

Лекція 6

Основні властивості перетворення Фур'є:

1 Лінійність

Якщо ми маємо сигнали $s_1(t), s_2(t), \dots$, причому кожному з них відповідають спектри $\dot{S}_1(\omega), \dot{S}_2(\omega), \dots$, то сумарному сигналу $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \dots$ відповідає спектр виду

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega) + \dots \quad (2.29)$$

2 Зсув за часом

Нехай сигнал $s_1(t)$ довільної форми існує на проміжку часу від t_1 до t_2 та має спектральну щільність $\dot{S}_1(\omega)$. При затримці цього сигналу за часом на t_0 (при збереженні його форми), отримаємо нову функцію часу $s_2(t) = s_1(t - t_0)$, яка існує на інтервалі $[t_1 + t_0, t_2 + t_0]$ (рис. 1).

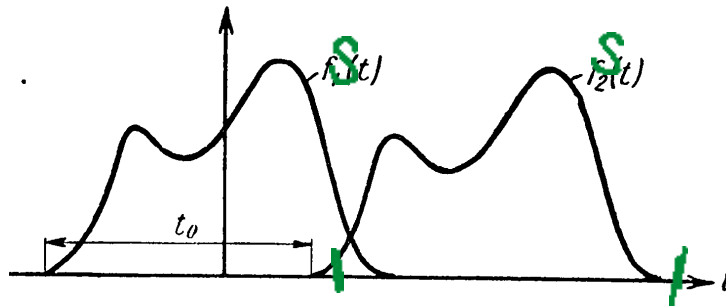


Рисунок 1

Для нового сигналу $s_2(t)$ спектральна щільність має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega t} e^{j\omega t_0} e^{-j\omega t_0} dt = \left| e^{j\omega t_0} e^{-j\omega t_0} = 1 \right| = \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega(t - t_0)} d(t - t_0) = \\ &= \left| \tau = (t - t_0) \right| = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} \dot{S}_1(\omega) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тобто зсування за часом функції $s(t)$ на $\pm t_0$ призводить до зсування фазової характеристики спектру $S(\omega)$ на величину $\pm \omega t_0$. І навпаки, якщо

всі складові спектру зсунути за фазою на $\theta(\omega) = \pm \omega t_0$, то функція $s(t)$ зсунеться за часом на $\pm t_0$. АЧХ (модуль спектральної щільності) від положення сигналу на осі часу не залежить, тому зміниться тільки фазовий спектр.

3 Зміна масштабу часу

Нехай сигнал $s_1(t)$ стиснули в часі та отримали новий сигнал $s_2(t)$, причому $s_2(t) = s_1(nt)$, $n > 1$ (рис. 2.7).

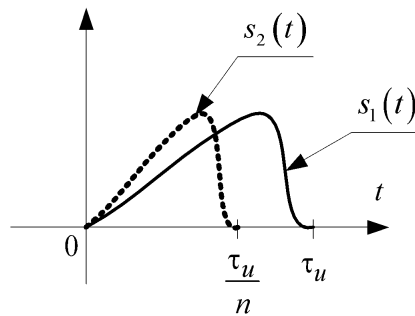


Рисунок 2.7

Тривалість імпульсу $s_2(t)$ в n разів менша за тривалість $s_1(t)$ та дорівнює $\frac{\tau_u}{n}$. Спектральна щільність стиснутого сигналу дорівнює

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \int_0^{\tau_u} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau_u} s_1(nt) e^{-j\omega t} dt = \left| \tau = nt, t = \frac{\tau}{n}, d\tau = n dt, dt = \frac{1}{n} d\tau \right| = \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\tau_u} s_1(\tau) e^{-j\frac{\omega}{n}\tau} d\tau = \frac{1}{n} S_1\left(\frac{\omega}{n}\right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

Тобто при стисненні сигналу за часом в n разів, в таку ж кількість разів відбувається розширення спектру по осі частот. Модуль спектральної щільності при цьому зменшується в n разів.

При розтягуванні сигналу по осі часу (тобто при $n < 1$) відбувається звуження спектру та збільшення модуля спектральної щільності.

4 Зсув спектру сигналу

Розглянемо результат перемноження деякої довільної функції та гармонічного сигналу $s(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, до того ж застосуємо до нього ППФ (в розрахунках застосуємо формулу Ейлера для запису косинуса через експоненту), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta_0) e^{-j\omega t} dt = \left| \cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} [e^{j\theta_0} S(\omega - \omega_0) + e^{-j\theta_0} S(\omega + \omega_0)], \quad (2.32)$$

де $S(\omega)$ – спектральна щільність сигналу $s(t)$.

З виразу (2.32) очевидно, що помноження функції $s(t)$ на гармонійне коливання призводить до розділення спектру $S(\omega)$ на дві частини, які зміщені одна від одної на $+\omega_0$ та $-\omega_0$. При $\theta_0 = 0$ можна записати

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} S(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S(\omega + \omega_0).$$

5 Диференціювання та інтегрування сигналу

Якщо ми маємо сигнал $s_1(t)$ та йому відповідає спектр $S_1(\omega)$, то для того, щоб знайти спектр сигналу $s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt}$, необхідно помножити на $j\omega$ спектр початкового сигналу $S_1(\omega)$.

Щоб знайти спектр сигналу $s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x) dx$, необхідно розділити на $j\omega$ спектр початкового сигналу $S_1(\omega)$. Але ця рівність є справедливою

тільки для сигналів, у яких $S(0) = 0$, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) dt = 0$.

6 Добуток двох сигналів

Нехай $s(t) = f(t) \cdot g(t)$, знайдемо $S(\omega)$ (ППФ).

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Кожну функцію $f(t)$ и $g(t)$ представимо у вигляді ЗПФ, враховуючи їх спектральні щільності $F(\omega), G(\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Підставимо $g(t)$ в формулу для $S(\omega)$, отримаємо

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) e^{jxt} dx \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{jxt} \cdot e^{-j\omega t} dt dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega-x)t} dt dx \\ S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) F(\omega-x) dx, \end{aligned} \quad (2.33)$$

тобто спектр $S(\omega)$ при $s(t) = f(t) \cdot g(t)$ дорівнює з коефіцієнтом $\frac{1}{2\pi}$ згортці спектрів $F(\omega)$ и $G(\omega)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x) F(\omega-x) dx$$

– інтеграл згортки (згортка).

В окремому випадку, при $\omega = 0$, отримаємо рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) F(-x) dx.$$

При $x = \omega$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) F(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) F^*(\omega) d\omega.$$

Тут $F^*(\omega) = F(-\omega)$ – спектральна функція, комплексно спряжена з функцією $F(\omega)$.

За аналогією, добутку двох спектрів $S(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega)$ відповідає функція часу, яка є згортокою $f(t)$ та $g(t)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(t-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y) g(y) dy = F^{-1} \{F(\omega) G(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

