Centre d'inertie d'un ensemble matériel

1. Centre d'inertie d'un ensemble matériel

Masse m d'un ensemble matériel E

$m = \iiint_{P\in E} \mu.dV \underset{\mu=cste}{=} \mu.V > 0$

$\mu \geq 0$ étant la masse volumique au point P (en $[M].[L]^{-3}$) alors

Dans le cas d'une pièce plane (tôle…) on définit masse surfacique μ ($kg.m^{-2}$)

Dans le cas d'un pièce filaire (barre, tube…) on définit la masse linéique μ ($kg.m^{-1}$)

Centre d'inertie G

C'est le point G unique qui vérifie l'égalité vectorielle $\iiint_{P\in E} \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$

Coordonnées du centre d'inertie G dans le repère $R_O = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \iiint_{P\in E} \overrightarrow{OP}.dm$

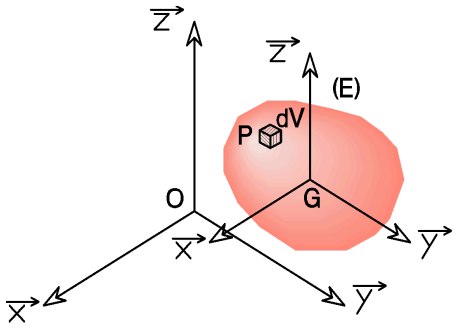
Si $\overrightarrow{OP} = x_P.\vec{x} + y_P.\vec{y} + z_P.\vec{z}$ et $\overrightarrow{OG} = x_G.\vec{x} + y_G.\vec{y} + z_G.\vec{z}$ alors :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}.\iiint_{P\in E} x_P.dV \\ y_G = \frac{1}{m}.\iiint_{P\in E} y_P.dV \\ z_G = \frac{1}{m}.\iiint_{P\in E} z_P.dV \end{cases}$$

Détermination pratique du centre d'inertie

Elément de symétrie

Si un élément géométrique (plan, axe, point) est élément de symétrie matérielle (c'est-à-dire qu'au symétrique d'un point P, dm correspond le même élément de masse dm) alors le centre d'inertie est sur cet élément géométrique.



Eléments	μ $(kg.m^{-3})$	Température de fusion (°C)
Eau pure	1 000	0
Magnésium	1 740	648,8
Aluminium	2 700	660,3
Acier (fer + carbone)	7 800	1535 (fer pur)
Cuivre	8 960	1083,4
Or	19 300	1064,4
Osmium	22 600	3045

Unicité du centre d'inertie. Supposons qu'il existe deux centres d'inertie G_1 et G_2, alors :

$$\iiint_{P\in E} \overrightarrow{G_1P}.dm = \vec{0} = \iiint_{P\in E} (\overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2P}).dm = \overrightarrow{G_1G_2}.\underbrace{\iiint_{P\in E} .dm}_{m>0} + \underbrace{\iiint_{P\in E} \overrightarrow{G_2P}.dm}_{\vec{0} \text{ car } G_2 \text{ CdI}} = \vec{0}$$

donc $G_1 = G_2$

Détermination de $\overrightarrow{OG}$

$$\iiint_{P\in E} \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0} = \iiint_{P\in E} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}).dm = \overrightarrow{GO} \underbrace{\iiint_{P\in E} dm}_{m} + \iiint_{P\in E} \overrightarrow{OP}.dm = m.\overrightarrow{GO} + \iiint_{P\in E} \overrightarrow{OP}.dm = \vec{0}$$

Elément de symétrie

Supposons que le plan $(A,\vec{x},\vec{z})$ soit plan de symétrie de l'ensemble E.
Notons E'' le ½ ensemble tel que

$\forall P'' \in E'' \Rightarrow y_{P''} \geq 0$ alors il existe P' tel que :

