Тема: Задачі, які приводять до поняття похідної

Посилання на підручник: https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standartu-10-kl.pdf

Матеріали до теми:

I. Сприймання і усвідомлення поняття миттєвої швидкості прямолінійного руху матеріальної точки.

Нехай матеріальна точка *M* рухається прямолінійно по закону $s = f(t)$ (рис. 20).

В момент часу t_0 вона зайняла положення M_0 і пройшла шлях $S_0 = f(t_0)$. Знайдемо швидкість точки в момент часу t_0.

Припустимо, що за довільно вибраний проміжок часу Δt, починаючи з моменту t_0, точка перемістилася на відстань Δs і зайняла положення M_1. Тоді $t_1 = t_0 + \Delta t$, $s_1 = f(t_1) = s_0 + \Delta s$.

За проміжок часу Δі матеріальна точка проходить шлях $\Delta x = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Середня швидкість v руху на проміжку M_0M_1 дорівнює: $v_{сер.} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Ця величина дає лише приблизне уявлення про швидкість руху матеріальної точки на розглянутому проміжку. Вона буде більш точніша, якщо проміжок Δt буде зменшуватися.

Таким чином, можна вважати, якщо Δt наближається до нуля, то середня швидкість $v_{сер.} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ буде наближатися до швидкості в момент часу t_0.

Миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, в момент часу t_0 називається границя середньої швидкості при умові, що Δt наближається до нуля.

$$\upsilon_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Числа Δt, Δs називаються відповідно приростом часу, приростом шляху.

Отже, миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, є границя відношення приросту шляху Δs до відповідного приросту часу Δt, коли приріст часу наближається до нуля.

Приклад 1.

Точка рухається прямолінійно по закону $s(t) = 5t^2 + t + 3$ (s — шлях в метрах, t – час в секундах). Знайдіть швидкість точки:

а) в довільний момент t_0; б) в момент часу t = 2 с.

Розв'язання

а) 1) нехай значення аргументу t_0 одержало приріст Δt, тоді $t_1 = t_0 + \Delta t$.

2) Знайдемо відповідний приріст шляху

$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = 5(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) + 3 - (5\,t_0^2 + t_0 + 3) = 5\,t_0^2 + 10\,t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + t_0 + \Delta t + 3 - 5t_0^2 - t_0 - 3 = 10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t$.

3) Знайдемо відношення приросту шляху до приросту часу (середню швидкість):

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta t(10t_0 + 1 + 5\Delta t)}{\Delta t} = 10t_0 + 1 + 5\Delta t$$

4) Знайдемо границю відношення приросту шляху до приросту часу (середньої швидкості):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(10t_0 + 1 + 5\Delta t\right) = 10t_0 + 1$$

Отже, миттєва швидкість точки в довільний момент часу t_0 дорівнює $10t_0 + 1$.

Отже, при заданому законі руху $s(t)$ миттєва швидкість $v(t)$ в довільний момент часу t обчислюється по формулі $v(t) = 10t + 1$.

б) Якщо t = - 2 с, то маємо $v(2) = 10 \cdot 2 + 1 = 21\ \left(\frac{м}{с}\right)$;

Відповідь: а) $10t + 1$;   б) $21\ \frac{м}{с}$.

II. Сприймання і усвідомлення поняття дотичної до кривої.

В курсі геометрії ви познайомились з означенням дотичної до кола: дотичною до кола називається пряма, яка лежить в площині кола і має з колом лише одну спільну точку. Таке означення дотичної не може бути перенесено на всі криві (парабола, синусоїда, гіпербола тощо).

Наприклад, вісь *OY* має тільки одну спільну точку з графіком функції $y = x^3$, проте її не можна вважати дотичною до кубічної параболи в точці *0* (рис. 21).

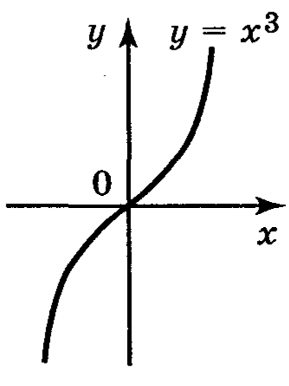

Рис. 21

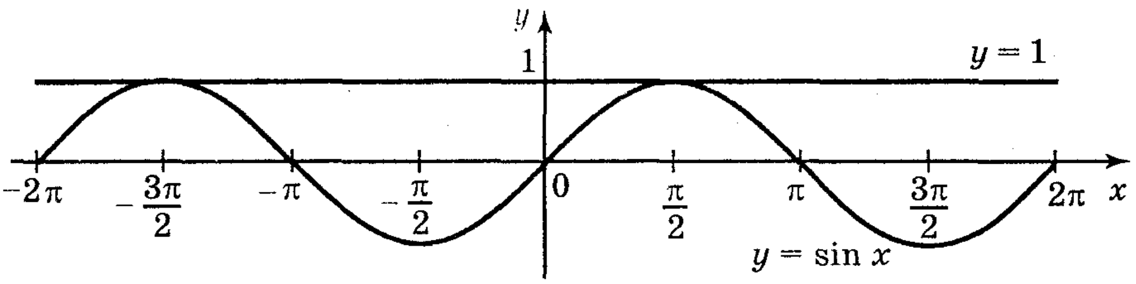

Рис. 22

Пряма $y = 1$ і синусоїда $y = \sin x$ мають безліч спільних точок (рис. 22), проте пряму $y = -1$ вважають дотичною до синусоїди.

