Лекція 6

Основні властивості перетворення Фур'є:

1 Лінійність

Якщо ми маємо сигнали $s_1(t), s_2(t), \ldots$, причому кожному з них відповідають спектри $\dot{S}_1(\omega), \dot{S}_2(\omega), \ldots$, то сумарному сигналу $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \ldots$ відповідає спектр виду

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega) + \ldots . \qquad (2.29)$$

2 Зсув за часом

Нехай сигнал $s_1(t)$ довільної форми існує на проміжку часу від t_1 до t_2 та має спектральну щільність $\dot{S}_1(\omega)$. При затримці цього сигналу за часом на t_0 (при збереженні його форми), отримаємо нову функцію часу $s_2(t) = s_1(t - t_0)$, яка існує на інтервалі $[t_1 + t_0, t_2 + t_0]$ (рис. 1).

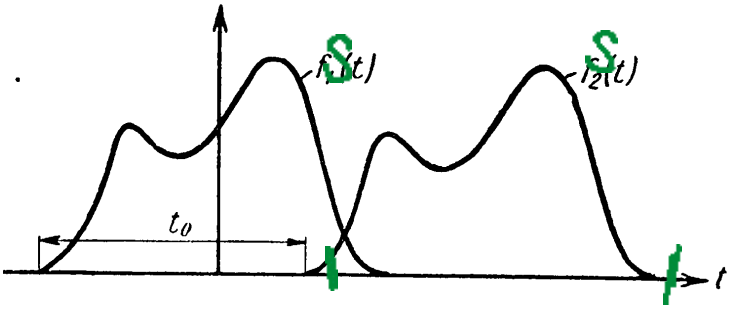


Рисунок 1

Для нового сигналу $s_2(t)$ спектральна щільність має вигляд

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega t} e^{j\omega t_0} e^{-j\omega t_0} dt = \left| e^{j\omega t_0} e^{-j\omega t_0} = 1 \right| =$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega(t - t_0)} d(t - t_0) =$$

$$= \left| \tau = (t - t_0) \right| = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} \cdot \dot{S}_1(\omega) \qquad (2.30)$$

Тобто зсунення за часом функції $s(t)$ на $\pm t_0$ призводить до зсунення фазової характеристики спектру $S(\omega)$ на величину $\pm\omega t_0$. І навпаки, якщо

всі складові спектру зсунути за фазою на $\theta(\omega) = \pm\omega t_0$, то функція $s(t)$ зсунеться за часом на $\pm t_0$. АЧХ (модуль спектральної щільності) від положення сигналу на осі часу не залежить, тому зміниться тільки фазовий спектр.

3 Зміна масштабу часу

Нехай сигнал $s_1(t)$ стиснули в часі та отримали новий сигнал $s_2(t)$, причому $s_2(t) = s_1(nt), n > 1$ (рис. 2.7).

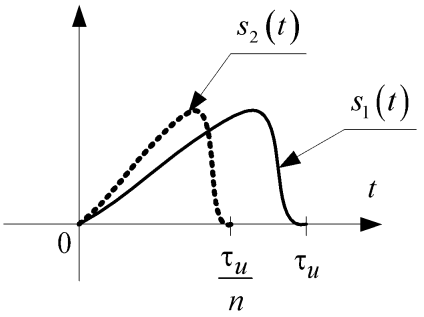


Рисунок 2.7

Тривалість імпульсу $s_2(t)$ в n разів менша за тривалість $s_1(t)$ та дорівнює $\frac{\tau_u}{n}$. Спектральна щільність стиснутого сигналу дорівнює

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_0^{\tau_u} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau_u} s_1(nt) e^{-j\omega t} dt = \left| \tau = nt, t = \frac{\tau}{n}, d\tau = n dt, dt = \frac{1}{n} d\tau \right| =$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{\tau_u} s_1(\tau) e^{-j\frac{\omega}{n}\tau} d\tau = \frac{1}{n} \cdot S_1\left(\frac{\omega}{n}\right), \qquad (2.31)$$

Тобто при стисненні сигналу за часом в n разів, в таку ж кількість разів відбувається розширення спектру по осі частот. Модуль спектральної щільності при цьому зменшується в n разів.

