חוזק במערכת אופניים או:

מדוע מסמרות נגזרות וגלים מתפתלים?

פרק ה': הכפיפה או:

מה קורה כאשר פיל מתיישב על השילדה?


פיתוח כתיבה ועריכה: דר' ירון דופלט, מפמ"ר מגמת הנדסת מכונות

גירסה משופרת תשפ"ג - ינואר 2023

חלק 1: תופעת הכפיפה מהי?

הפיל שהתיישב על הגלגש בספר "החומר, הכוח והחוזק" גרם לחומר ממנו עשוי בסיס הגלגש להיכנע. מה יקרה למסגרת האופניים (מסגרת Frame, שילדה – Chasis) אם הפיל יתיישב על המוט העליון ("רמה") של שילדת האופניים?

דרך אגב, כנראה שאת הניסוי הזה לא תצליח לעשות (מאיפה תשיג פיל, ונראה אותך משכנע אותו לעלות על האופניים שלך, ובכלל לא בטוח שאתה תסכים שהוא יעלה על האופניים שלך). אבל גם אם תיקח קורת לגו, או כל מוט אחר שעשוי מחומר כלשהו, אלומיניום ואפילו פלדה ותעמיס אותו במשקל רב במרכזו כאשר הוא נתמך בשני קצותיו נניח בין שני שולחנות כיתה תוכל לראות שמשהו קורה למוט.



אם נתבונן במוט "מקרוב" נראה שהמוט משנה את צורתו.

נתבונן במקרים דומים:

לפתע דג נתפס בקרס החכה.

מה קורה לחכה?

ספורטאי מרים משקולות.

מה קורה למוט?

מתעמל על מכשיר התעמלות

מה קורה למתח?

כל המוטות הנזכרים בדוגמאות עוברים שינוי בצורתם ממוט ישר למוט בעל עקמומיות.

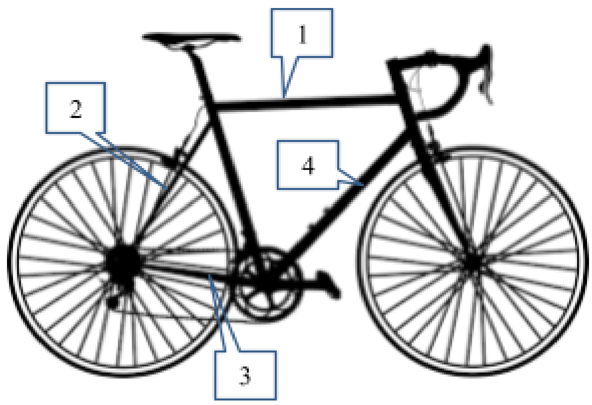
בשפה מקצועית אומרים שהמוטות מתכופפים.

מצב העמיסה של המוטות נקרא כפיפה (Bending).

משימה:

הבא דוגמאות נוספות מחיי היום יום שבהן אפשר לראות דוגמאות למוטות, קורות, מנופים, גשרים או כל דבר אחר שרואים שעבר תהליך של כפיפה.

סמן באיור של האופניים את העומסים החיצוניים שלדעתך פועלים על כל אחד מארבעת המוטות של שילדת האופניים.



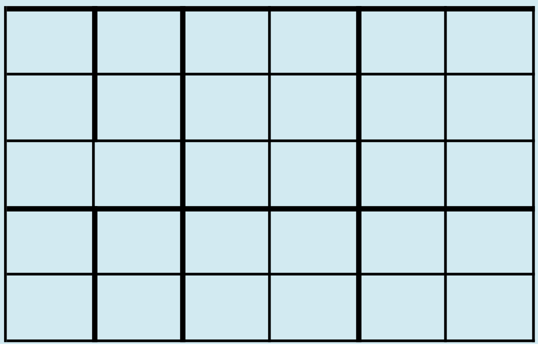
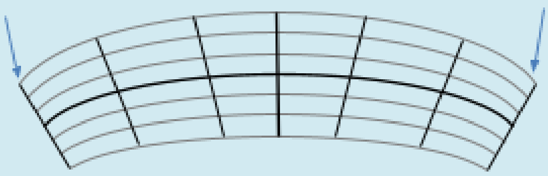
משימה: מה קורה למוט המתכופף?

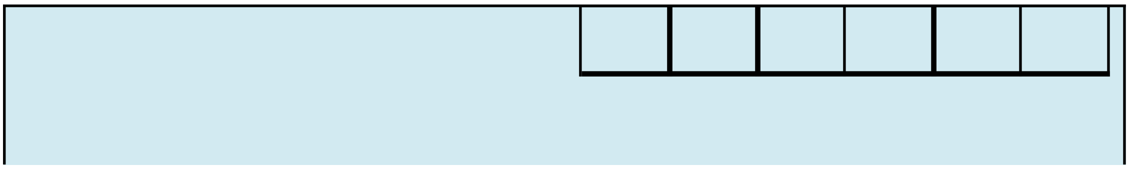
נתאר לנו מה קורה למוט שמעמיסים אותו. גם אתה הקורא מתבקש לבצע ניסוי דומה.

קח ספוג מאורך שצורתו מנסרה מלבנית. הדגש את הקו האמצעי כמתואר באיור.

הפעל כוחות בעזרת האצבעות כך שיגרמו לספוג להתכופף.

התבונן בתאים המשובצים בזמן שהכוחות הגורמים לכיפוף פועלים על הספוג.

מבט צד על ספוג	
קווים על ספוג לפני הפעלת העומס	שינוי הקווים על הספוג אחרי הפעלת העומס
	



שים לב: התאים מעל הקו האמצעי מתרחבים (מתארכים). והקווים מתחת לקו האמצעי מתכווצים. הקו האמצעי שאינו מתארך ואינו מתכווץ נקרא בשם קו ניטרלי. קו זה עובר דרך מרכז הכובד של הגוף.

שאלה

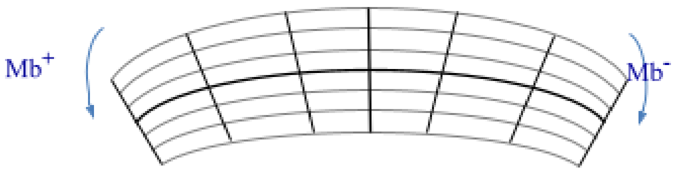
הקורות המרכיבות את גג הרעפים בבתים מיוצרות מפלדה ולא מיציקת ברזל או בטון. מדוע?

תשובה

הקורות מתכופפות, מהן מתארכות ומהן מתכווצות. הפלדה (זכור ספר "החומר, הכוח והחוזק") עומדת בשני המצבים האלה – מתיחה ולחיצה. ואילו יציקת ברזל ויציקת בטון אינן "אוהבות" התארכות ואינן עומדות בה.

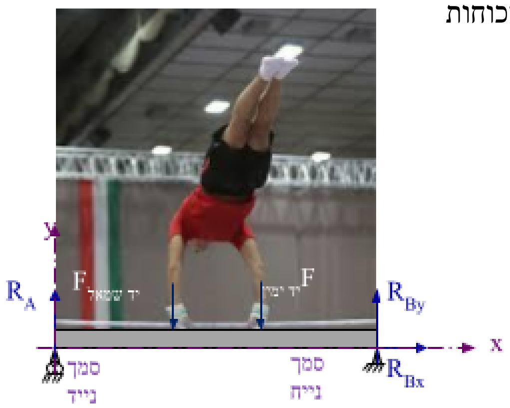
מה גורם לכפיפה?

כאשר אנחנו מכופפים את הספוג אנחנו מפעילים כוחות הגורמים למומנטים. החיצים באיור שלפניך מסמנים את המומנטים שאתה מפעיל על הספוג.



למומנטים שיוצרים הכוחות החיצוניים אנחנו קוראים בשם: "**מומנט כפיפה**" ומסמנים אותו באות: M_b (האות הקטנה b היא כמובן האות הראשונה של תופעת הכפיפה – Bending).

נתבונן בדוגמת המתעמל שהבאנו קודם לכן ונתאר אותה באמצעות דג"ח:



ניזכר, בדג"ח אנחנו מסמנים בצורה סכמטית (פשוטה) רק את הכוחות הפועלים על הקורה ולא את מה שיוצר את הכוחות הללו.

כוחות התגובה R_A ו- R_B הם כוחות שהסמכים מפעילים כתגובה (Reaction) לכוחות החיצוניים $F_{\text{יד ימין}}$ ו- $F_{\text{יד שמאל}}$ המופעלים על ידי המתעמל על המוט. כל אחד מהם שווה בערכו לחצי משקלו של המתעמל.

