

Centre d'inertie d'un ensemble matériel

1. Centre d'inertie d'un ensemble matériel

Masse m d'un ensemble matériel E

$\mu \geq 0$ étant la masse volumique au point P (en $[M].[L]^{-3}$) alors $m = \iiint_{P \in E} \mu \cdot dV = \mu \cdot V > 0$

Dans le cas d'une pièce plane (tôle...) on définit masse surfacique μ (kg.m^{-2})

Dans le cas d'une pièce filaire (barre, tube...) on définit la masse linéique μ (kg.m^{-1})

Centre d'inertie G

C'est le point G unique qui vérifie l'égalité vectorielle $\iiint_{P \in E} \vec{GP} \cdot dm = \vec{0}$

Coordonnées du centre d'inertie G dans le repère $R_O = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \iiint_{P \in E} \vec{OP} \cdot dm$$

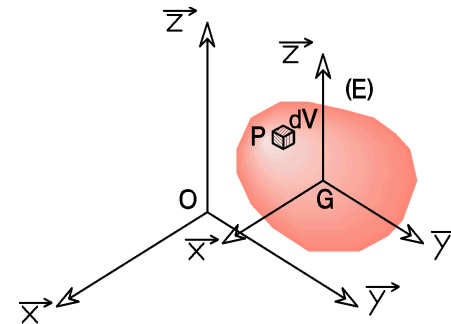
$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \cdot \iiint_{P \in E} x_P \cdot dV \\ y_G = \frac{1}{m} \cdot \iiint_{P \in E} y_P \cdot dV \\ z_G = \frac{1}{m} \cdot \iiint_{P \in E} z_P \cdot dV \end{cases}$$

Si $\vec{OP} = x_P \cdot \vec{x} + y_P \cdot \vec{y} + z_P \cdot \vec{z}$ et $\vec{OG} = x_G \cdot \vec{x} + y_G \cdot \vec{y} + z_G \cdot \vec{z}$ alors :

Détermination pratique du centre d'inertie

Élément de symétrie

Si un élément géométrique (plan, axe, point) est élément de symétrie matérielle (c'est-à-dire qu'au symétrique d'un point P, dm correspond le même élément de masse dm) alors le centre d'inertie est sur cet élément géométrique.



Éléments	μ (kg.m^{-3})	Température de fusion ($^{\circ}\text{C}$)
Eau pure	1 000	0
Magnésium	1 740	648,8
Aluminium	2 700	660,3
Acier (fer + carbone)	7 800	1535 (fer pur)
Cuivre	8 960	1083,4
Or	19 300	1064,4
Osmium	22 600	3045

Unicité du centre d'inertie. Supposons qu'il existe deux centres d'inertie G_1 et G_2 , alors :

$$\iiint_{P \in E} \vec{G_1 P} \cdot dm = \vec{0} = \iiint_{P \in E} (\vec{G_1 G_2} + \vec{G_2 P}) \cdot dm = \vec{G_1 G_2} \cdot \iiint_{P \in E} dm + \iiint_{P \in E} \vec{G_2 P} \cdot dm = \vec{0}$$

$m > 0$ car G_2 Cdl donc $G_1 = G_2$

Détermination de $\vec{OG}$

$$\iiint_{P \in E} \vec{GP} \cdot dm = \vec{0} = \iiint_{P \in E} (\vec{GO} + \vec{OP}) \cdot dm = \vec{GO} \cdot \iiint_{P \in E} dm + \iiint_{P \in E} \vec{OP} \cdot dm = m \cdot \vec{GO} + \iiint_{P \in E} \vec{OP} \cdot dm = \vec{0}$$

Elément de symétrie

Supposons que le plan $(A, \vec{x}, \vec{z})$ soit plan de symétrie de l'ensemble E.

