

Câu I (2,0 điểm)

1) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{16} + 5$

b) $B = \sqrt{8} - \sqrt{2}$

2) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-3} = 2$

b) $x^2 - 4 = 0$

Câu II (2,0 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m-1)x + 2$ và $(d_2): y = x - 3$. Tìm m để hai đường thẳng đã cho song song với nhau.2) Cho phương trình: $x^2 + 4x + 2m + 1 = 0$ (m là tham số)a) Giải phương trình với $m = 1$.b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

Câu III (2,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 6\text{cm}$, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính chu vi tam giác ABC .

2) Một chiếc ti vi giảm giá hai lần, mỗi lần giảm giá 10% so với giá đang bán, sau khi giảm giá 2 lần thì giá còn lại là 16 200 000 đồng. Hỏi giá ban đầu của chiếc ti vi là bao nhiêu?

Câu IV (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB \neq AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .1) Chứng minh rằng: Tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.2) Chứng minh rằng: $\widehat{ADE} = \widehat{ADF}$.3) Chứng minh rằng: Đường tròn ngoại tiếp tam giác EDF đi qua trung điểm M của cạnh BC .

Câu V (2,0 điểm)

1) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 4z^2 - 4x - 2y + 4z + 6 = 0$ 2) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x > 2y$ và $xy = 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 + 4y^2 - 11}{x - 2y}$

Đáp án tham khảo:

Câu I (2,0 điểm)

Cách giải:

1) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{16} + 5$

b) $B = \sqrt{8} - \sqrt{2}$

a) $A = \sqrt{16} + 5 = \sqrt{4^2} + 5 = 4 + 5 = 9$.

Vậy $A = 9$.

b) $B = \sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Vậy $B = \sqrt{2}$.

2) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-3} = 2$

b) $x^2 - 4 = 0$

a) $\sqrt{x-3} = 2 \Leftrightarrow x-3=4 \Leftrightarrow x=7$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{7\}$.

b) $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\pm 2\}$.

Câu II (2,0 điểm)

Cách giải:

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m-1)x + 2$ và $(d_2): y = x - 3$. Tìm m để hai đường thẳng đã cho song song với nhau.

Hai đường thẳng $(d_1): y = (m-1)x + 2$ và $(d_2): y = x - 3$ song song với nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1=1 \\ 2 \neq -3 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Vậy với $m=2$ thì hai đường thẳng $(d_1) // (d_2)$.

2) Cho phương trình $x^2 + 4x + 2m + 1 = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình với $m=1$.

Với $m=1$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Nhận xét: $a-b+c=1-4+3=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = -3 \end{cases}$.

Vậy khi $m=1$ thì tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; -3\}$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

Phương trình $x^2 + 4x + 2m + 1 = 0$ có $\Delta' = 2^2 - (2m + 1) = 4 - 2m - 1 = 3 - 2m$.

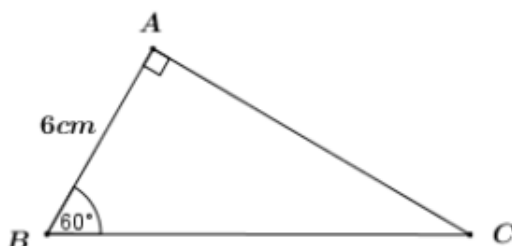
Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = 3 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Vậy với $m = \frac{3}{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

Câu III (2,0 điểm)

Cách giải:

1) Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 6\text{cm}$, góc $\angle ABC = 60^\circ$. Tính chu vi tam giác ABC .



Xét tam giác vuông ABC ta có:

$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \cdot \tan 60^\circ = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12 \text{ (cm)}$$

Vậy chu vi tam giác ABC là: $C_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = 6 + 6\sqrt{3} + 12 = 18 + 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$.

2) Một chiếc ti vi giảm giá hai lần, mỗi lần giảm giá 10% so với giá đang bán, sau khi giảm giá 2 lần thì giá còn lại là 16 200 000 đồng. Hỏi giá ban đầu của chiếc ti vi là bao nhiêu?

Gọi giá ban đầu của chiếc ti vi là x (đồng) (ĐK: $x > 0$).

Giá của chiếc ti vi sau lần giảm giá 10% đầu tiên là: $x \cdot 90\% = \frac{9}{10}x$ (đồng).

Giá của chiếc ti vi sau lần giảm giá 10% thứ hai là: $\frac{9}{10}x \cdot 90\% = \frac{81}{100}x$ (đồng).

Vì sau khi giảm giá 2 lần thì giá còn lại là 16 200 000 đồng nên ta có phương trình:

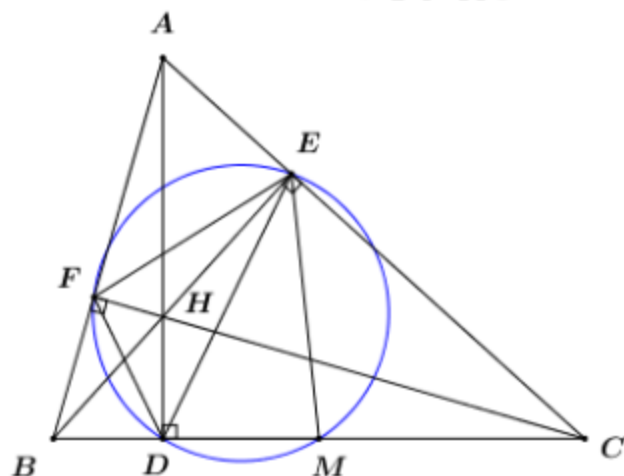
$$\frac{81}{100}x = 16\,200\,000 \Leftrightarrow x = 20\,000\,000 \text{ (đồng) (tm)}.$$

Vậy giá ban đầu của chiếc ti vi là 20 000 000 đồng.

