

A 2005 PHYS. I

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2005

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I -MP

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 5 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement.
- Notations : vecteur $\rightarrow \mathbf{V}$ (on pourra écrire

$$p(r) = P_0 \frac{m R^2 r^2 \exp\left(\frac{m R^2 r^2}{2 k_B T}\right)}{1 + \frac{m R^2 r^2}{2 k_B T} \exp\left(\frac{m R^2 r^2}{2 k_B T}\right)}$$

question que la masse volumique ρ est constante, ce que l'on exprime en disant que le fluide est incompressible. Quelle est, sous cette hypothèse, la nouvelle loi de la distribution de la pression ? Peut-on déterminer la constante d'intégration ?

[2] Fluide incompressible 4 On suppose dans cette question que la masse volumique ρ est constante, ce que l'on exprime en disant que le fluide est incompressible. Quelle est, sous cette hypothèse, la nouvelle loi de la distribution de la pression ? Peut-on déterminer la constante d'intégration ?

$$p(r) = P_0 \frac{m R^2 r^2 \exp\left(\frac{m R^2 r^2}{2 k_B T}\right)}{1 + \frac{m R^2 r^2}{2 k_B T} \exp\left(\frac{m R^2 r^2}{2 k_B T}\right)}$$

est constante, ce que l'on exprime en disant que le fluide est incompressible. Quelle est, sous cette hypothèse, la nouvelle loi de la distribution de la pression ? Peut-on déterminer la constante d'intégration ?

Fluide compressible 5 – On

abandonne l'hypothèse d'incompressibilité. On adopte comme équation d'état du fluide, liant la masse volumique à la pression, l'équation EMBED Equation.DSMT36

$$p(r) = P_0 \frac{\exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}{1 + \frac{m \omega^2 R^2}{2k_B T} \exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}, \quad \text{où EMBED Equation.DSMT36}$$

$$p(r) = P_0 \frac{\exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}{1 + \frac{m \omega^2 R^2}{2k_B T} \exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}$$

est une constante. Vérifier que EMBED Equation.3

$$p(r) = P_0 \frac{\exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}{1 + \frac{m \omega^2 R^2}{2k_B T} \exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}$$

n'est autre que le coefficient de compressibilité

$$p(r) = P_0 \frac{\exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}{1 + \frac{m \omega^2 R^2}{2k_B T} \exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}, \quad \text{à isotherme du fluide, EMBED Equation.DSMT36}$$

$$p(r) = P_0 \frac{\exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}{1 + \frac{m \omega^2 R^2}{2k_B T} \exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}$$

la pression EMBED Equation.3 : EMBED

$$p(r) = P_0 \frac{\exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}{1 + \frac{m \omega^2 R^2}{2k_B T} \exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}$$

Equation.DSMT36 . 6 – On suppose que EMBED

$$p(r) = P_0 \frac{\exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}{1 + \frac{m \omega^2 R^2}{2k_B T} \exp\left(\frac{m \omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}$$

Equation.DSMT36 vérifie EMBED

$$p(r) = P_0 \frac{m R^2}{2 k_B T} \exp \left(-\frac{m r^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m R^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m_0 R^2}{2} \right)$$

Equation.DSMT36 . Intégrer alors l'équation [1] de la question 1 et montrer qu'au premier ordre en

$$p(r) = P_0 \frac{m R^2}{2 k_B T} \exp \left(-\frac{m r^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m R^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m_0 R^2}{2} \right)$$

la masse volumique dépend de

$$p(r) = P_0 \frac{m R^2}{2 k_B T} \exp \left(-\frac{m r^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m R^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m_0 R^2}{2} \right)$$

selon la loi

$$p(r) = P_0 \frac{m R^2}{2 k_B T} \exp \left(-\frac{m r^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m R^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m_0 R^2}{2} \right)$$