למעשה שני הסמכים הם נייחים אולם אנחנו לא נפתור בעיות בהן יש שני סמכים נייחים משום שנדרשת טכניקה מסובכת יותר לפתרון בעיות מסוג זה הנקראות "בעיות יתר סטטיות".

קיימים מספר סוגי סמכים (תומכים). באיור סימנו שניים אחד נייד (זה שמתואר על גלגלים – עיגולים) ונייח ללא הגלגלים. הסמך הנייד יכול ליצור כוח תגובה אנכי בלבד. הסמך הנייד יכול להתנגד לתנועה גם בציר X ולכן מקובל להוסיף גם חץ בכיוון ציר X, המייצג את כוח התגובה בציר X. בכל הדוגמאות שאנחנו נביא לגבי קורות כמו המוט שהמעמל שלנו מתרגל עליו אנחנו נשתמש בשני הסמכים הללו ובסמך נוסף שנקרא "**ריתום**" (קיבוע)

סמך זה מייצר בנוסף לכוח תגובה אנכי וכוח תגובה אופקי גם מומנט התנגדות למומנטים חיצוניים שפועלים על הגוף.

משימה

תאר את כל הכוחות הפועלים על המוט המחבר בהרמת משקולות.

ציין מהם הסמכים (התומכים) במקרה זה.

ציין מהם הסמכים (התומכים) במקרה זה.

ובמקרה של החכה, איזה סמך מחזיק את החכה:

סמך נייד, סמך נייח או ריתום?

חישוב מוט (קורה) לכפיפה מורכב משני שלבים:

שלב א': סטטיקה	שלב ב': חוזק
1. קריאת נתונים והגדרת העומד והתומכים 2. בניית דיאגרמת גוף חופשי (דג"ח) 3. חישוב תגובות התומכים	1. בניית מהלך מומנטי כפיפה 2. בניית מהלך כוחות גזירה 3. חישובי חוזק

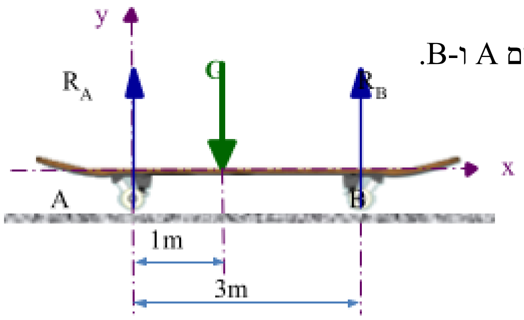
ברשימה זו מופיעים מושגים שטרם דיברנו עליהם. נבהיר אותם בהמשך. שים לב: כל החישובים וההסברים נבצע שלב אחר שלב. גם תרגילים נפתור בחלקים על פי ההתקדמות בנושא.

דוגמת חישוב 1 (פיל על גלגש):

פילון שמשקלו G=6000 N עולה על הגלגש שלך:

- בנה דג"ח (דיאגרמת גוף חופשי) של הקורה
- חשב את כוחות התגובה של התומכים.

פתרון



נסמן את בסיס הגלגש כקורה AB הנתמכת על ידי 2 תומכים ניידים A ו-B.

בניית דג"ח:

תומך מגיב לכוחות חיצוניים. במקרה שלנו כוח חיצוני אנכי ואין כוחות חיצוניים אנכיים. לכן אין תגובה אופקית לתומך A.

מומנט שמייצר כוח המשיכה של כדור הארץ, המושך את הפיל מטה G:

$M_A(F) = -6000 \cdot 1 = -6000N \cdot m$

מומנט שמייצר כוח התגובה R_B $\qquad M_A(R_B) = +R_B \cdot 3N \cdot m$

מומנט שיוצר כוח R_A $\qquad M_A(R_A) = \mathbf{0Nm}$

מדוע $M_A(R_A)$ שווה לאפס? כוח R_A עובר דרך הציר A, המרחק בין הכוח לבין הציר (זרוע!) שווה ל-0 וגם המומנט (כוח כפול זרוע) שווה ל-0.

