

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВИ ЇХНІХ ГРАФІКІВ.

Можна запропонувати наступну схему дослідження функції $y = f(x)$ та побудови її графіка:

- 1) Знаходимо область визначення функції $y = f(x)$.
- 2) Досліджуємо функцію на парність, непарність та періодичність (для тригонометричних функцій).
- 3) Знаходимо точки перетину функції $y = f(x)$ з осями координат (якщо їх можна знайти).
- 4) Знаходимо похідну $f'(x)$ та критичні точки.
- 5) Знаходимо проміжки зростання, спадання, точки екстремуму, екстремуми функцій.
- 6) Досліджуємо поведінку функції на кінцях проміжків області визначення (якщо можна дослідити).
- 7) Використовуючи отримані результати, будуємо графік функцій або його ескіз.

Приклад 1. Дослідити функцію $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4$ та побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Область визначення: $D(f) = \mathbb{R}$.

2) $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^4 - (-x)^2 - 4 = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = f(x)$; функція парна, її графік симетричний відносно осі ординат.

3) Точка перетину з віссю Oy : $x = 0$; $y = \frac{1}{2} \cdot 0^4 - 0^2 - 4$; $y = -4$

Точки перетину з віссю Ox : $y = 0$; $\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = 0$; $x_{1,2} = 2$ (розв'яжіть рівняння самостійно).

Отже, маємо точки перетину з осями координат: $(0; -4)$, $(2; 0)$, $(-2; 0)$.

4) $f'(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1)$; критичні точки $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$.

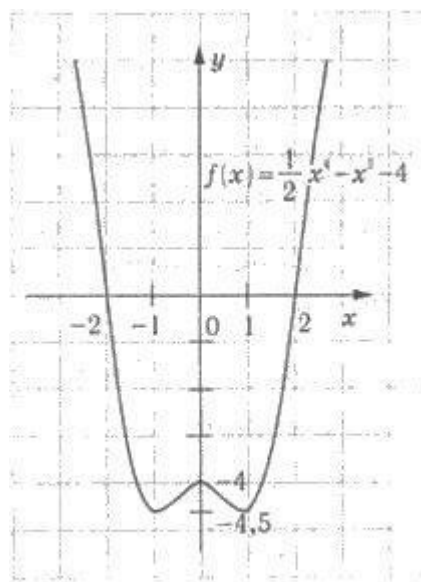
5) Складаємо таблицю у якій позначаємо проміжки зростання, проміжки спадання та критичні точки:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↓	$-4,5$	↑	-4	↓	$-4,5$	↑
Висновок	Функція спадає	min	Функція зростає	max	Функція спадає	min	Функція зростає

В таблиці наведено також висновки про критичні точки (чи є вони точками максимуму чи точками мінімуму).

6) Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то немає кінців області визначення.

7) Будуємо графік функції використовуючи результати дослідження - малюнок 105.



мал. 105

Побудова графіка функцій (або його ескізу) допомагає при розв'язуванні деяких задач, пов'язаних із знаходженням коренів рівняння (їхньої кількості, найближчих значень тощо).

Приклад

1) Дослідіть функцію $f(x) = (x - 3) \sqrt{x}$ та побудуйте ескіз її графіка.

2) Скільки коренів має рівняння $(x - 3) \sqrt{x} = a$ залежно від значення параметра a ?

Розв'язання завдання 1.

1) $D(f) = [0; +\infty)$.

2) Функція ні парна, ні непарна, оскільки її область визначення не симетрична відносно нуля.

3) Точка перетину з віссю Oy: $x = 0$; $y = 0$. Точки перетину з віссю Ox: $y = 0$; $(x - 3) \sqrt{x} = 0$; $x_1 = 3$; $x_2 = 0$.

$$\begin{aligned} 4) f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{x} + (x - 3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 3}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{3(x - 1)}{2\sqrt{x}}; \end{aligned}$$

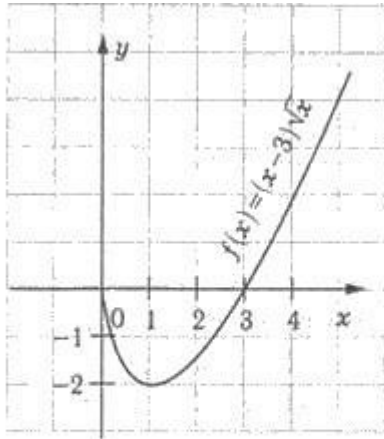
$x = 1$ - критична точка.

5) Складаємо таблицю:

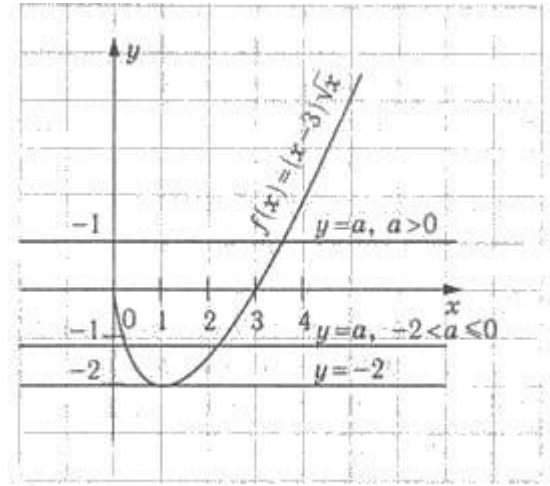
X	0	(0;1)	1	(1;+∞)
$f'(x)$	не існує	-	+	+
$f(x)$	0	↓	-2	↑
Висновок	Точка належить графіку	Функція спадає	min	Функція зростає

6) Точка (0;0) належить графіку функції.

7) Ескіз графіка показано на малюнку 106.



мал. 106



мал. 106а

Розв'язування завдання 2. Будемо розв'язувати рівняння $(x - 3) \sqrt{x} = a$ графічно. Для цього будемо графіки функцій $f(x) = (x - 3) \sqrt{x}$ та $y = a$, a - число (мал. 106а). Для різних значень a кількість коренів рівняння буде різною.

Якщо $a = -2$, то графіки перетинаються в одній точці, а тому розглядуване рівняння має один корінь. Якщо $-2 < a \leq 0$, то графіки перетинаються в двох точках, а тому розглядуване рівняння має два кореня. Якщо ж $a > 0$, то графіки перетинаються в одній точці, і рівняння має один корінь.

Остаточно маємо: якщо $a = -2$ або $a > 0$, то рівняння має один корінь, якщо $-2 < a \leq 0$, то рівняння має два корені.

Домашнє завдання:

Дослідити функцію та побудувати графік

$$y = x^2 - 6x + 5;$$

$$y = x^3 - 3x$$