7 – Déterminer la constante K en exprimant la conservation de la masse et donner l'expression complète de la distribution de pression. Tracer l'allure du graphe de

$$p(r) = P_0 \frac{m R^2}{2 k_B T} \exp \left(-\frac{m r^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m R^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m_0 R^2}{2} \right)$$

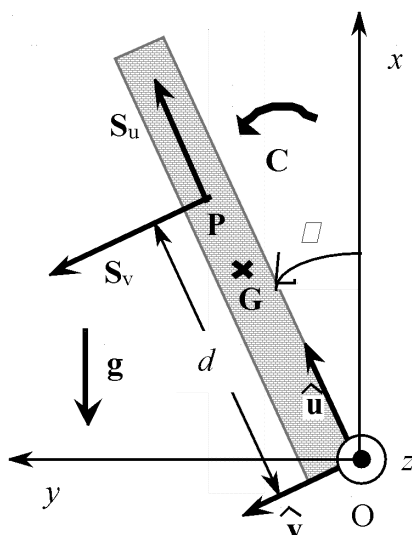
pour

$$p(r) = P_0 \frac{m R^2}{2 k_B T} \exp \left(-\frac{m r^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m R^2}{2 k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m_0 R^2}{2} \right)$$

8 – Le résultat obtenu serait-il valable pour un fluide incompressible ? 8 – Montrer que la condition de validité du calcul,

c'est-à-dire

9 – Le fluide est de l'eau de masse volumique . La vitesse de rotation du réservoir est , son rayon est ; la pression au repos est et la vitesse du son dans l'eau, satisfait la relation



Equation.DSMT36 ; sa valeur numérique est $\sqrt{\frac{3}{2}}$. L'hypothèse $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est-elle valide ? Comparer la vitesse maximale des molécules dans le réservoir à la vitesse du son.

- 10 – Soit $\sqrt{\frac{3}{2}}$ la vitesse du son dans un gaz parfait (GP) de masse molaire M ; cette vitesse vérifie donc, à la température T , la relation $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3RT}{2M}}$. Calculer $\sqrt{\frac{3}{2}}$ pour le gaz parfait ; établir la relation $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3RT}{2M}}$ et montrer que l'approximation $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1$ appliquée au gaz parfait conduit à loi de distribution de pression trouvée à la question 4. Expliquer la formulation, paradoxale pour un gaz : le gaz parfait est incompressible.

II. Rotation d'une barre rigide

Une barre solide OA, de longueur au repos L_0 et de section s constante et très petite devant L_0 a une masse linéique μ . Cette barre tourne autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire constante ω (Fig. 2A et 2B).

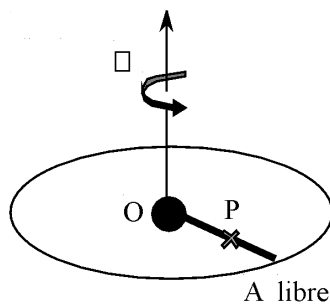


Fig. 2A

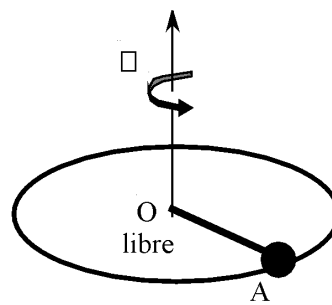


Fig. 2B

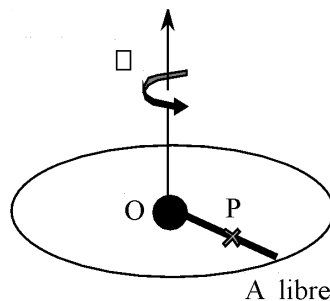


Fig. 2A

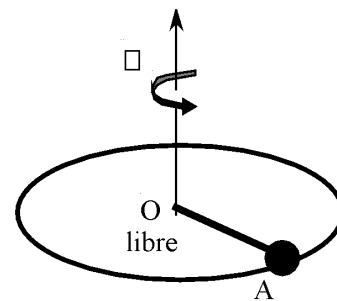


Fig. 2B

On appelle $T(r)$ la tension de la barre au point P à une distance r de l'axe de rotation ; cette grandeur représente l'action du reste de la barre sur la longueur OP. 11 – En considérant un bilan de forces, établir qu'en régime permanent la mesure de $T(r)$ est donnée par la relation :