שימו לב, מומנט הכפיפה שהכוחות מפעילים על הקורה מנסים לסובב אותה ביחס לציר x ולא כמו מומנט הפיתול שפעל סביב ציר z. נזכיר מומנט הוא מכפלת הזרוע, r, בכוח, $F, M = r \cdot F$ [mm·N]. שים לב, לצערנו בכל עולם הנדסת מכונות היחידות של מומנט הפוכות ממה שלמדנו כלומר: Nmm במקום mmN. בפרק זה אנחנו נשתמש גם בצירוף היחידות המקובל בעולם $M = F \cdot r$ [N·mm].

ולכן, משוואת שיווי משקל של מומנטים תהיה:

$$A:\ \Sigma M_A = 0 \ \Rightarrow\ R_B \cdot 3 - 6000 = 0 \ \Rightarrow\ R_B = \frac{6000}{3} = 2000N$$

ביחס לציר y סכום הכוחות שווה לאפס כלומר: $\qquad \Sigma F_y = 0$

$$\sum F_y=0 \ \Rightarrow\ R_A - F + R_B = 0 \ \Rightarrow\ R_A = F - R_B \ \Rightarrow\ R_A = 6000 - 2000 = \mathbf{4000N}$$

דוגמת חישוב 2 (מתעמל על מתח)

תאר בצורה סכמתית מתח העמוסה על ידי מתעמל ואת הכוחות החיצוניים הפועלים עליה.

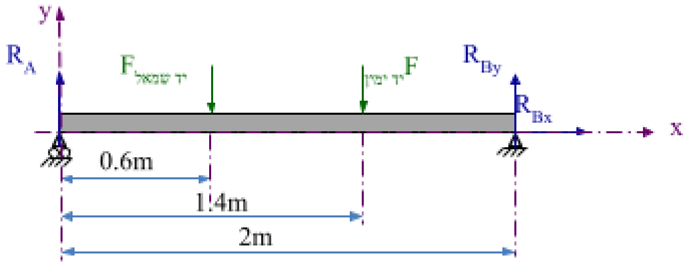
הנח שמשקלו של המתעמל הוא G=700N והוא תופס את המתח בידיו בצורה סימטרית. משקלו של המתח זניח.

המרחק בין ידיו של המתעמל הוא 0.8m ואורך המתח הוא 2m.

1. בנה דג"ח של המתח המתואר בתמונה.
2. חשב את כוחות התגובה של התומכים של המתח.

פתרון:

בדוגמא זו נקצר את הפתרון בכך שלא נרשום כל מומנט בנפרד ואח"כ נחבר אותם במשוואת שיווי משקל מומנטים אלא ישר נרשום את המשוואה:



שימו לב, את נתוני המידות בשאלה אנחנו תמיד מתרגמים למידות ביחס לציר y.

ולכן, משוואת שיווי משקל של כוחות ושל מומנטים:

מדוע לא חישבנו $\sum F_x=0$ ומה ערכו של R_{Bx}?

$$\Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; R_{By}\cdot 2 \overbrace{-350\cdot 0.6}^{-210} \overbrace{-350\cdot 1.4}^{-490} = 0 \;\Rightarrow\; R_{By}=\frac{700}{2} = 350N$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_A - F_{יד\ ימין} - F_{יד\ שמאל} + R_B = 0$$

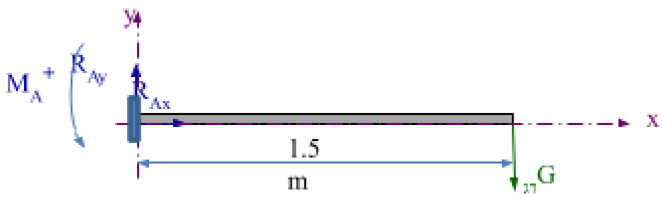
$$\Rightarrow\; R_A = F_{יד\ ימין} - F_{יד\ שמאל} - R_B \;\Rightarrow\; R_A = 350 + 350 - 350 = \mathbf{350N}$$

האם מתחילת הפתרון היית יכול לנחש את תוצאת החישוב? הסבר.

דוגמת חישוב 3: לא שכחנו את הדייג היושב בסבלנות רבה וחכה בידו. הדג תפס את קרס החכה והחכה מתכופפת.

1. תאר בצורה סכמתית חכה העמוסה על ידי הדג ואת הכוח החיצוני הפועל עליה (משקל הדג!). הנח שמשקלו של הדג הוא G=50N. משקלם של החכה והחוט זניחים. אורכה של החכה 1.5m, הנח שהדייג מחזיק את החכה כריתום. בנה דג"ח של החכה.
2. חשב את תגובות התומך (הדייג!).

