrt{(\theta_m^2 - \theta^2)}} d\theta$$

soit en posant $u = \theta/\theta_m$:

$$T = \sqrt{\frac{I_{\Delta} + ml^2}{mgl}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)}} du .$$

Or la primitive de la fonction $(1 - u^2)^{-1/2}$ est la fonction $\text{Arcsin}(u)$ soit :

$$T = \sqrt{\frac{I_{\Delta} + ml^2}{mgh}} \pi .$$

On en déduit la relation

$$I_{\Delta} = mgl \left[\left(\frac{T}{\pi} \right)^2 - \frac{l}{g} \right]$$

Remarque :

Lorsque le moment d'inertie est nul (cas d'un point matériel) on retrouve la relation

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg}}$$

qui correspond bien à la demi période d'un pendule simple.

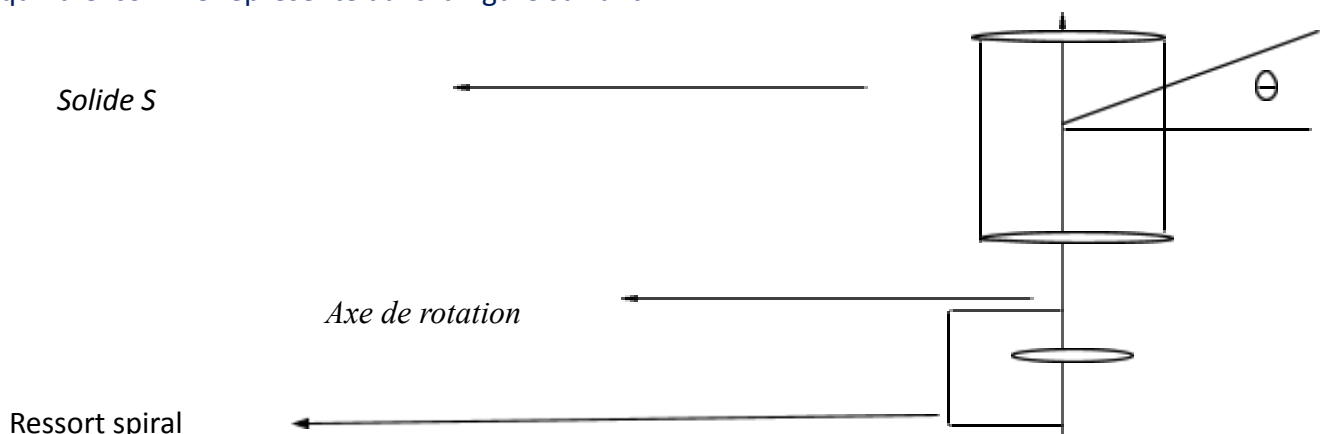
On obtient ainsi une mesure simple du moment d'inertie. Pour que la mesure soit plus sensible, il est nécessaire de prendre une longueur de fil l la plus courte possible. En effet si l'on appelle $\bar{r}$ le rayon moyen de l'objet autour de l'axe Δ , alors I_{Δ} est de l'ordre de $m\bar{r}^2$. Pour que l'influence du moment d'inertie soit significative il faut que $\bar{r}$ ne soit pas négligeable devant l .

Deuxième méthode

On considère un solide S monté sur un axe vertical soumis à un moment de rappel M

appliqué par ressort spiral tel que : $M = -D\theta$

Où D est la constante de rappel de ressort et θ l'angle de rotation par rapport à la position d'équilibre comme représenté dans la figure suivant.



Soit I le moment d'inertie de solide S par rapport à l'axe de rotation.

On appliquant le théorème de moment cinétique au solide (le moment de rappel est parallèle à l'axe de rotation), puis on trouve la relation entre le période T et le moment d'inertie I et la constante de rappel du ressort.

$$\vec{\delta}(S/R) = \sum \vec{M}_{\vec{F}_{ex \rightarrow S}}$$

$$\vec{\delta}(S/R) = \frac{D\vec{\sigma}_G(S)}{Dt}/R \quad \text{Or on a } \vec{\sigma}_G(S) = I_G \vec{\omega}(S/R) \quad \text{avec} \quad \vec{\omega}(S/R) = \dot{\theta} \vec{k}$$

$$= I_{zz} \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{\delta}(S/R) = I_{zz} \ddot{\theta} \vec{k} = \vec{G} \wedge \vec{P} - D\theta$$

$$I_{zz} \ddot{\theta} = -D\theta \quad \leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{D}{I_{zz}} \theta = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

$$\leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{I_{zz}}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{zz}}{D}}$$

Remarque

En crochant le dynamomètre perpendiculaire à la tige, et tourner la tige à l'angle π et on prend la force indiquée et à chaque fois on change le 'r' pour déterminer D la constante de torsion.

$$\text{Avec } D = \frac{F^* r}{\theta} \text{ (N.m/rad)}$$

D'après de déterminer le moment d'inertie pour chaque axe on peut trouvé la matrice d'inertie.