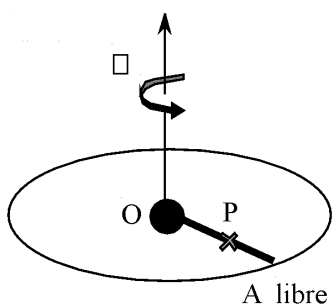


Fig. 2A

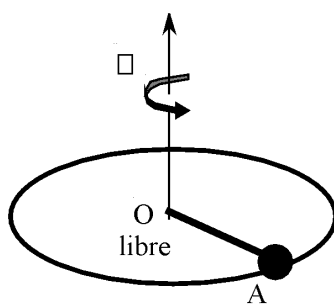


Fig. 2B

EMBED Equation.DSMT36

sur l'axe radial, notée

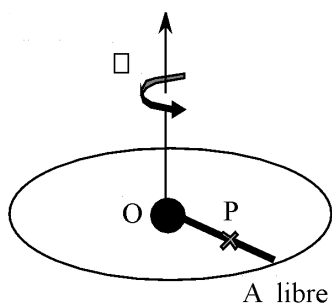


Fig. 2A

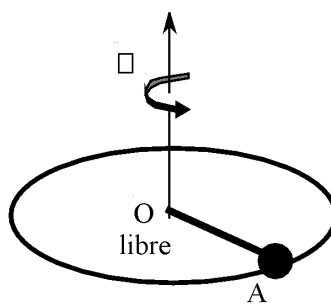


Fig. 2B

qui n'est plus une température), vérifie EMBED Equation.DSMT36

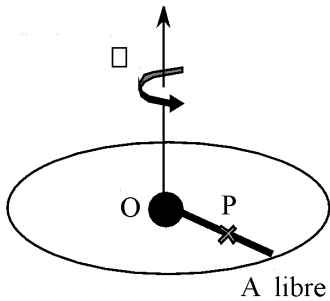


Fig. 2A

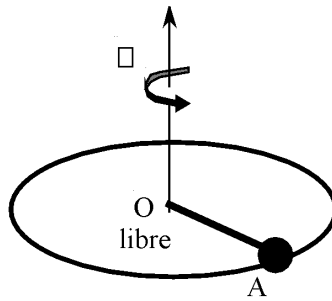


Fig. 2B

[3].Barre rigideOn suppose que la barre est rigide, c'est-à-dire que EMBED Equation.DSMT36

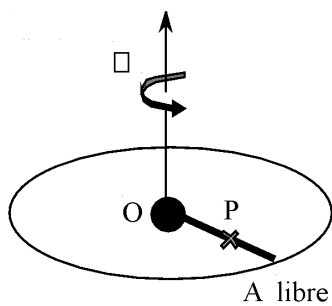


Fig. 2A

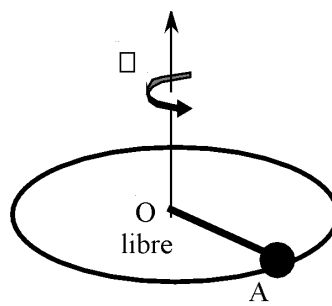


Fig. 2B

est constant. ☺

12 – L'extrémité A est libre, l'extrémité O est fixe (fig 2A). Déterminer l'évolution de la tension, notée T , le long de la barre. $\odot$