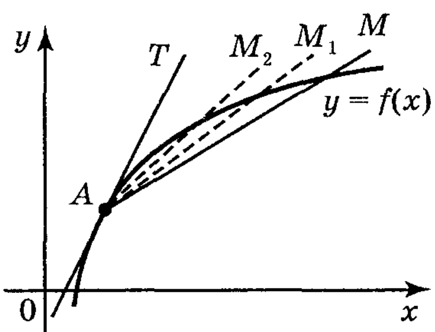

Рис. 23

Для введення означення дотичної до кривої розглянемо функцію *y = f(x)* і її графік — криву лінію (рис. 23). Нехай точки *A і M* належать графіку функції *y = f(x),* проведемо січну *AM.* Зафіксуємо точку А. Нехай точка *M,* рухаючись по кривій, наближається до точки А. При цьому січна *AM* буде повертатися навколо точки А і в граничному положенні при наближенні точки *M* до точки А січна займе положення прямої АТ. Пряму АТ називають дотичною до даної кривої в точці А.

Дотичною АТ до графіка функції *y = f(x)* в точці А називається граничне положення січної *AM,* коли точка *M,* рухаючись по кривій, наближається до точки А.

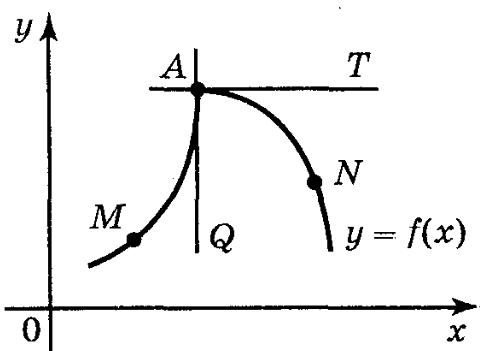

Рис. 24

Слід мати на увазі, що не в усякій точці кривої можна провести до неї дотичну. На рис. 24 зображено криву у = *f(x),* яка в точці А не має дотичної, бо якщо точка *M* буде наближатися до точки А по лівій частині кривої, то січна МА займе граничне положення AQ.
Якщо точка *N* буде наближатися по правій частині кривої, то січна *NA* займе граничне положення *AT.* Одержуємо дві різні прямі AQ і АТ, це означає, що в точці А до даної кривої дотичної не існує.

Поставимо задачу: провести дотичну до графіка функції *y = f(x)* в точці $A(x_0; y_0)$.

Дотична — це пряма, а положення прямої $y = kx + b$, яка проходить через точку $A(x_0; y_0)$ визначається кутовим коефіцієнтом прямої $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут між прямою і додатнім напрямом осі *OX* (рис. 25).

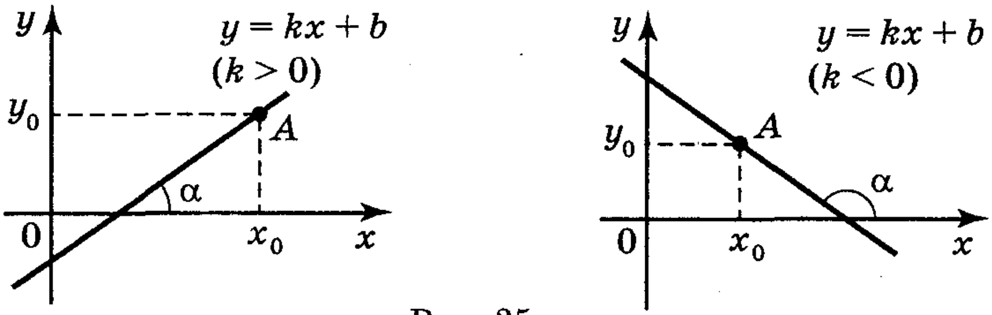

Рис. 25

Отже, провести дотичну до графіка означає знайти число *k*.

Нехай в точці А(x_0; y_0) (рис. 26) кривої $y = f(x)$ існує дотична, визначимо кутовий коефіцієнт дотичної. Для цього:

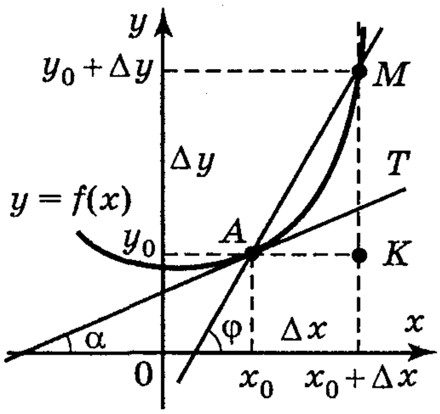

Рис. 26

1) Надамо аргументу x_0 приросту Δx, одержимо нове значення аргументу $x_0 + \Delta x$.

2) Знайдемо відповідний приріст функції: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

3) Знайдемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Із трикутника *AMK* маємо: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \angle MAK$. Так як $\angle MAK = \varphi$ — куту нахилу січної *AM з* додатним напрямом осі *OX,* то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi$.

4) Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$ і точка М буде переміщуватися по кривій, наближаючись до точки А.

При цьому січна *AM* буде повертатися навколо точки А, а величина кута φ буде змінюватися зі зміною Δx. Граничним положенням січної *AM* при $\Delta x \to 0$ буде дотична АТ, яка утворює з додатним напрямом осі ОХ деякий кут, величину якого позначимо через α.

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ — кутовий коефіцієнт дотичної.

Завдання:

1. Повторити §2, звернути увагу с. 100-102.

Опрацювати теоретичний матеріал §3, п. 18.

2. Законспектувати означення.

3. Виконати письмово вправи: 18.1-18.3.

4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

https://naurok.com.ua/prezentaciya-trigonometrichni-funkci-riven-standartu-10-klas-86038.html https://vseosvita.ua/library/prezentacia-na-temu-zadaci-so-privodat-do-ponatta-pohidnoi-74361.html

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .