

Modulul 1

TEST DE EVALUARE SUMATIVĂ

Clasa a XII-a matematică-informatică, științele naturii

Proprietățile legilor de compoziție

1. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect și apoi justificați răspunsul corect:
Mulțimea $H=(a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$, în raport cu înmulțirea pentru:

- a) $a = -1$; b) $a = 1$; c) $a = \frac{1}{2}$; d) $a = \frac{-1}{2}$

2. Citiți cu atenție afirmațiile de mai jos. În cazul în care apreciați că afirmația este adevărată, încercuiți litera **A**. În caz contrar încercuiște litera **F**.

A	F	a)	Legea $x^* y = 3xy - x - y$ nu este asociativă pe $\mathbb{Z}$.
A	F	b)	Legea $x^* y = x^y$ este comutativă pe $\mathbb{N}^*$.
A	F	c)	Legea $x^* y = \frac{4xy-7}{4x+4y+12}$ admite element neutru pe $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$
A	F	d)	$M=(3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție: $x^* y = 3 + (x - 3)^{\lg(y-3)}$
A	F	e)	$x=2$ este element simetrizabil în raport cu legea $x^* y = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ definită pe $[1, \infty)$

3. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x^*y=x+y-3$ și $x^\circ y=(x-3)(y-3)+3$

Citește cu atenție afirmațiile de mai jos. În cazul în care apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiște litera **A**. În caz contrar încercuiște litera **F**.

A	F	a)	Ecuția $x^*x=x^\circ x$ are soluțiile întregi 3 și 5.
A	F	b)	Numărul întreg a care are proprietatea că $x^\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x este $a=2$.
A	F	c)	Sistemul de ecuații $\{x^*(y+1) = 4(x-y)^\circ 1 = 5\}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$ are soluțiile $x=4$ și $y=2$.

4. Fie mulțimea $G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$.

- a) Să se verifice dacă 0 și 1 aparțin mulțimii G .
b) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in G$ avem $x \bullet y \in G$.
c) Demonstrați că dacă $x \in G$, atunci $\frac{1}{x} \in G$.

5. Pe mulțimea numerelor reale R se definește legea de compoziție:

$x \perp y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in R$.

a) Demonstrați $x \perp y = 3(x-2)(y-2) + 2$, pentru orice $x, y \in R$.

b) Demonstrați că legea este asociativă și comutativă.

c) Determinați elementul neutru.

d) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc identitatea:

$$x \perp x \perp \dots \perp x \underset{\text{de } n \text{ ori } x}{=} 3^{n-1} \cdot (x - 2)^n + 2, \quad x \in R.$$

e) Demonstrați că $x \perp 2 = 2$, pentru orice $x \in R$.

f) Calculați $(-2022) \perp (-2021) \perp \dots \perp (2021) \perp (2022)$.

Notă:

Fiecare item se notează cu 5 puncte.