

DÉFENSE GÉNÉRALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION À

**l'École Nationale Supérieure des Ingénieurs des
Études et Techniques d'Armement**

1996

PHYSIQUE

Option M

Durée : 4 heures

Il est demandé de laisser une marge de 4 cm à gauche de la page.
Les graphiques ou dessins demandés sont à tracer directement sur la copie.

L'épreuve comporte trois problèmes indépendants à **traiter sur des copies séparées**.

L'ensemble des figures référencées dans le texte est situé en fin de sujet.

PREMIER PROBLÈME

I - Étude du mouvement d'une fusée à un seul étage :

Une fusée (Figure 1) a les caractéristiques suivantes :

- m_0 : masse totale de la fusée au départ
- $m(t)$: masse de la fusée à l'instant t
- $W^{\rightarrow}$: vitesse d'éjection des gaz brûlés relativement au référentiel de la fusée
- D : débit massique, supposé constant, des gaz brûlés

Durant la phase ascensionnelle verticale, la fusée est en mouvement de translation selon l'axe Oz de vecteur unitaire $u_z^{\rightarrow}$. Les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- le champ gravitationnel est supposé uniforme : $g^{\rightarrow} = -g_0 u_z^{\rightarrow}$,
- les forces de frottement aérodynamiques (dus à l'air) sont négligées,
- le référentiel terrestre muni de l'axe Oz est galiléen et $W^{\rightarrow} = -W u_z^{\rightarrow}$ (avec $W > 0$).

On désigne par $A^{\rightarrow}(t) = A(t)u_z^{\rightarrow}$ et $V^{\rightarrow}(t) = V(t)u_z^{\rightarrow}$ l'accélération et la vitesse de la fusée à l'instant t .

- 1 - Établir l'équation du mouvement de translation de la fusée reliant $A(t)$, $m(t)$, W , D et g_0 .
- 2 - A quelle inégalité doivent satisfaire D , W , m_0, g_0 pour que la fusée puisse décoller en $t = 0$?
- 3 - Exprimer, à l'instant t , en fonction de m_0 , W , g_0 , D :
 - a - l'accélération $A(t)$ de la fusée,
 - b - sa vitesse $V(t)$ (avec $V(0) = 0$),
 - c - l'altitude $z(t)$ atteinte (avec $z(0) = 0$).

4 - Application numérique :

$$\begin{aligned} m_0 &= 200 \text{ t} & W &= 2\,500 \text{ m. s}^{-1} \\ D &= 1\,000 \text{ kg. s}^{-1} & g_0 &= 9,8 \text{ N. kg}^{-1} \end{aligned}$$

La masse du mélange propulsif (propergols) est au départ $m_1 = 150 \text{ t}$.

- a - Calculer $A(\tau)$, $V(\tau)$, $z(\tau)$ à l'instant τ où les propergols ont été épuisés.
- b - Quelle erreur relative commet-on en considérant $g^{\rightarrow}$ uniforme lors de cette phase propulsive ? On calculera le champ gravitationnel $g^{\rightarrow}(M) = g(r)u_z^{\rightarrow}$, à la distance r

du centre C de la Terre (en la considérant à symétrie sphérique) en fonction du rayon terrestre $R = 6\,400\text{ km}$ et de g_0 , r et u_z .

5 - A la fin de la phase propulsive ($t = \tau$), la masse de la fusée est $m(\tau)$.

On pose $\alpha = \frac{m_0}{m(\tau)}$ et $\eta = \frac{DW}{m_0 g_0}$

a - Calculer $V(\tau)$ en fonction de α , η et W .

b - Les contraintes technologiques imposent les valeurs typiques $\alpha = 10$ et $W = 3\,000\text{ ms}^{-1}$. Tracer sommairement la courbe $V(\tau)$ en fonction de η .

Quelle est la limite de $V(\tau)$ lorsque $\eta \rightarrow \infty$?

c - Conclure, sachant que pour placer un satellite sur une orbite basse, le lanceur doit atteindre une vitesse $v(\tau)$ de l'ordre de $9\,500\text{ ms}^{-1}$.

II - Stabilisation du satellite par gradient de gravitation :

Le lanceur a placé sur une orbite circulaire de centre C , de rayon R_G , un satellite terrestre de centre de masse G . (Figure 2).

Le référentiel géocentrique muni du repère T ($CXYZ$) est considéré comme galiléen.

Le référentiel (R^*) est le référentiel barycentrique du satellite.

Ce satellite est constitué de deux objets ponctuels P_1 et P_2 , de même masse M , reliés entre eux par une tige rigide P_1P_2 de masse négligeable et de longueur $2L$.