Notons E'' le 1/2 ensemble tel que

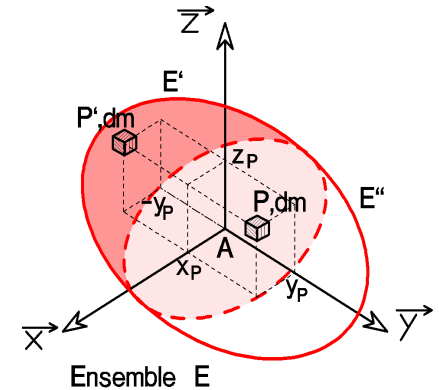
$\forall P'' \in E'' \Rightarrow y_{P''} \geq 0$ alors il existe P' tel que :

$$\begin{cases} x_{P'} = x_{P''} \\ z_{P'} = z_{P''} \text{ et } dm(P') = dm(P'') \\ y_{P'} = -y_{P''} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m \cdot y_G &= \iiint_{P \in E} y_P \cdot dm = \iiint_{P \in E'} y_{P'} \cdot dm + \iiint_{P \in E''} y_{P''} \cdot dm \\ &= \iiint_{P \in E'} y_{P'} \cdot dm - \iiint_{P \in E'} y_{P'} \cdot dm = 0 \end{aligned}$$

Donc $y_G = 0$

G est bien situé dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{z})$

**2. Propriétés complémentaires****2.1. Centre d'inertie d'un ensemble de masses ponctuelles**

Considérons un ensemble de n points A_i affectés chacun d'une masse m_i . Alors le centre d'inertie G de cet ensemble de points est défini par la formule barycentrique

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot \vec{OA_i} \quad \text{avec} \quad m = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \neq 0$$

2.2. Centre d'inertie d'un ensemble de solides

Considérons un ensemble E constitué de n solide S_i distincts, de masses respectives m_i et de centres d'inertie G_i . Alors le centre d'inertie de l'ensemble E est défini par

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot \vec{OG_i}$$

En particulier, le centre d'inertie G de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 situées en A_1 et A_2 se situe dans le segment $[A_1, A_2]$. En effet, en choisissant $O = A_1$ comme point origine :

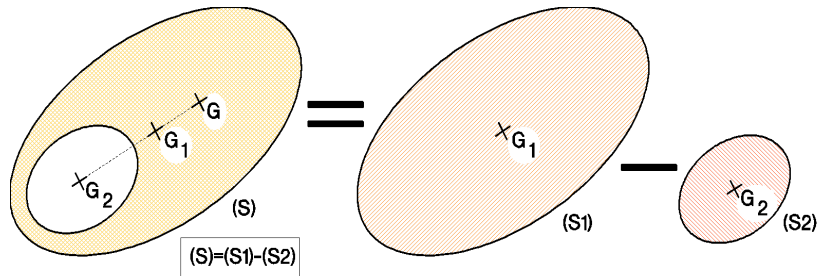
$$\vec{A_1 G} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{A_1 A_2}$$

Ensemble de solide

$$\vec{OG_i} = \frac{1}{m_i} \iiint_{P \in S_i} \vec{OP} \cdot dm$$

Chacun des centres d'inertie G_i est défini par

2.3. Centre d'inertie d'un solide « troué » : formule des masses « négative »



On note $m = m_1 - m_2$

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_1 - m_2} (m_1 \vec{OG}_1 - m_2 \vec{OG}_2)$$

Et en choisissant $O = G_1$ comme point origine

$$\vec{G_1G} = -\frac{m_2}{m_1 - m_2} \cdot \vec{G_1G_2}$$

Le centre d'inertie de l'ensemble S est défini par

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \iiint_{P \in E} \vec{OP} \cdot dm = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \iiint_{P \in S_i} \vec{OP} \cdot dm = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{OG}_i$$

Solide « troué »

$(S1) = (S) + (S2)$ donc d'après §2.2

$$\vec{OG}_1 = \frac{1}{m_1} (m \cdot \vec{OG} + m_2 \cdot \vec{OG}_2) = \frac{1}{m_1} ((m_1 - m_2) \cdot \vec{OG} + m_2 \cdot \vec{OG}_2)$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_1 - m_2} (m_1 \cdot \vec{OG}_1 - m_2 \cdot \vec{OG}_2)$$