תיאור סכמתי ודג"ח:



כאן M_A – מומנט תגובה של התומך A (ריתום).

ולכן, משוואת שיווי משקל של כוחות ושל מומנטים:

$$\Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A - G_{דג}\cdot 1.5 = 0 \;\Rightarrow\; M_A - 50\cdot 1.5 = 0 \;\Rightarrow\; M_A = \mathbf{75\ N\cdot m}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_{Ay} - G = 0 \qquad \Rightarrow\; R_{Ay}=\mathbf{50N}$$

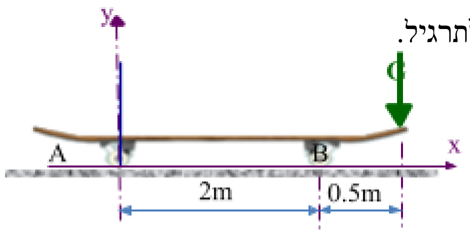
משימות לביצוע עצמי

תרגיל 1

1. שרטט דג"ח של המוט המחבר בין המשקלות בהרמת משקולות. הנח שמשקל כל אחת מן המשקולות הוא G=1000N והן תלויות על קצותיו של המוט. משקלו של המוט זניח. אורכו של המוט הוא 1.6m. המשקולן מחזיק את המוט בצורה סימטרית. המרחק בין ידיו הוא: 1.2m. חשב את כוחות התגובה של התומכים (ידיו של המשקולן!).

תשובה: כוחות התגובה (↑) $R_A=R_B=1000N$

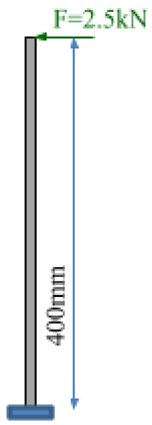
תרגיל 2



בנה דג"ח וחשב את כוחות התגובה לקורה העמוסה כמתואר באיור לתרגיל.

תשובה: $R_A=400N$ (↓) ; $R_B=2000N$ (↑)

תרגיל 3



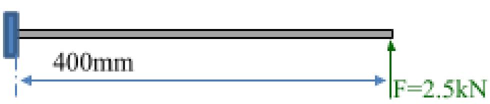
בנה דג"ח וחשב את התגובות לקורה העמוסה כמתואר באיור לתרגיל.

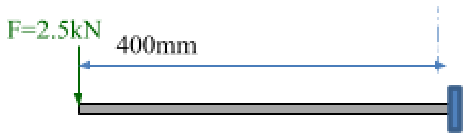
הערה: אפשר לסובב את הקורה יחד עם הכוח המופעל עליה עד למצבה האופקי, כמתואר באיור נוסף.

תשובה: $M=1{,}000{,}000N$ (↓)

$R_B=2000N\cdot mm$ (↑)

איור למצב המסובב של הקורה:





בהמשך נלמד כיצד מבצעים תיאור גרפי של מהלך כוחות גזירה ומהלך מומנטי כפיפה.

תיאור גרפי של מהלך מומנטי כפיפה ומהלך כוחות גזירה

מדוע בכלל נדרש תיאור גרפי? מי משתמש בתיאור גרפי (חוץ ממתמטיקאים)?

ובכן, כידוע לנו תיאור גרפי הומצא על-ידי אנשים כדי לתאר בצורה ויזואלית (תמונתית) תהליכים שונים. דוגמאות: תזרים חשבון בנק במונחים של ציר זמן וכמות הכסף הנמצאת בחשבון. דוגמא נוספת: תיאור דרך שעברת בטיול במונחים של מרחק שעברת כפונקציה של הזמן (x=f(t). פונקציה? כן כמו שלמדנו בשנה שעברה ניתן לתאר את המומנט כפונקציה של מרחק ועוצמת הכוח: $M=f(F)=r\cdot F$. כמו שלמדנו השנה ניתן לתאר את המאמץ כפונקציה של מכפלת מודול האלסטיות בהתארכות: $\sigma = f(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \sigma = E\cdot\varepsilon$.

7. מהלך – מהו?

א. מהלך – חשבון בנק:

- ☐ פתחת חשבון בבנק. והפקדת 400 ₪
- ☐ כעבור שבוע ימים הפקדת (הכנסה) עוד 100 ש"ח.

כמה כסף בחשבונך כעת?