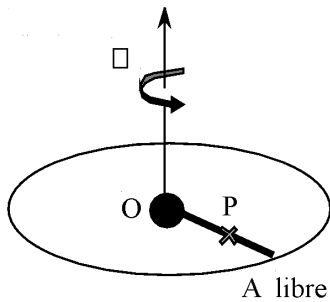


Fig. 2A

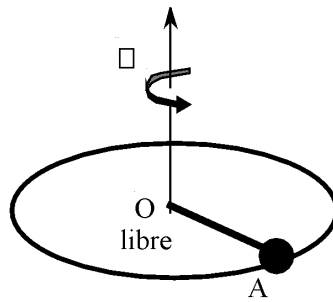


Fig. 2B

13 – L'extrémité O est libre, l'extrémité A est fixée à un mur vertical tournant à la vitesse angulaire ω (fig 2B). Exprimer la nouvelle tension, notée T , le long de la barre. $\odot$

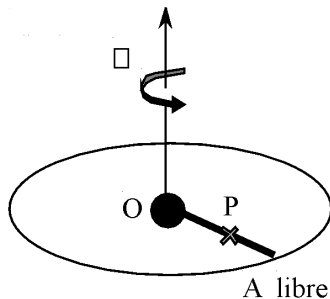


Fig. 2A

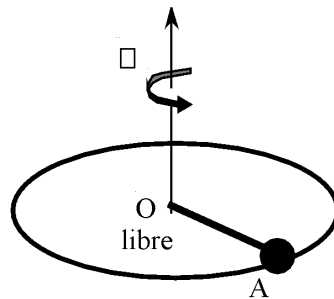


Fig. 2B

14 – Les deux extrémités sont attachées au mécanisme assurant la rotation, de sorte que la longueur de la barre est constante, égale à L . $\odot$

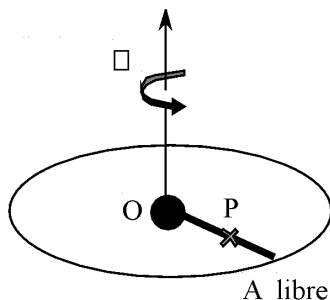


Fig. 2A

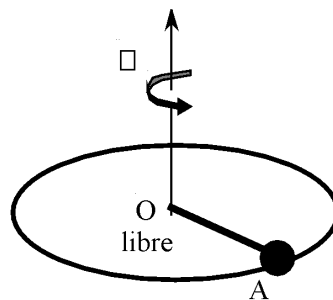


Fig. 2B

Peut-on déterminer la constante d'intégration dans l'équation [3] de la question 11 ? On pourra se reporter à la question 4. Barre déformable On abandonne maintenant l'hypothèse de rigidité. On adopte pour la barre l'équation d'état $T = E \frac{du}{dx}$. $\odot$

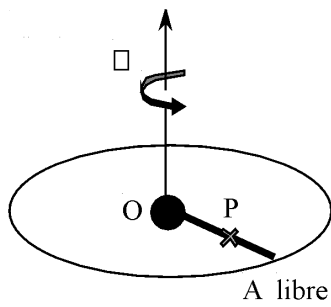


Fig. 2A

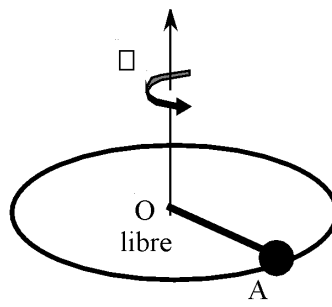


Fig. 2B

, où E est une constante appelée module de rigidité et s la section constante de la barre le module de rigidité de la barre rigide des questions 12 à 14 est infini). Dans la pratique, l'inégalité EMBED

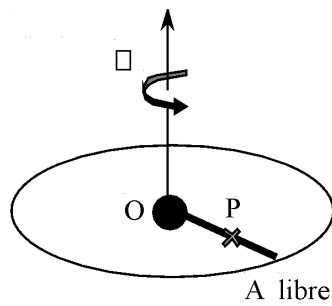


Fig. 2A

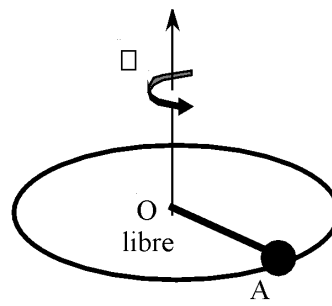


Fig. 2B

Equation.3 est vérifiée pour les corps solides. 15 – Intégrer l'équation [3] et donner le résultat au premier ordre