D'où

3. Théorèmes de GULDIN

3.1. Premier théorème de GULDIN

L'aire $\mathcal{A}$ engendrée par une ligne plane, de masse linéique constante $\mu = 1$, tournant autour d'un axe de son plan ne la traversant pas est égale au produit de la longueur L de la ligne par la longueur du cercle décrit par son centre d'inertie :

$$A = (2 \cdot \pi \cdot y_G) \cdot L = (2 \cdot \pi \cdot d) \cdot L$$

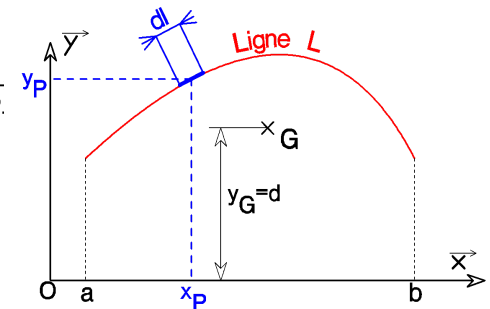
1^{er} théorème de Guildin

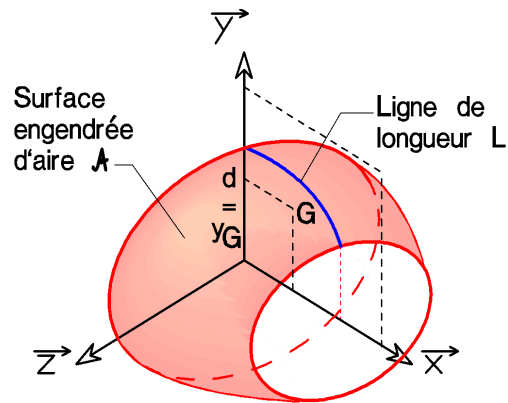
- La position de centre de gravité est définie par :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_{P \in \text{ligne}} \vec{OP} \cdot \mu \cdot dl = \frac{1}{L} \int_{P \in \text{ligne}} \vec{OP} \cdot \mu \cdot dl$$

$$m = \int_{P \in \text{ligne}} \mu \cdot dl = \mu \cdot \int_{P \in \text{ligne}} dl = \mu \cdot L$$

Car

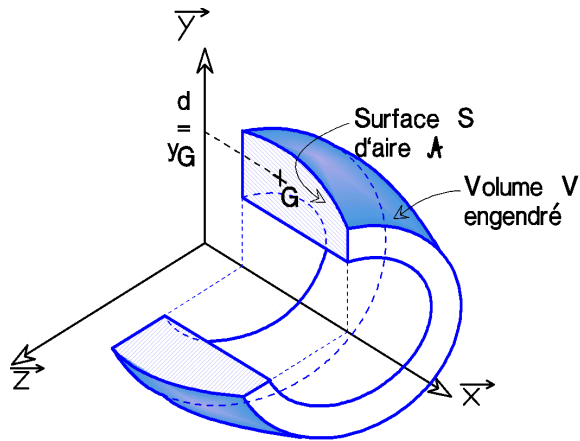




3.2. Deuxième théorème de GULDIN

Le volume V engendré par une surface plane, de masse surfacique constante $\mu = 1$, tournant autour d'un axe de son plan ne la traversant pas est égale au produit de l'aire A de cette surface par la longueur du cercle décrit par son centre d'inertie ($2.\pi.y_G$).

$$V = (2.\pi.y_G).A = (2.\pi.d).A$$



$$y_G = \frac{1}{L} \int_{P \in \text{ligne}} y.dl$$

- En projection

- L'aire engendrée par la rotation de l'élément de ligne dl s'écrit $dA = 2.\pi.y_P.dl$ donc la

$$A = \int_{P \in L} 2.\pi.y_P.dl = 2.\pi \cdot \int_{P \in L} y_P.dl = 2.\pi.L.y_G$$

surface totale A engendrée est

2^{ème} théorème de Guildin

- La position du centre de gravité est définie par :