Tous les mouvements étudiés sont situés dans le plan CXY .

1 - Déterminer la force gravitationnelle $F^{\rightarrow}$ exercée par la Terre sur ce satellite en fonction de M , R , g_0 , $r_1^{\rightarrow} = CP_1^{\rightarrow}$ et $r_2^{\rightarrow} = CP_2^{\rightarrow}$. Donner son terme principal en fonction de M , R , g_0 , R_G et $u_r^{\rightarrow}$.

2 - En déduire la vitesse angulaire approchée du satellite Ω sur son orbite terrestre.

La calculer sachant que $R_G = 7\,400\text{ km}$.

3 - Déterminer le moment $M_{(G)}^{\rightarrow}$ en G des forces gravitationnelles exercées par la Terre sur le satellite en fonction de M , R , g_0 , $r_1^{\rightarrow}$, $r_2^{\rightarrow}$ et $GP_1^{\rightarrow}$.

4 - Déterminer le terme principal du développement limité en $\frac{L}{R_G}$ de $M_{(G)}^{\rightarrow}$ qu'on exprimera en fonction de M , R , g_0 , R_G , $\theta = (u_r^{\rightarrow}, GP_1^{\rightarrow})$, L et $u_z^{\rightarrow}$. Pour quelles valeurs de θ ce moment est-il nul ?

- 5 - En déduire les positions d'équilibre du satellite dans (R^*).
- 6 - Calculer la période des oscillations de faible amplitude du satellite au voisinage de la position d'équilibre stable si $L = 5$ m et $M = 5$ kg. On pose $\theta^* = (u_x^{\rightarrow}, GP_1^{\rightarrow})$.
- 7 - L'effet précédent est dit effet gravitationnel différentiel. Justifier ce terme.
Citer des phénomènes physiques susceptibles d'être expliqués par cet effet.

DEUXIÈME PROBLÈME

I - Mesure d'une inductance au pont de Maxwell :

Une bobine (B) est assimilée à un solénoïde d'axe Oz (vecteur unitaire $u_z^{\rightarrow}$), de section S carrée. Elle comporte N spires parcourues par le même courant I . Sa longueur est l .

- 1 - Calculer son inductance propre L en l'assimilant à un solénoïde de longueur très grande.

Application Numérique : $S = 24 \text{ cm}^2$; $N = 1\,000$; $l = 7 \text{ cm}$; $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

- 2 - Calculer sa résistance r sachant que les spires ont une section s et une résistivité ρ avec $s = 0,37 \text{ mm}^2$ et $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega.m$.

- 3 - La bobine (B) est placée dans la branche M_1M_4 d'un pont de mesure (de Maxwell) (décrit Figure 3), alimenté par un générateur idéal de tension sinusoïdale, de fréquence f , de f.é.m d'amplitude complexe $\underline{E}$. Les branches M_1M_2 et M_3M_4 sont des résistances pures P et Q . Les impédances complexes des branches M_1M_4 et M_2M_3 sont $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$.

$\underline{Z}_1$ est constituée par la bobine (B),

$\underline{Z}_2$ est constituée d'une résistance R et d'un condensateur C (réglable) branchés en dérivation entre M_2 et M_3 .

Dans la diagonale M_2M_4 , un détecteur (D) d'impédance infinie mesure la différence de potentiel d'amplitude complexe $\underline{U} = \underline{V}_{M4} - \underline{V}_{M2}$.

- a - Chercher la condition d'équilibre du pont et exprimer alors L et r en fonction des données.

- b - Application Numérique :

le pont est équilibré avec : $f = 1\,000 \text{ Hz}$; $P = 100 \Omega$; $Q = 200 \Omega$; $R = 2\,300 \Omega$; $C = 2,080 \mu\text{F}$

Calculer L et r avec 3 chiffres significatifs. Comparer ces résultats expérimentaux aux valeurs théoriques. Commenter.

- 4 - La bobine (B), en court-circuit, est placée dans un champ magnétique extérieur qui crée à travers elle un flux magnétique :

$$\Phi_e = \Phi_0 \text{ pour } t < 0 \text{ (}\Phi_0 \text{ est une constante) et } \Phi_e = 0 \text{ pour } t \geq 0.$$

a - Montrer que l'intensité $i(t)$ dans (B) à l'instant $t = 0$ est discontinue.

b - Tracer la courbe $i(t)$.

II- Circuits couplés : mesure d'une mutuelle inductance :

Deux bobines (B_1) et (B_2), d'inductances propres respectives L_1 et L_2 sont couplées par mutuelle inductance de valeur M . Leurs résistances sont négligeables. Elles sont parcourues par des intensités i_1 et i_2 .