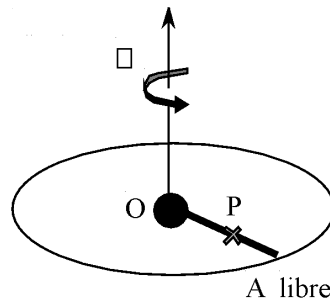


Fig. 2A

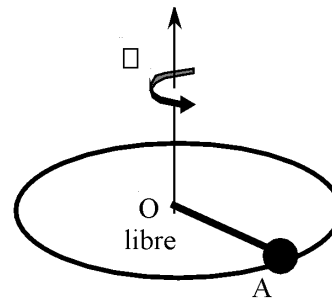


Fig. 2B

en EMBED Equation.3

Le résultat sera mis sous la forme EMBED Equation.DSMT36

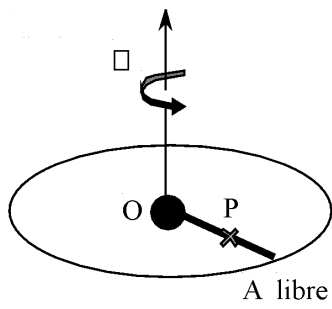


Fig. 2A

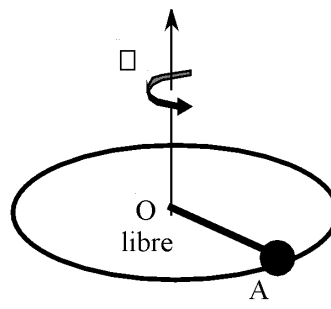


Fig. 2B

, où EMBED

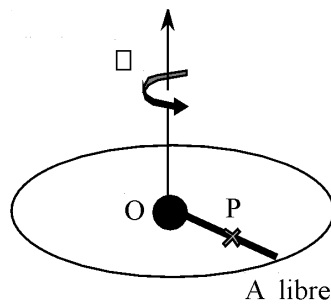


Fig. 2A

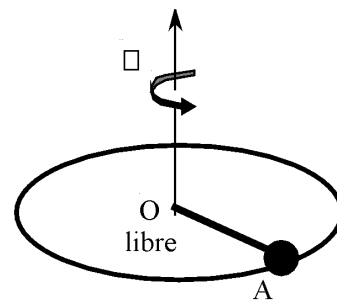


Fig. 2B

Equation.DSMT36

constante d'intégration, indéterminée à ce stade, et EMBED Equation.DSMT36

est la

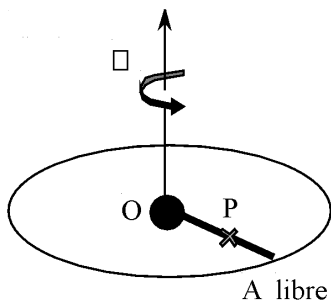


Fig. 2A

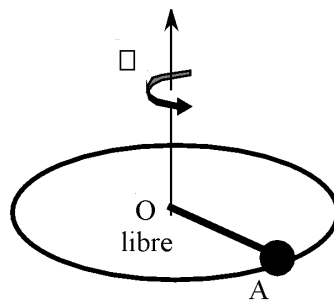


Fig. 2B

une fonction à déterminer,

sous la condition EMBED Equation.DSMT36

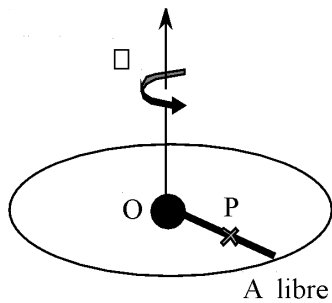


Fig. 2A

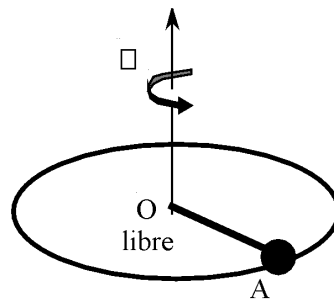


Fig. 2B

16 – Déterminer la

constante EMBED Equation.DSMT36