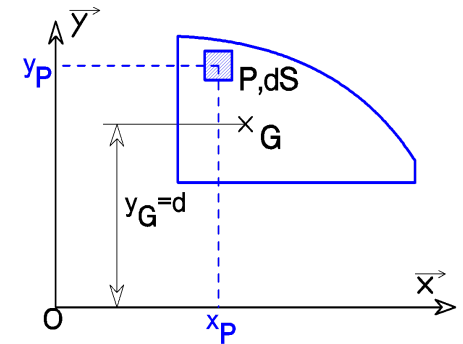
$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \iint_{P \in S} \vec{OP}.\mu.dS = \frac{1}{A} \iint_{P \in S} \vec{OP}.dS$$

$$m = \iint_{P \in S} \mu.dS = \mu \cdot \iint_{P \in S} dS = \mu.A$$

Car

$$y_G = \frac{1}{A} \iint_{P \in S} y_P.dS$$

- En projection



- Le volume engendré par l'aire élémentaire dS s'exprime par $dV = 2.\pi.y_P.dS$ donc le volume

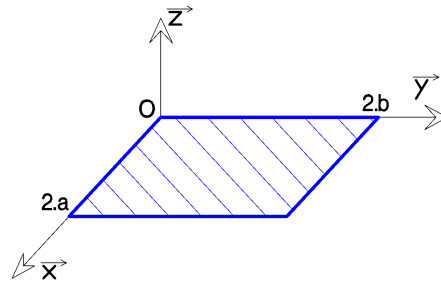
$$V = \iint_{P \in S} dV = 2.\pi \iint_{P \in S} y_P.dS = 2.\pi.y_G.A$$

total V engendré par la rotation de la surface (S) est

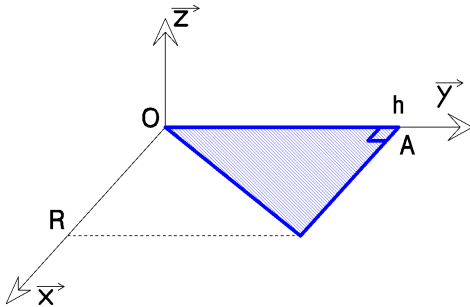
4. Exercices

4.1. Plaque rectangulaire

On considère une plaque rectangulaire homogène, de masse surfacique constante μ , d'épaisseur négligeable devant les autres dimensions. Déterminer sa masse m ainsi que la position de son centre d'inertie G



4.2. Plaque triangulaire

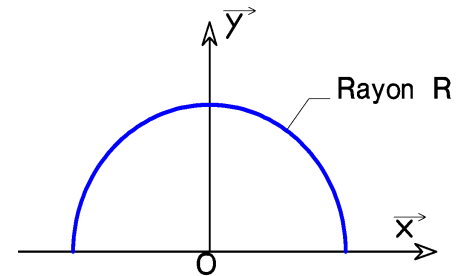


On considère une plaque triangulaire, rectangle en A, homogène, de masse surfacique constante μ , d'épaisseur négligeable devant les autres dimensions.

Déterminer sa masse m ainsi que la position de son centre d'inertie G .

En déduire le volume d'un cône de base R et de hauteur h .

4.4. Demi cercle

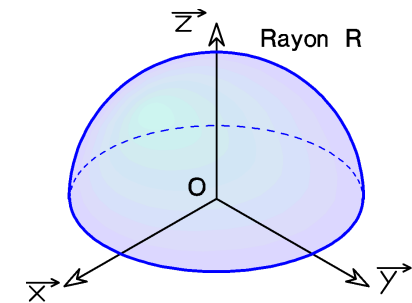


Même question.

En déduire l'aire d'une sphère de rayon R

4.4. Demie sphère

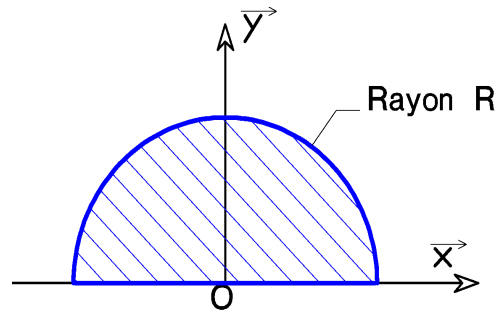
Même question



4.3. Demi disque

Même question.

En déduire le volume d'une sphère de rayon R

**4.5. Tôle découpée**

Même question