При розтягуванні сигналу по осі часу (тобто при $n < 1$) відбувається звуження спектру та збільшення модуля спектральної щільності.

4 Зсув спектру сигналу

Розглянемо результат перемноження деякої довільної функції та гармонічного сигналу $s(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, до того ж застосуємо до нього ППФ (в розрахунках застосуємо формулу Ейлера для запису косинуса через експоненту), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cdot\cos(\omega_0 t+\theta_0)e^{-j\omega t}dt = \left|\cos(\omega t)=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)\right| =$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j\theta_0}\dot{S}(\omega-\omega_0)+e^{-j\theta_0}\dot{S}(\omega+\omega_0)\right], \qquad (2.32)$$

де $\dot{S}(\omega)$ – спектральна щільність сигналу $s(t)$.

З виразу (2.32) очевидно, що помноження функції $s(t)$ на гармонійне коливання призводить до розділення спектру $\dot{S}(\omega)$ на дві частини, які зміщені одна від одної на $+\omega_0$ та $-\omega_0$. При $\theta_0=0$ можна записати

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cdot\cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2}\dot{S}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\dot{S}(\omega+\omega_0).$$

5 Диференціювання та інтегрування сигналу

Якщо ми маємо сигнал $s_1(t)$ та йому відповідає спектр $\dot{S}_1(\omega)$, то для того, щоб знайти спектр сигналу $s_2(t)=\frac{ds_1(t)}{dt}$, необхідно помножити на $j\omega$ спектр початкового сигналу $\dot{S}_1(\omega)$.

Щоб знайти спектр сигналу $s_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x)dx$, необхідно розділити на $j\omega$ спектр початкового сигналу $\dot{S}_1(\omega)$. Але ця рівність є справедливою тільки для сигналів, у яких $S(0)=0$, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)dt=0.$

6 Добуток двох сигналів

Нехай $s(t)=f(t)\cdot g(t)$, знайдемо $\dot{S}(\omega)$ (ППФ).

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot g(t)\cdot e^{-j\omega t}dt.$$

Кожну функцію $f(t)$ и $g(t)$ представимо у вигляді ЗПФ, враховуючи їх спектральні щільності $\dot{F}(\omega),\dot{G}(\omega)$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{F}(\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Підставимо $g(t)$ в формулу для $S(\omega)$, отримаємо

$$\dot{S}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(\omega)e^{j\omega t}d\omega\cdot e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(x)e^{jxt}dx\cdot e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{jxt}\cdot e^{-j\omega t}dtdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j(\omega-x)t}dtdx$$

$$\dot{S}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(x)\dot{F}(\omega-x)dx \quad , \qquad (2.33)$$

тобто спектр $\dot{S}(\omega)$ при $s(t)=f(t)\cdot g(t)$ дорівнює з коефіцієнтом $\frac{1}{2\pi}$ згортці спектрів $\dot{F}(\omega)$ и $\dot{G}(\omega)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(x)\dot{F}(\omega-x)dx$ – інтеграл згортки (згортка).

В окремому випадку, при $\omega=0$, отримаємо рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot g(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(x)\dot{F}(-x)dx \quad .$$

При $x=\omega$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot g(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(\omega)\dot{F}(-\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{G}(\omega)\dot{F}^{*}(\omega)d\omega \quad .$$

Тут $\dot{F}^{*}(\omega)=\dot{F}(-\omega)$ – спектральна функція, комплексно спряжена з функцією $\dot{F}(\omega)$.

За аналогією, добутку двох спектрів $\dot{S}(\omega)=\dot{F}(\omega)\cdot\dot{G}(\omega)$ відповідає функція часу, яка є згорткою $f(t)$ та $g(t)$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)g(t-y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-y)g(y)dy=F^{-1}\left\{\dot{F}(\omega)\dot{G}(\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\dot{F}(\omega)\dot{G}(\omega)}_{\dot{S}(\omega)}e^{j\omega t}d\omega \quad .$$