- ☐ שבועיים אח"כ משכת (הוצאה) 700 ש"ח לקניית אופניים.

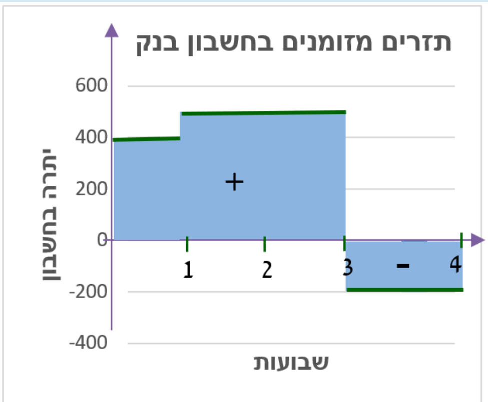
מהו כעת המצב בחשבונך?

- ☐ כעבור שבוע החלטת לסגור את החשבון.

שים לב, לסימני ה- "+" וה- "-" בתרשים.

שאלה: מדוע בתיאור הגרפי הזה הקווים הם אופקיים?

יתרה	הוצאה	הכנסה	שבועות
400		400	1
500		100	2
500			3
-200	-700		4



ב. מהלך – טיול:

אתה מטייל בין שתי התחנות A ו-B. בדרך יש תחנות עצירה עם נוף יפה. אתה מתחיל את הטיול מתחנה A.

אתה עוצר בתחנות עצירה וסופר את התרחקותך מתחנה A.

- ☐ הלכת מתחנה A עד לתחנת עצירה 1 800m.
- ☐ אחר כך חזרת 200m עד לתחנה 2.

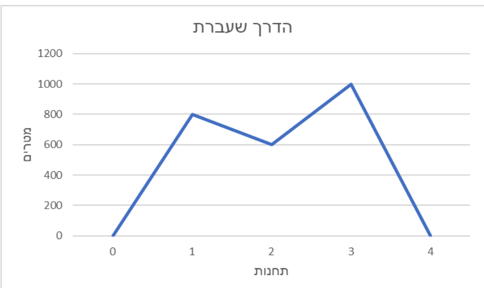
בכמה מטרים אתה מרוחק מתחנה A בתחנה זו?

- ☐ מתחנה 2 התקדמת 400m עד לתחנה B.

מן התחנה הזאת האוטובוס מביא אותך בחזרה ל-A.

כמה מטרים עובר האוטובוס?

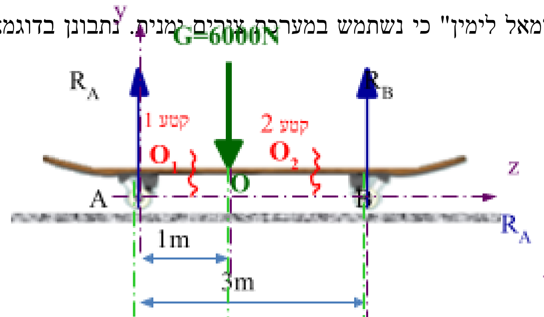
מדוע בתיאור הגרפי הזה הקווים נטויים?



משרד החינוך, המינהלה לחינוך טכנולוגי, רחוב השלושה 2, יד-אליהו, תל-אביב 61092
אתר המגמה, פורטל חומרי לימוד; מוקד מקצוע; נייד: 050-628-2810; ise@israschool.org.il

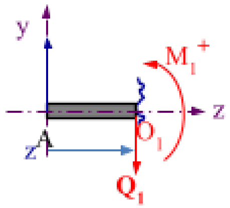
כללי סימון בכפיפה

כללי הסימון הם עניין של הסכמה כללית, כמו חציית כביש באור ירוק או כמו שבמערכת צירים ימנית הכיוון של ציר x הוא ימינה והכיוון החיובי של ציר y הוא למעלה. חייבים לשמור על כללים אלו כי הם בינלאומיים ונוצרו לצורך הבנה הדדית. כללי הסימנים בנויים כך שהמהלך **בלתי תלוי** בנקודת תחילת בניית המהלך שאנחנו קובעים אותה, אך תלוי רק בכוחות המופעלים על הקורה (או על המוט, או על הציר, הסרן או הגל). שים לב, לצערנו בכל עולם הנדסת מכונות היחידות של מומנט הפוכות ממה שלמדנו כלומר: Nmm במקום mmN בכל התרגילים בהמשך אנחנו ניצמד למה שמקובל בעולם וגם בגלל שהשיטה שאנחנו מלמדים כאן שומרת על סימני המומנט בזכות השימוש בפונקציה ונגזרתה. נגזרת של פונקצית המומנט היא שיפוע גרף המומנט וגם ערך הכוח בקטע שנחקור. בדרך כלל נתחיל את בניית המהלך בגישה שנקרא לה "משמאל לימין" כי נשתמש במערכת צירים ימנית. נתבונן בדוגמא שאתם כבר מכירים:

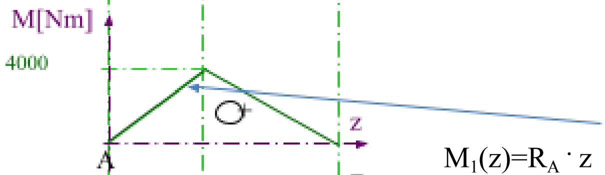


המשך דוגמת חישוב 1 (פיל על גלגש):

קטע 1:



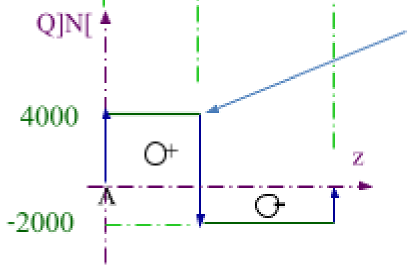
נתאר לעצמנו קטע קטן של קורה (שנסמן אותו, באות O_1 תמיד לפני מקום פעולתו של הכוח הראשון ומרחקו מראשית הצירים הוא z כלשהו.



$M_1(z)=R_A \cdot z = 4000z \{z = 0 \quad M_1 = 0Nm \; z = 1 \; M_1 = 4000Nm$

משיקולי מומנטים סביב נקודה O_1 קיבלנו: $M_1(z)=4000z$. שהיא פונקציה קווית עולה (כי המקדם של המשתנה z הוא 4000 בסימן + כלומר הגרף שלה יהיה קו אלכסוני בעל שיפוע עולה.

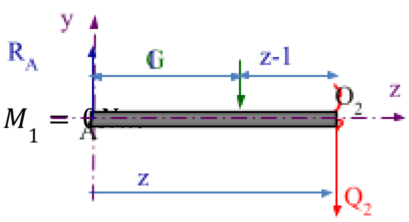
בשלב זה נחשב נגזרת של הפונקציה (M(z הנגזרת של פונקציה קוית $f(x)=ax$ היא: $f'(x)=a$ ונקבל: $Q_1(z)=4000N$ כלומר קיבלנו שפונקציה של Q היא פוקנציה קוית ששיפועה מקביל לציר. במערכת צירים של Q כפונקציה של Z הגרף של הפונקציה $Q_1(z)=4000$ ייראה כך:



שים לב למושג הנגזרת יש את המשמעות הבאה: $Q(z) = M_1'(z) = \frac{\Delta M}{\Delta Z}$ ומאחר שבקטע הזה הגרף של Q חיובי בכל הקטע הפונקציה של המומנט **עולה בשיפוע קבוע**.

קטע 2:

נרשום את משוואת שיווי משקל מומנטים סביב נקודה O_2. הבטוי הראשון פשוט זהה לביטוי השני, רק מוסיפים את המומנט שנוצר כתוצאה מהכוח G:

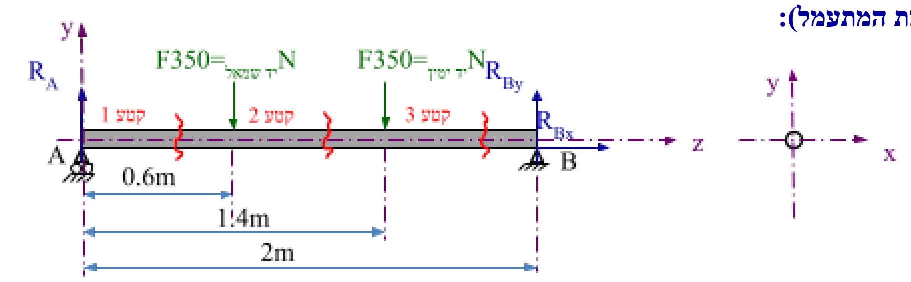


$$M_{O_2} = 0 \rightarrow M_2(z) = R_A z - G(z-1) =$$
$$= 4000z - 6000(z-1) = 4000z - 6000z + 6000 =$$
$$= -2000z + 6000 = \{z = 1 \; M_1 = 4000Nm \; z = 3 \; M_1 = \ldots$$