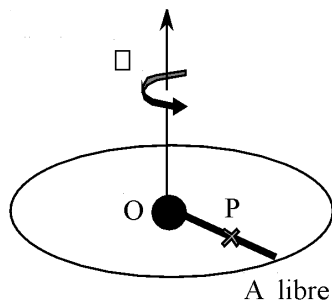


Fig. 2A

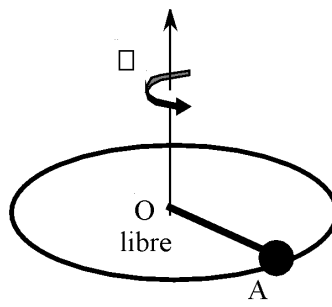


Fig. 2B

en exprimant la conservation de la masse. En déduire que la loi de répartition de la tension EMBED

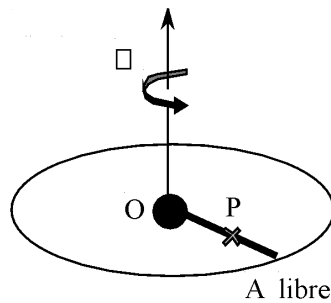


Fig. 2A

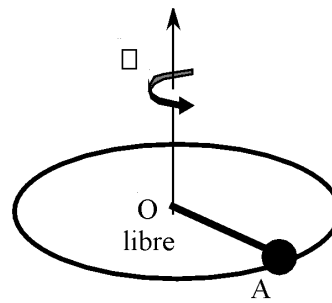


Fig. 2B

Equation.3 est indépendante du module de rigidité. En quel point de la barre cette tension est-elle nulle ?III. Rotation à vitesse angulaire variableUne cheminée verticale est modélisée par un cylindre homogène de masse M , de longueur D et de rayon très petit devant D . Pour une raison quelconque, l'équilibre de la cheminée est détruit ; cette dernière amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical O, x, y). On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale. On étudie le mouvement de la cheminée dans le repère EMBED Equation.DSMT36