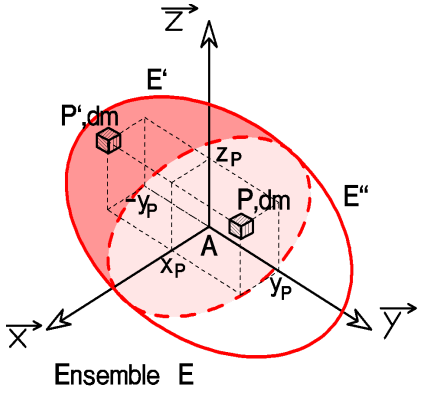
$$\begin{cases} x_{P'} = x_{P''} \\ z_{P'} = z_{P''} \\ y_{P'} = -y_{P''} \end{cases} \text{ et } dm(P') = dm(P'')$$

$$m.y_G = \iiint_{P\in E} y_P.dm = \iiint_{P\in E'} y_{P'}.dm + \iiint_{P\in E''} y_{P''}.dm$$

$$= \iiint_{P\in E'} y_{P'}.dm - \iiint_{P\in E'} y_{P'}.dm = 0$$

Donc $y_G = 0$

G est bien situé dans le plan $(A,\vec{x},\vec{z})$



2. Propriétés complémentaires

2.1. Centre d'inertie d'un ensemble de masses ponctuelles

Considérons un ensemble de n points A_i affectés chacun d'une masse m_i. Alors le centre d'inertie G de cet ensemble de points est défini par la formule barycentrique

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=n} m_i.\overrightarrow{OA_i} \quad \text{avec} \quad m = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \neq 0$$

En particulier, le centre d'inertie G de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 situées en A_1 et A_2 se situe dans le segment $[A_1,A_2]$. En effet, en choisissant $O = A_1$ comme point origine :

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{A_1A_2}$$

2.2. Centre d'inertie d'un ensemble de solides

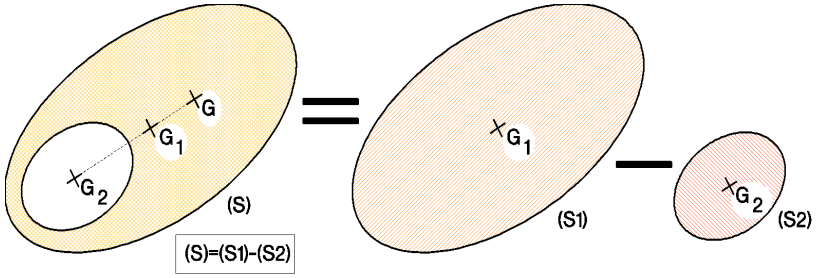
Considérons un ensemble E constitué de n solide S_i distincts, de masses respectives m_i et de centres d'inertie G_i. Alors le centre d'inertie de l'ensemble E est défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=n} m_i.\overrightarrow{OG_i}$$

Ensemble de solide

Chacun des centres d'inertie G_i est défini par $\overrightarrow{OG_i} = \frac{1}{m_i}\iiint_{P\in S_i} \overrightarrow{OP}.dm$

2.3. Centre d'inertie d'un solide « troué » : formule des masses « négative »



On note $m = m_1 - m_2$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_1 - m_2}(m_1.\overrightarrow{OG_1} - m_2.\overrightarrow{OG_2})$$

Et en choisissant $O = G_1$ comme point origine

$$\overrightarrow{G_1G} = -\frac{m_2}{m_1 - m_2}.\overrightarrow{G_1G_2}$$

Le centre d'inertie de l'ensemble *S* est défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\iiint_{P\in E}\overrightarrow{OP}.dm = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=n}\iiint_{P\in S_i}\overrightarrow{OP}.dm = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=n} m_i.\overrightarrow{OG_i}$$

Solide « troué »

(S1)=(S)+(S2) donc d'après §2.2

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{m_1}(m.\overrightarrow{OG} + m_2.\overrightarrow{OG_2}) = \frac{1}{m_1}((m_1 - m_2).\overrightarrow{OG} + m_2.\overrightarrow{OG_2})$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_1 - m_2}(m_1.\overrightarrow{OG_1} - m_2.\overrightarrow{OG_2})$$

D'où

3. Théorèmes de GUILDIN

3.1. Premier théorème de GULDIN

L'aire $\mathcal{A}$ engendrée par une ligne plane, de masse linéique constante μ = 1, tournant autour d'un axe de son plan ne la traversant pas est égale au produit de la longueur L de la ligne par la longueur du cercle décrit par son centre d'inertie :