1 - Rappeler les définitions de L_1 , L_2 et M . Préciser leur signe.

2 - Quelle est l'expression de l'énergie magnétique de ces deux circuits ?

3 - Le coefficient de couplage k entre (B_1) et (B_2) est défini par $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$. Démontrer que $0 < k < 1$.

4 - (B_1) et (B_2) sont branchées en série. Leur inductance équivalente est :

- L_e si le branchement est celui de la figure 4,
- L'_e (avec $L'_e < L_e$) si le branchement est celui de la Figure 5, les positions respectives de (B_1) et de (B_2) n'ayant pas changé.

a - Exprimer L_e et L'_e en fonction de L_1 , L_2 et $|M|$. En déduire $|M|$ en fonction de L_e et L'_e .

b - L_e et L'_e sont mesurées au pont de Maxwell. Pour $P = 100 \, \Omega$; $Q = 200 \, \Omega$, $R = 4\,700 \, \Omega$, l'équilibre du pont a été obtenu pour $C = 4,832 \, \mu\text{F}$ et pour $C = 3,642 \, \mu\text{F}$. Calculer $|M|$.

5 - (B_1) et (B_2) sont branchées en dérivation selon le montage de la Figure 6.

a - Calculer l'inductance équivalente L''_e .

- b - Un condensateur de capacité C , portant la charge initiale Q_0 , est branché à l'instant t aux bornes du dipôle précédent (Figure 7). Établir la loi donnant la différence de potentiel $u(t)$ aux bornes de C . Justifier physiquement la forme de la solution.

III - Circuits oscillants couplés :

On considère deux circuits fermés $\square$ et $\circ$, (L_1, C_1) et (L_2, C_2) , couplés par mutuelle inductance M . Leurs résistances sont négligeables. Dans le circuit $\square$, on a placé un générateur idéal de tension, de pulsation variable ω , de f.é.m. $\underline{E}$ (Figure 8).

On choisit $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, $M > 0$ et on pose $LC\omega_0^2 = 1$.

- 1 - Donner les expressions des intensités d'amplitude complexe I_1 et I_2 circulant dans les circuits $\square$ et $\circ$, en fonction des données $\underline{E}$, C , k , ω_0 et ω .

On pose $I_1 = I_1(\omega)e^{jj_1}$ et $I_2 = I_2(\omega)e^{jj_2}$. Calculer $\phi = \phi_2 - \phi_1$ et interpréter physiquement.

- 2 - Établir l'expression des pulsations de résonance ω_1 et ω_2 en fonction de ω_0 et k , ainsi que la pulsation ω_3 d'antirésonance (ou bouchon) que l'on définira.
- 3 - Donner l'allure des courbes $I_1(\omega)$ et $I_2(\omega)$. Comment seraient-elles modifiées si on tenait compte des résistances des deux circuits ?.
- 4 - Des valeurs des fréquences de résonance f_1 et f_2 , de celle de la fréquence propre f_0 de chaque circuit et de celle de C , déduire les valeurs de L et M en supposant le couplage lâche, c'est-à-dire $k \ll 1$.

Application Numérique : $f_1 = 8\,250$ Hz ; $f_2 = 7\,100$ Hz ; $f_0 = 7\,700$ Hz et $C = 10$ nF.

TROISIÈME PROBLÈME :

Lorsqu'un échange de chaleur se produit, il s'accompagne en général d'une création d'entropie traduisant l'irréversibilité du phénomène. Le sujet qui suit en propose une analyse.

Certaines questions nécessitent une réponse qualitative concise en 3 ou 4 lignes maximum.

I - Contact thermique direct de deux solides homogènes :

- 1 - Un système homogène à la température T subit une transformation infinitésimale isobare en n'échangeant aucun autre travail que celui de dilatation-compression.

a - Relier sa variation d'enthalpie dH à la chaleur δQ qu'il échange.

b - Exprimer dH en fonction de dS pour une transformation réversible, S étant l'entropie du système.

- c - Définir la capacité calorifique C_p à pression constante à partir d'une dérivée de H , puis d'une dérivée de S .

Dans toute la suite du problème, on ne considérera que des systèmes solides subissant des transformations isobares et pour lesquels les capacités calorifiques (respectivement les chaleurs massiques) à pression constante seront simplement notées C (respectivement c) en omettant l'indice p .

- 2 - Deux solides homogènes (Σ_1) et (Σ_2), de capacités calorifiques C_1 et C_2 initialement aux températures T_{10} et T_{20} , sont placés en contact dans une enceinte calorifugée (Figure 9).

- a - Calculer la température finale T_f du système.

- b - On considère (Σ_1) seul.

- α - Calculer sa variation d'entropie ΔS_1 .

