

Zadanie 1. (0–3)

Dane są liczby $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 64}$ oraz $b = \log_2 3 \cdot \log_3 4$.

Oblicz a^b .

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 \leq 1$, prawdziwa jest nierówność $y \leq x^2 + 1$.

Zadanie 3. (0–3)

Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 4$. Przez punkt $P = (0, m)$ poprowadzono dwie styczne do tej paraboli.

Wyznacz wartości parametru m , dla których poprowadzone styczne są prostopadłe. Zapisz obliczenia.

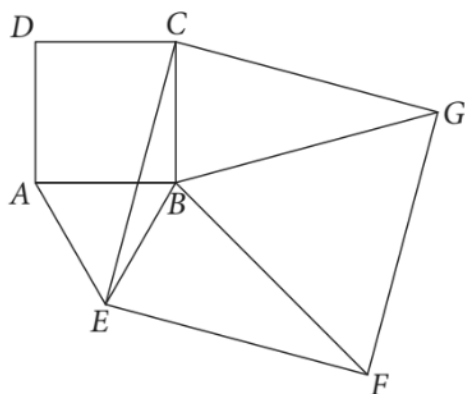
Zadanie 4. (0–3)

Liczba q jest ilorazem rosnącego ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich (a_n) , określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wyrazy: pierwszy, drugi i trzeci ciągu (a_n) są odpowiednio pierwszym, czwartym i trzynastym wyrazem ciągu arytmetycznego (b_n) .

Oblicz iloraz q ciągu geometrycznego (a_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0–3)

Na zewnątrz kwadratu $ABCD$, na boku AB , zbudowano trójkąt równoboczny ABE . Następnie utworzono taki kwadrat $CEFG$, że punkt B leży wewnątrz niego (jak na rysunku).



Udowodnij, że trójkąt BFG jest równoboczny.

Zadanie 6. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\frac{\sin(2x)}{2} = \sin^2 x - \sin x$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–4)

Okrąg o równaniu $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ jest wpisany w trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$ i $C = (0, 0)$. Pole trójkąta ABC jest równe 150.

Oblicz a i b . Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

Przekątne równoległoboku, który nie jest prostokątem, przecinają się pod kątem α , a ich długości są liczbami naturalnymi p i q . Pole tego równoległoboku jest trzy razy mniejsze od pola równoległoboku, którego przekątne również przecinają się pod kątem α i mają długości równe odpowiednio $p + 2$ i $q + 2$.

Oblicz p i q . Zapisz obliczenia.

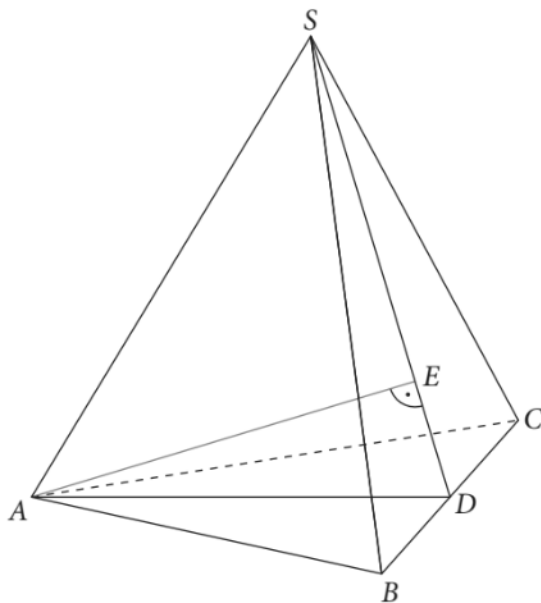
Zadanie 9. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste, losujemy jedną liczbę. Wylosowanie każdej z tych liczb jest jednakowo prawdopodobne.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowano liczbę, w której suma wszystkich cyfr jest równa 3. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–4)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCS$, którego podstawą jest trójkąt ABC o boku długości 6. Punkt D jest środkiem krawędzi BC . Wysokość AE tego ostrosłupa poprowadzona z wierzchołka A dzieli odcinek SD tak, że $|SE| : |DE| = 3 : 1$ (jak na rysunku).



Oblicz objętość ostrosłupa $ABCS$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–5)

Dane jest równanie

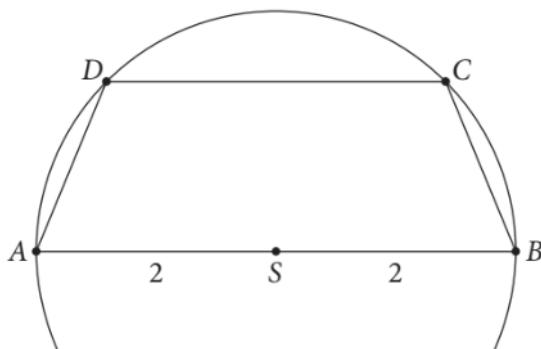
$$(x + 3)(x^2 + m^2 - 2m - 8) = 0$$

z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste, które tworzą ciąg arytmetyczny. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

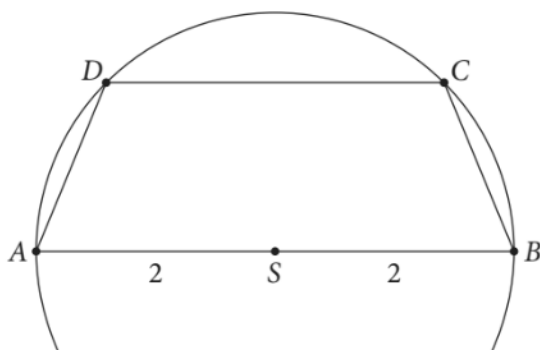
Dany jest okrąg o środku S i promieniu 2 oraz punkty A , B , które są końcami średnicy tego okręgu. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$ o podstawie AB , wpisane w ten okrąg.

**Zadanie 12.1. (0–4)**

Oblicz długość ramienia tego spośród rozpatrywanych trapezów, w który można wpisać okrąg.

Zadanie 12.2. (0–6)

Niech x oznacza długość podstawy CD trapezu $ABCD$.



a) Wykaż, że pole P trapezu $ABCD$, jako funkcja zmiennej x , jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{1}{4} \sqrt{256 + 128x - 8x^3 - x^4}.$$

b) Wyznacz dziedzinę funkcji P zmiennej x .

c) Wyznacz tę wartość x , dla której funkcja P osiąga wartość największą.

Zapisz obliczenia.