Pour la sphère on détermine le moment pour un seul axe (car elle admet une symétrie pour les trois axes)



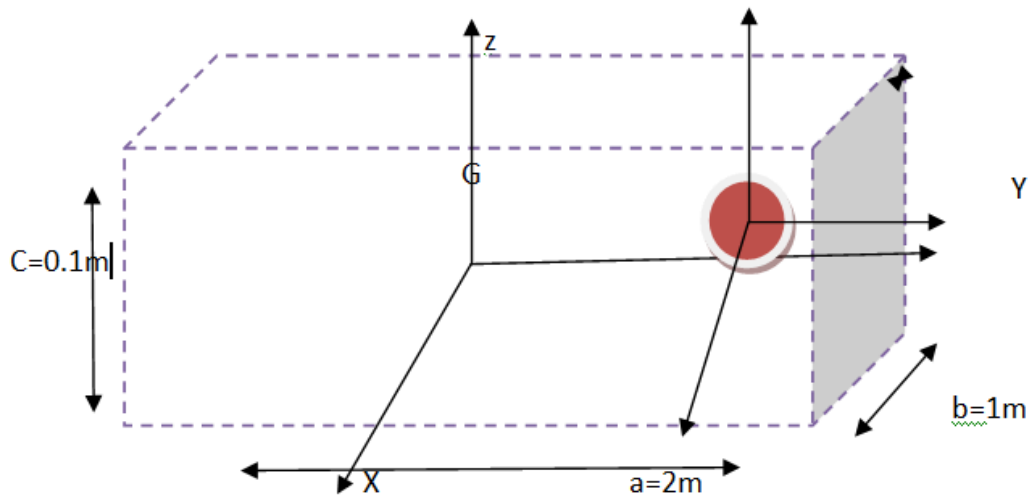
3 LES SOLIDES USINÉS

EXEMPLE :1

Soit une porte S1 de longueur $a=2\text{m}$ et de largeur $b=1\text{m}$ et de hauteur $c=0.1\text{m}$ et de centre de gravité G et de masse $M=40\text{kg}$.

La matrice d'inertie de S1 par rapport au repère R est :

$$II_G(s1) = \begin{bmatrix} \frac{Mb^2}{12} + \frac{Mc^2}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{Ma^2}{12} + \frac{Mc^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Si on fait un trou de forme sphère S2 de rayon $R=0.05\text{m}$ et de masse $m=3\text{kg}$ alors la matrice d'inertie :

$$II_G(s2) = \frac{2mR^2}{5} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) + m$$

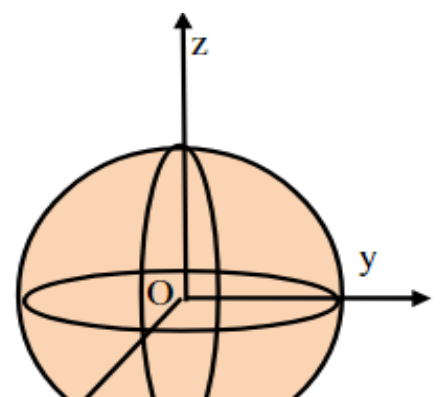
$$\left(y_G^2 + z_G^2 - x_G y_G - x_G z_G - x_G^2 y_G - x_G^2 z_G - y_G^2 z_G - y_G z_G^2 - x_G^2 + y_G^2 + z_G^2 \right)$$

x_G, y_G et z_G coordonnées de centre de masse du sphère donc finalement on obtient la matrice d'inertie :

$$II_G(S) = II_G(S1) - II_G(s2)$$

Détermination centre de masse :

Pour déterminer le centre de masse il suffit de prendre la masse de sphère comme une masse négatif utiliser la relation suivante :



$$m'\vec{OG1} - m\vec{OG2} = M\vec{OG} \quad \text{avec } m' = M - m$$

Exemple :

On considère une sphère pleine de rayon R et de masse M. Soit R le repère d'inertie et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe.

La matrice d'inertie de la sphère est donnée par :

$$I_G(s1) = \frac{2MR^2}{5} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

Maintenant on accroche une masse m' sous d'une petite sphère de rayon r on veut calculer le centre de gravité de système

S = S1 ∪ S2.

On a : $(M+m)\vec{OG} = m\vec{OG2} + M\vec{OG1}$ avec G1 centre de gravité de grande sphère, G2 centre de gravité de petite sphère et G centre de gravité de S.

$$\vec{OG} = \frac{m\vec{OG2} + M\vec{OG1}}{(M+m)}$$

S2



La matrice d'inertie de petite sphère par rapport à R.

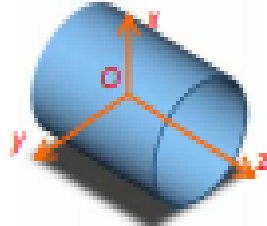
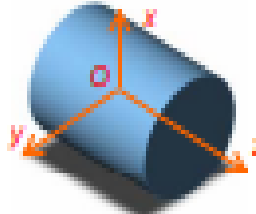
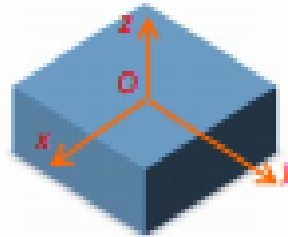
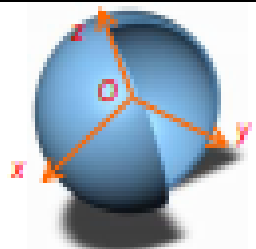
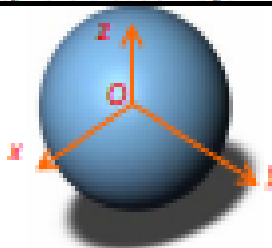
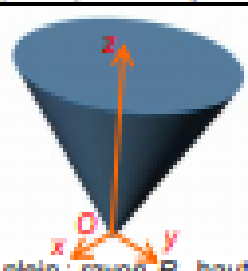
D'après le théorème de Huygens généralisé on a :

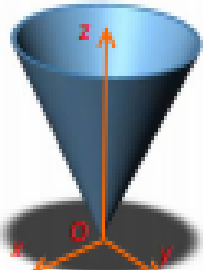
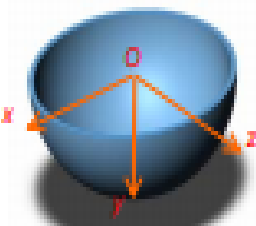
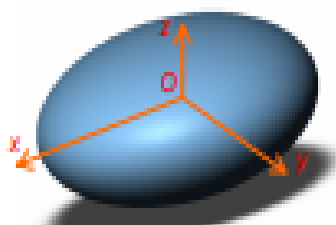
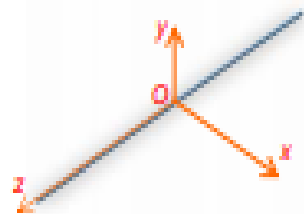
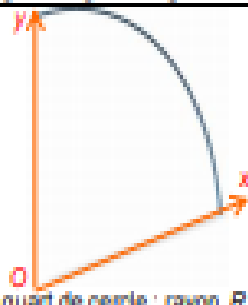
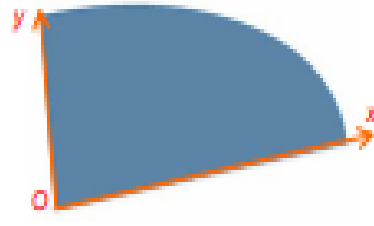
$$I_{G1}(s1) = \frac{2mr^2}{5} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) + m \left(y_G^2 + z_G^2 - x_G y_G - x_G z_G - x_G^2 y_G + z_G^2 - y_G z_G - x_G z_G - y_G^2 z_G + y_G^2 \right)$$

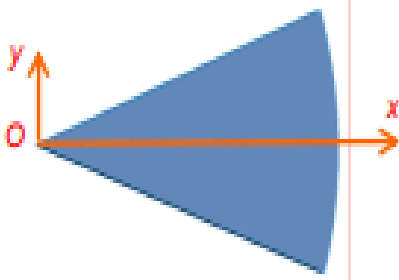
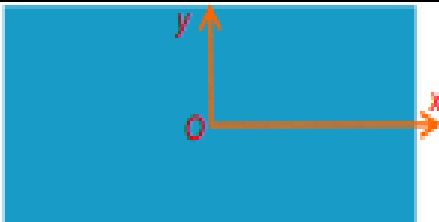
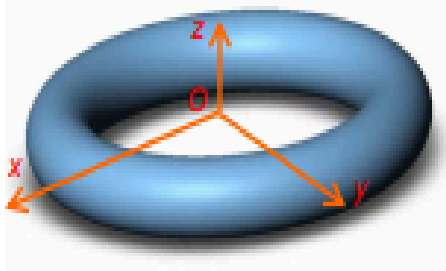
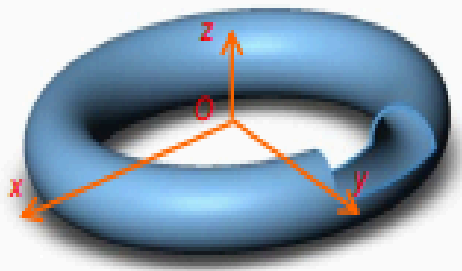
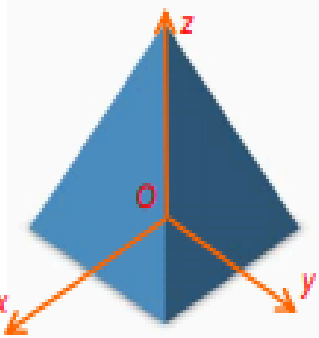
Donc la matrice d'inertie de système S est :

$$\begin{aligned} I_o(S) &= I_o(s1) + I_o(s2) \\ &= \frac{2(mr^2 + MR^2)}{5} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) + m \left(y_G^2 + z_G^2 - x_G y_G - x_G z_G - x_G^2 y_G + z_G^2 - y_G z_G - x_G z_G - y_G^2 z_G + y_G^2 \right) \end{aligned}$$

L'ANNEXE

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie en $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
 cylindre creux : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$
 cylindre plein : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 parallélépipède rectangle : côté a, b, c	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$
 sphère creuse : rayon R	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$
 sphère pleine : rayon R	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}$
 cône plein : rayon R , hauteur h	$z_c = \frac{3h}{4}$	$\begin{pmatrix} \frac{3m}{5} \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3m}{5} \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3m}{5} \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie
 cône creux : rayon R , hauteur h	$z_c = \frac{2h}{3}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{2}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{2}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 demi sphère creuse : rayon R	$z_c = \frac{R}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$
 ellipsoïde : axes $2a$, $2b$, $2c$	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$
 tige rectiligne : longueur $2a$	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 quart de cercle : rayon R	$x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & \frac{1}{\pi}mR^2 & 0 \\ \frac{1}{\pi}mR^2 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$
 quart de plaque elliptique : demi-axes a , b	$x_c = \frac{4a}{3\pi}$ $y_c = \frac{4b}{3\pi}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mb^2 & \frac{1}{2\pi}mab & 0 \\ \frac{1}{2\pi}mab & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m(a+b)^2 \end{pmatrix}$

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie
 secteur circulaire : rayon R	$x_C = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 rectangle : a et b	centre	$\begin{pmatrix} \frac{4}{3}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$
 tore plein : rayons R et a	centre	$\begin{pmatrix} m \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5R^2}{8} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5R^2}{8} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \left(a^2 + \frac{3R^2}{4} \right) \end{pmatrix}$
 tore creux : rayons R et a	centre	$\begin{pmatrix} m \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5R^2}{4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5R^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \left(a^2 + \frac{3R^2}{2} \right) \end{pmatrix}$
 pyramide : a, b, h	$x_C = \frac{h}{4}$	$\begin{pmatrix} m \left(\frac{b^2}{20} + \frac{h^2}{10} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left(\frac{a^2}{20} + \frac{h^2}{10} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{20}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$

4 TRAVAUX CITÉS

.trillaud, j.-p. j.-l.-c.-L.-c. (2009). *sciences phycique et chimie* .
hachette technique.

Zeggwagh, G. (2002). *Mécanique du solide indéformable*. gaétan
morin éditeur Maghreb.