Câu IV (2,0 điểm)

Cách giải:

Cho tam giác nhọn ABC ($AB \neq AC$) có các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H .



1) Chứng minh rằng: Tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

$$\text{Xét tứ giác } AEHF \text{ có: } \begin{cases} BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle AEH = 90^\circ \\ \angle AFH = 90^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle AEH + \angle AFH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Vậy $AEHF$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

2) Chứng minh rằng: $\angle ADE = \angle ADF$.

Xét tứ giác $BDHF$ có: $\begin{cases} AD \perp BC \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle BDH = 90^0 \\ \angle BFH = 90^0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \angle BDH + \angle BFH = 90^0 + 90^0 = 180^0.$$

$\Rightarrow BDHF$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0).

$$\Rightarrow \angle HDF = \angle HBF \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } HF) \Rightarrow \angle ADF = \angle ABE \text{ (1).}$$

Tương tự xét tứ giác $CDHE$ có: $\begin{cases} AD \perp BC \\ BE \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle HDC = 90^0 \\ \angle HEC = 90^0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \angle HDC + \angle HEC = 90^0 + 90^0 = 180^0.$$

$\Rightarrow CDHE$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0).

$$\Rightarrow \angle HDE = \angle HCE \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } HE) \Rightarrow \angle ADE = \angle ACF \text{ (2).}$$

Ta lại có:

$$\angle ABE + \angle BAC = 90^0 \text{ (do tam giác } ABE \text{ vuông tại } E).$$

$$\angle ACF + \angle BAC = 90^0 \text{ (do tam giác } ACF \text{ vuông tại } F).$$

$$\angle ABE = \angle ACF \text{ (cùng phụ với } \angle BAC) \text{ (3).}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \angle ADE = \angle ADF \text{ (đpcm).}$$

3) Chứng minh rằng: Đường tròn ngoại tiếp tam giác EDF đi qua trung điểm M của cạnh BC .

Gọi M là trung điểm của BC , ta sẽ chứng minh tứ giác $DMEF$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tam giác BEC vuông tại E có trung tuyến EM ứng với cạnh huyền $BC \Rightarrow ME = \frac{1}{2}BC = MB = MC$ (định lý đường trung tuyến trong tam giác vuông).

$\Rightarrow \triangle MBE$ cân tại $M \Rightarrow \angle MBE = \angle MEB$ (tính chất tam giác cân).

$\Rightarrow \angle EMC = \angle MEB + \angle MBE = 2\angle MBE = 2\angle DBH$ (*) (góc ngoài của tam giác).

Vì $BDHF$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\angle DBH = \angle DFH$ (5) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DH).

Vì $AEHF$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\angle HFE = \angle HAE$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE).

Mà $\angle DBH + \angle ACB = 90^\circ$ (do tam giác BCE vuông tại E).

$\angle HAE + \angle ACB = 90^\circ$ (do tam giác ACD vuông tại D).

$\Rightarrow \angle DBH = \angle HAE$ (4) (cùng phụ với $\angle ACB$).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \angle HFE = \angle DBH$ (6).

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \angle DFE = \angle DFH + \angle HFE = \angle DBH + \angle DBH = 2\angle DBH$ (2*)

Từ (*) và (2*) $\Rightarrow \angle EMC = \angle DFE$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $DMEF$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF đi qua trung điểm M của BC (đpcm).

Câu V (2,0 điểm)

Cách giải:

1) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + 4z^2 - 4x - 2y + 4z + 6 = 0$.

Theo bài ra ta có:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 4x - 2y + 4z + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + 4z^2 + 4z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (2z+1)^2 = 0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \quad \forall x \\ (y-1)^2 \geq 0 \quad \forall y \\ (2z+1)^2 \geq 0 \quad \forall z \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (2z+1)^2 \geq 0 \quad \forall x, y, z.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-1=0 \\ 2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy có duy nhất 1 bộ số $(x; y; z)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x; y; z) = \left(2; 1; -\frac{1}{2}\right)$.

2) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x > 2y$ và $xy = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 4y^2 - 11}{x - 2y}$.

Ta có:

$$P = \frac{x^2 + 4y^2 - 11}{x - 2y}$$

$$P = \frac{x^2 + 4y^2 - 12 + 1}{x - 2y}$$

$$P = \frac{x^2 + 4y^2 - 4xy + 1}{x - 2y}$$

$$P = \frac{(x - 2y)^2 + 1}{x - 2y}$$

$$P = x - 2y + \frac{1}{x - 2y}$$

Vì $x > 2y \Rightarrow x - 2y > 0$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số $x - 2y$ và $\frac{1}{x - 2y}$ ta có:

$$P = x - 2y + \frac{1}{x - 2y} \geq 2\sqrt{(x - 2y) \cdot \frac{1}{x - 2y}} = 2.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x - 2y = \frac{1}{x - 2y} \Leftrightarrow (x - 2y)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2y = 1$ (do $x - 2y > 0$) và $xy = 3$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (2y + 1) \cdot y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2y^2 + y - 3 = 0 (*) \end{cases}$$

Xét phương trình (*) có $a + b + c = 2 + 1 - 3 = 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Với $y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2y_1 + 1 = 3$.

Với $y_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 2y_2 + 1 = -2$.

$\Rightarrow$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x; y) \in \left\{ (3; 1); \left(-2; -\frac{3}{2}\right) \right\}$.

Vậy $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow (x; y) \in \left\{ (3; 1); \left(-2; -\frac{3}{2}\right) \right\}$.