

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду $y' = f(x)\varphi(y)$, де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Права частина рівняння (6) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (6), треба відокремити змінні.

Для цього замінімо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (6) на $\varphi(y)$ (вважатимемо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx , тоді рівняння (6) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x) dx \quad (7)$$

Диференціальне рівняння виду (7), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x , а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y , називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними*.

Оскільки рівняння (7) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x) dx + C$$

Диференціальне рівняння (7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$$

Приклад 1.2. Знайти загальний розв'язок рівняння $(1+x^2)dy + ydx = 0$. Знайти його частинний розв'язок при заданих початкових умовах: $y(0) = 1$.

- Розділимо обидві частини рівняння на $(1+x^2)y \neq 0$.

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{1+x^2} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C_1$$

$$y = e^{-\operatorname{arctg} x + C_1} = e^{-\operatorname{arctg} x + \ln C} = Ce^{-\operatorname{arctg} x}, \quad C = \text{const}$$

Це загальний розв'язок рівняння. Знайдемо його частинний розв'язок:

$$1 = Ce^{-\operatorname{arctg} 0}, \quad 1 = Ce^0, \quad C = 1$$

Отже, $y = e^{-\operatorname{arctg} x}$ - частинний розв'язок рівняння. •

Розглянемо рівняння $y' = f(ax+by+c)$ (8), де a, b, c - задані числа.

Заміною $u = ax+by+c$ рівняння (8) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx} - a \right) \cdot \frac{1}{b}$$

Підставимо у рівняння (8):

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{a}{b} = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u)$$

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx$$

Інтегруючи це рівняння і замінюючи u на $ax+by+c$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (8).

Приклад 1.3. Розв'язати рівняння $y' = (x+y)^2$.

● Покладемо $u = x + y$, тоді $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ або $\frac{du}{dx} = 1 + u^2$. Звідки $\frac{du}{1+u^2} = dx$.
 Інтегруючи це рівняння, знаходимо $\arctg u = x + C$, тобто $\arctg(x + y) = x + C$.
 загальний розв'язок рівняння. ●

► ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається диференціальним рівнянням першого порядку?
2. Які диференціальні рівняння першого порядку називаються неявним ДР?
3. Запишіть диференціальні рівняння першого порядку в диференціальній формі.
4. Що називається розв'язком диференціального рівняння першого порядку?
5. Сформулюйте теорему про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку (теорема Коші).
6. Що називається частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку?
7. Що називається рівнянням з відокремлюваними змінними ?
8. Алгоритм розв'язку диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.