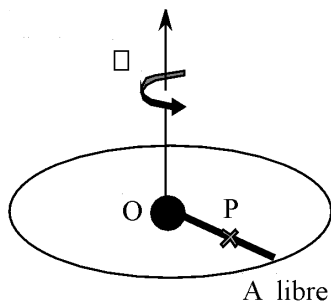


Fig. 2A

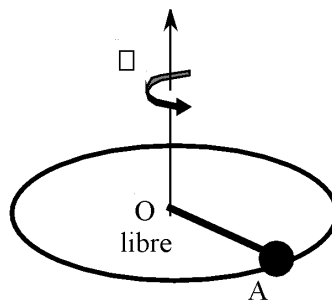


Fig. 2B

en projection sur la base mobile de coordonnées polaires EMBED Equation.DSMT36

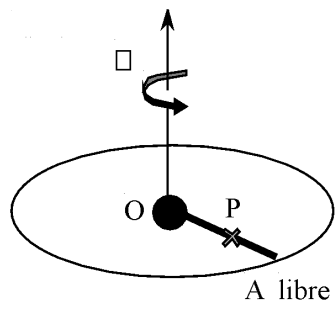


Fig. 2A

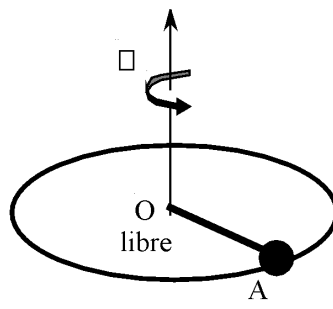


Fig. 2B

, EMBED

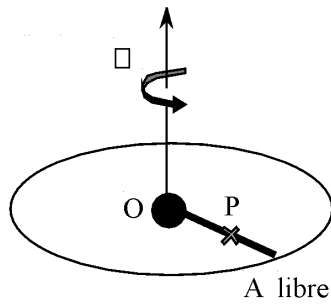


Fig. 2A

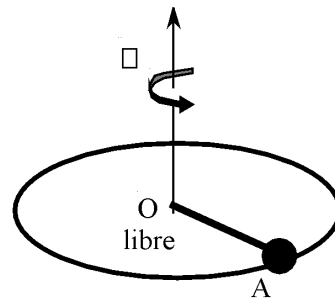


Fig. 2B

Equation.DSMT36

EMBED Equation.DSMT36

, où

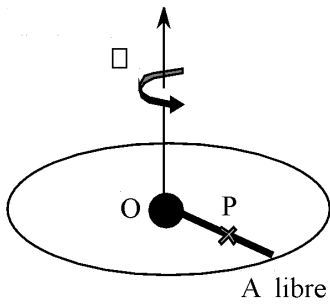


Fig. 2A

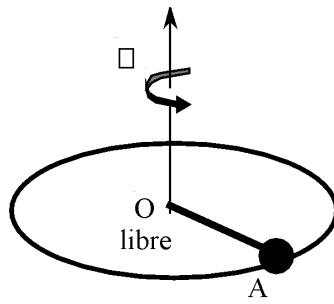


Fig. 2B

est porté par l'axe de la cheminée, EMBED Equation.DSMT36

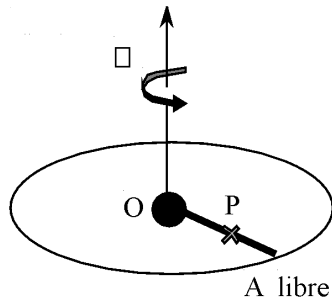


Fig. 2A

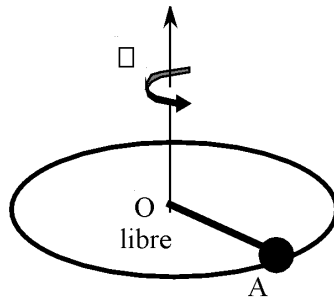


Fig. 2B

est perpendiculaire à

EMBED Equation.DSMT36

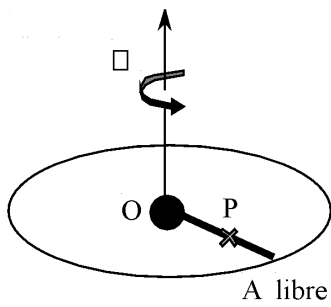


Fig. 2A

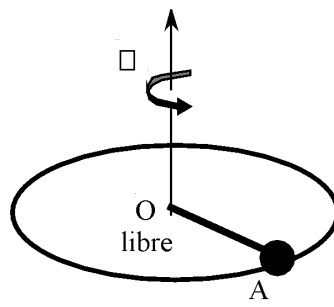


Fig. 2B

dans le sens de rotation de l'angle θ et G est le centre de masse de la cheminée. Les moments d'inertie en G autour de l'axe Gz et en O autour de l'axe Oz sont respectivement