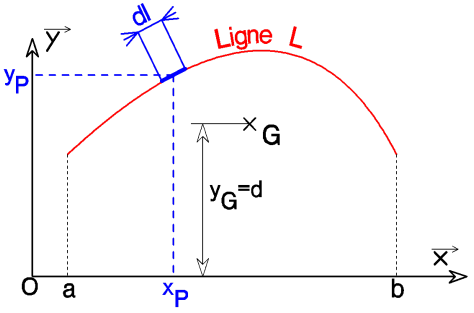
$$A = (2.\pi.y_G).L = (2.\pi.d).L$$

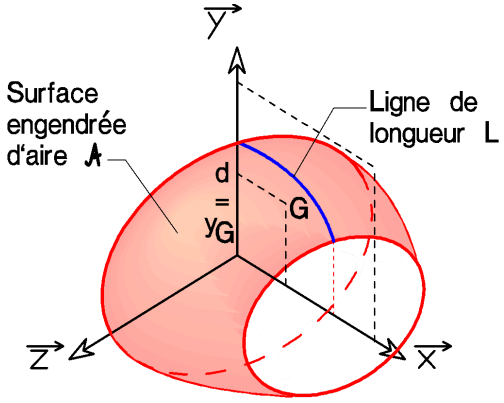
1er théorème de Guildin

- La position de centre de gravité est définie par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_{P\in ligne}\overrightarrow{OP}.\mu.dl = \frac{1}{L}\int_{P\in ligne}\overrightarrow{OP}.$$

Car $m = \int_{P\in ligne}\mu.dl = \mu.\int_{P\in ligne}dl = \mu.L$





- En projection $y_G = \frac{1}{L}\int_{P\in ligne} y.dl$

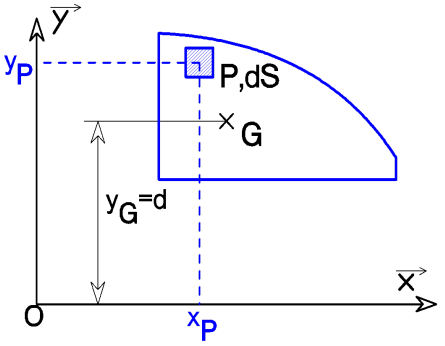
- L'aire engendrée par la rotation de l'élément de ligne dl s'écrit $dA = 2.\pi.y_P.dl$ donc la surface totale $\mathcal{A}$ engendrée est $A = \int_{P\in L} 2.\pi.y.dl = 2.\pi.\int_{P\in L} y.dl = 2.\pi.L.y_G$

2ième théorème de Guildin

- La position du centre de gravité est définie par : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\iint_{P\in S}\overrightarrow{OP}.\mu.dS = \frac{1}{A}\iint_{P\in S}\overrightarrow{OP}.dS$

Car $m = \iint_{P\in S}\mu.dS = \mu.\iint_{P\in S} dS = \mu.A$

- En projection $y_G = \frac{1}{A}\iint_{P\in S} y_P.dS$

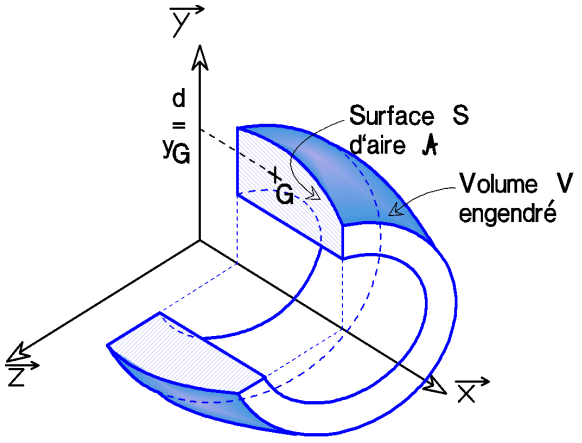


- Le volume engendré par l'aire élémentaire dS s'exprime par $dV = 2.\pi.y_P.dS$ donc le volume total V engendré par la rotation de la surface (*S*) est $V = \iint_{P\in S} dV = 2.\pi\iint_{P\in S} y.dS = 2.\pi.y_G.A$

3.2. Deuxième théorème de GUILDIN

Le volume V engendré par une surface plane, de masse surfacique constante $\mu = 1$, tournant autour d'un axe de son plan ne la traversant pas est égale au produit de l'aire $\mathcal{A}$ de cette surface par la longueur du cercle décrit par son centre d'inertie ($2.\pi.y_G$).