- β - Calculer l'entropie S_{e1} qu'il échange et l'entropie créée S_{c1} .

- γ - Les signes de ΔS_1 , S_{e1} et S_{c1} ont-ils quelque chose de particulier ?

- δ - Pourquoi n'utilise-t-on pas le symbole Δ pour les termes entropiques d'échange et de création ?

- c - On considère (Σ_2) seul. Calculer comme ci-dessus ΔS_2 , S_{e2} et S_{c2} .

- d - On envisage maintenant le système (Σ_1) $\dot{\cup}$ (Σ_2). Calculer ΔS , S_e et S_c .

- e - Quel lien existe-t-il entre S_{c1} , S_{c2} et S_c ?

II - La conduction thermique :

- 1 - a - Soit k la conductivité thermique d'un milieu et $\vec{j}_Q$ le vecteur densité de courant de chaleur qui y règne. Énoncer la loi de Fourier et préciser l'unité de $\vec{j}_Q$.
- b - Cette loi rend compte du transfert de chaleur par conduction. Connaissez-vous d'autres modes de transfert de chaleur ?

- 2 - On envisage un solide de forme cylindrique (Σ_3), d'axe Ox dont les caractéristiques sont : conductivité thermique k , masse volumique μ , chaleur massique c , enthalpie massique h , section droite d'aire A .
- a - Dans le cadre de ce modèle unidimensionnel et en raisonnant sur une tranche élémentaire de (Σ_3) de volume $A dx$, relier μ , k , $\frac{\partial h}{\partial t}$ et la dérivée seconde spatiale de la température $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.
- b - En déduire l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la température (appelée équation de diffusion thermique ou équation de la chaleur).
- c - Peut-on parler de l'équation de conservation de la chaleur ?
- d - Peut-on affirmer, à la seule vue de cette équation, que le phénomène de conduction thermique est irréversible ?
- 3 - a - Déterminer, en régime permanent, la loi de variation de la température dans le cylindre dont les extrémités $x = 0$ et $x = \ell$ sont maintenues respectivement aux températures T_1 et T_2 .
Que deviendrait cette loi de variation en régime non permanent en supposant la chaleur massique c nulle ?
- b - Calculer le flux de chaleur Φ traversant toute section du cylindre dans le sens des x croissants.
- c - On pose $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{F}$, R_{th} étant la résistance thermique de (Σ_3). Calculer R_{th} .
A quelles grandeurs correspondraient $(T_1 - T_2)$, Φ , R_{th} , j_Q et k dans le domaine de l'électrocinétique ?

III - Contact thermique de deux solides par l'intermédiaire d'un conducteur :

On intercale entre les deux solides (Σ_1) et (Σ_2) de la question I - 2 le cylindre (Σ_3) étudié au II (Figure 10).

On supposera qu'à l'instant initial, la température de (Σ_3) varie linéairement de T_{10} en $x = 0$ à T_{20} en $x = \ell$.

- 1 - Quelles valeurs faut-il donner aux conductivités thermiques k_1 et k_2 de (Σ_1) et (Σ_2) pour que les gradients de température dans ces deux solides soient nuls ?

On supposera cette condition réalisée par la suite et on choisira de plus $C_1 = C_2 = C$.

2 - La chaleur massique c de (Σ_3) est négligeable.

- a - Déterminer la température finale T_f du système ainsi que l'entropie créée S'_c en fonction de T_{10} , T_{20} et C .
- b - En effectuant un bilan des échanges de chaleur entre deux instants voisins t et $t + dt$, trouver les lois d'évolution temporelle $T_1(t)$ et $T_2(t)$ des températures de (Σ_1) et (Σ_2) en fonction de T_{10} , T_{20} , R_{th} , C et t .

3 - a - Compte tenu de l'hypothèse $c = 0$, que vaut la variation d'entropie d'une tranche de (Σ_3) comprise entre x et $x + dx$?

b - Calculer l'entropie échangée $d^2S'_e$ par cette tranche pendant la durée dt .

c - En déduire l'expression s_c de l'entropie créée par unité de temps et de volume dans (Σ_3) en fonction de T_1 , T_2 , k , $\star$ et x .

d - Intégrer cette expression de s_c d'abord sur toute la longueur de (Σ_3) , puis sur toute la durée de la transformation. Que retrouve-t-on ?

e - Compte tenu de ces résultats, pouvez-vous expliquer l'origine de l'irréversibilité dans la transformation effectuée au I, ainsi que les relations existant entre S_{c1} , S_{c2} et S_c ?

Figure 1

Figure 2

Figure 3

Figure 4

Figure 5

Figure 6

Figure 7

Figure 8

Figure 9

Figure 10