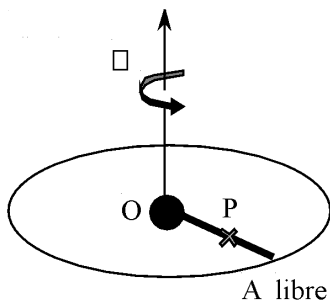


Fig. 2A

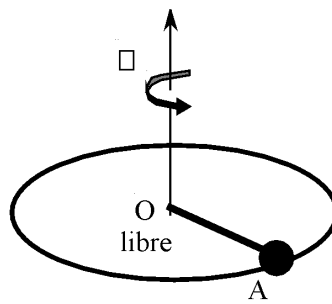


Fig. 2B

et

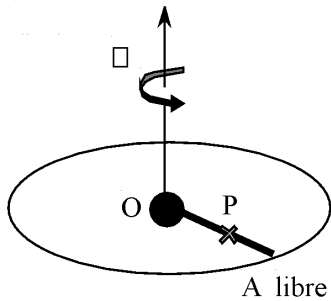


Fig. 2A

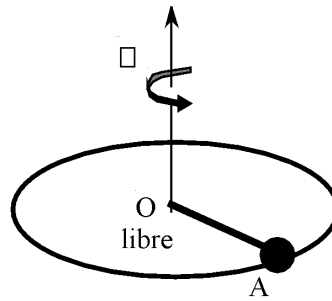


Fig. 2B

.La liaison pivot en O est parfaite. 17 – Déterminer, par application du théorème du moment cinétique en O, l'équation d'évolution de l'angle θ . 18 – Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique. 19 – Exprimer, en fonction de l'angle θ , les composantes R_u et R_v de la réaction du sol en O en projection sur

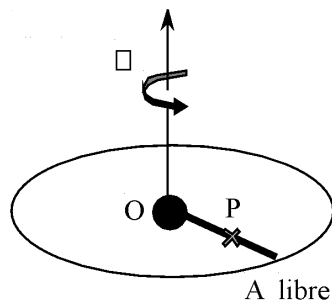


Fig. 2A

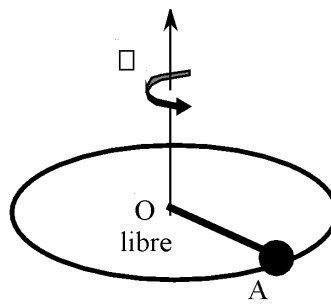


Fig. 2B

et sur EMBED

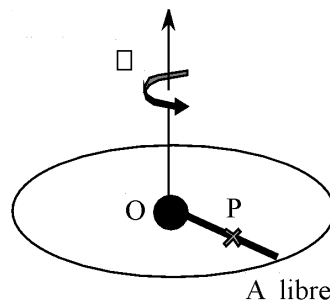


Fig. 2A

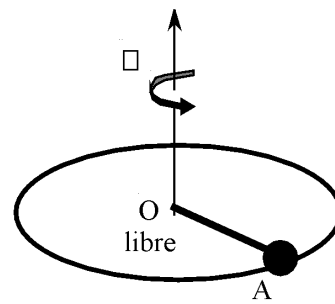


Fig. 2B

Equation.DSMT36

20 – Pour quelle valeur de la cheminée décolle-t-elle du sol ?

En réalité, une cheminée peut se briser au cours de sa chute. L'étude suivante va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute. Une longueur $OP = d$ de cheminée subit l'action du sol en O, l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en P. Cette action assure la rigidité de la cheminée. Le contact en P n'est pas ponctuel. L'action du reste de la cheminée sur la longueur d est modélisée par une force S de composantes EMBED Equation.DSMT36 et S_v et un couple C porté par l'axe horizontal Oz .

21 – En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la longueur d de cheminée, exprimer S_v en fonction de M , g , d et D . La grandeur S_v est appelée effort de cisaillement. Tracer qualitativement le graphe donnant S_v en fonction du rapport EMBED Equation.3 (EMBED Equation.DSMT36 est donné).

22 – Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement EMBED Equation.DSMT36 est le plus important ; quel est ce point ?

23 – Montrer que le théorème du moment cinétique en O, appliqué à la longueur d de cheminée conduit à l'expression suivante du moment (noté C) du couple C :
EMBED Equation.3 .

24 – Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ? Commenter à ce sujet les deux photographies ci-dessous.

*FIN DE CE PROBLÈME
FIN DE L'ÉPREUVE*