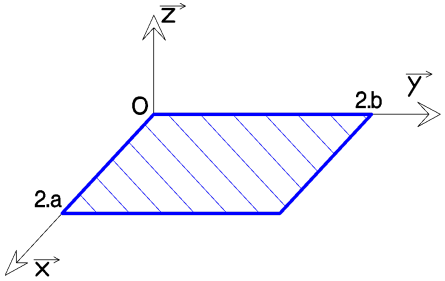
$V = (2.\pi.y_G).A = (2.\pi.d).A$



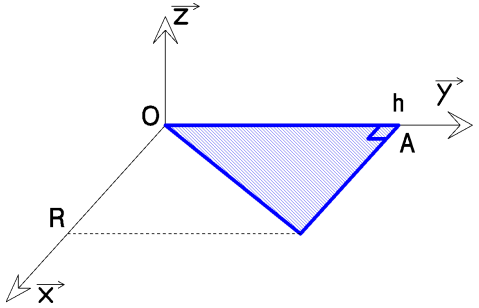
4. Exercices

4.1. Plaque rectangulaire

On considère une plaque rectangulaire homogène, de masse surfacique constante μ, d'épaisseur négligeable devant les autres dimensions.
Déterminer sa masse m ainsi que la position de son centre d'inertie G



4.2. Plaque triangulaire

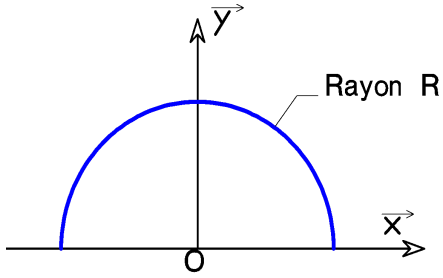


On considère une plaque triangulaire, rectangle en A, homogène, de masse surfacique constante μ, d'épaisseur négligeable devant les autres dimensions.

Déterminer sa masse m ainsi que la position de son centre d'inertie G.

En déduire le volume d'un cône de base R et de hauteur h.

4.4. Demi cercle

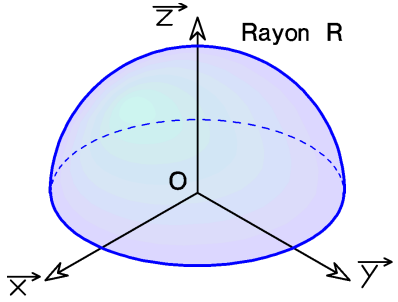


Même question.

En déduire l'aire d'une sphère de rayon R

4.4. Demie sphère

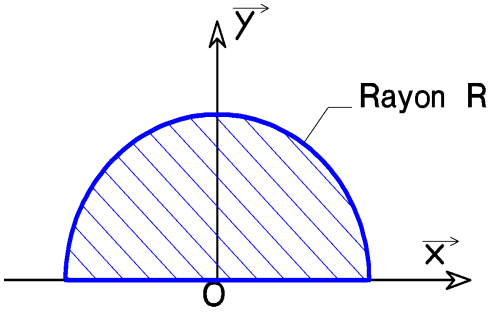
Même question



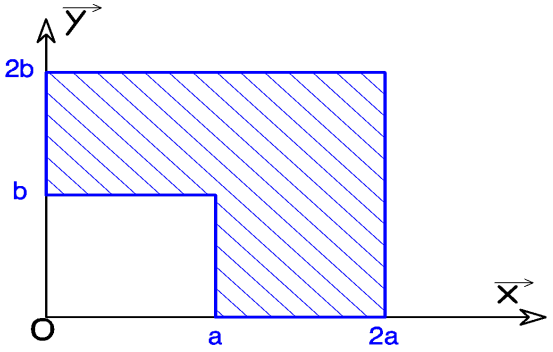
4.3. Demi disque

Même question.

En déduire le volume d'une sphère de rayon R



4.5. Tôle découpée



Même question