ואם נגזור את פונקצית המומנט נקבל: $Q_3(z)=M_3'(z)= -2000N$

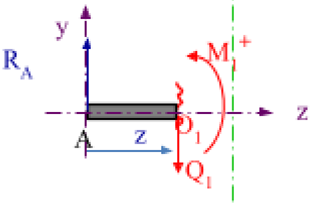
המומנט המקסימלי המתקבל בדוגמת פיל ש"רוכב" על גלגש הוא: Mb_{max} = **4000Nm**.

המשך דוגמת חישוב 2 (דוגמת המתעמל):

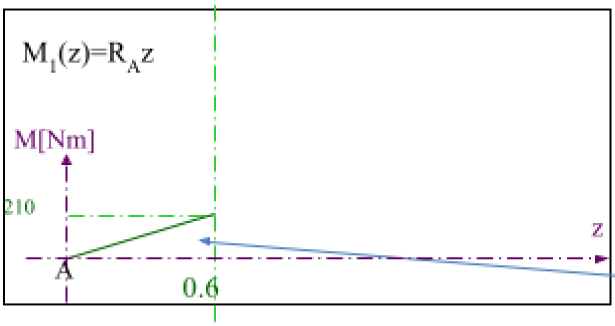


שימו לב למערכת הצירים בכל היטל.

קטע 1:



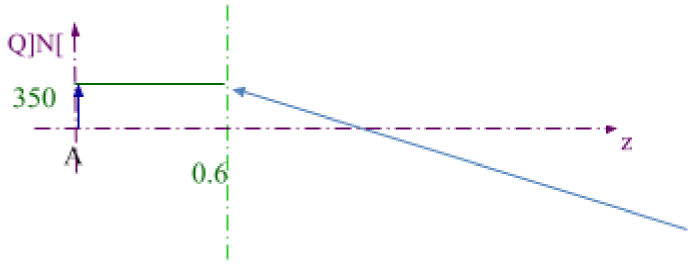
נתאר לעצמנו קטע קטן של קורה (שנסמן אותו, באות O_1 תמיד לפני מקום פעולתו של הכוח הראשון ומרחקו מראשית הצירים הוא z כלשהו.



משיקולי מומנטים סביב נקודה O_1 קיבלנו: $M_1(z)=350z$. שהיא פונקציה קווית כלומר הגרף שלה יהיה קו אלכסוני בעל שיפוע.

במערכת צירים M כפונקציה של z גרף ישר שמשוואתו היא: $M_1(z)=350z$ נראה כך:

כלומר קיבלנו שני ערכים למומנט, בתחילת הקטע וממש חלקיק מ"מ לפני סוף הקטע. כי הקטע הבא כבר יכלול את הכוח של יד שמאל. בשלב זה נחשב נגזרת מסדר 1 של הפונקציה (M(z).



הנגזרת של פונקציה קווית f(x)=ax היא: $f'(x)=a$ ונקבל ש: $Q_1(z)=350N$ כלומר פונקציה קווית ששיפועה מקביל לציר. במערכת צירים של Q כפונקציה של Z הגרף של הפונקציה $Q_1(z)=350$ ייראה כך:

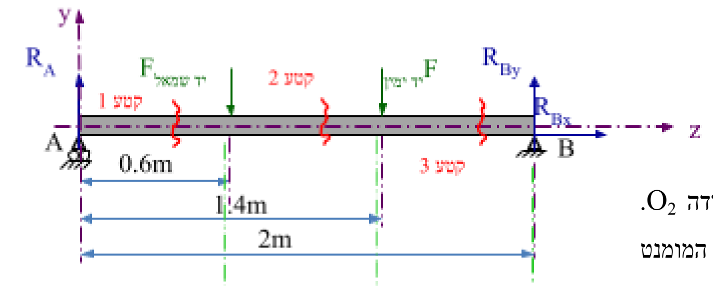
שים לב למושג הנגזרת יש את המשמעות הבאה: $Q(z) = M_1'(z) = \frac{\Delta M}{\Delta Z}$ ומאחר שבקטע הזה הגרף של Q חיובי בכל הקטע הפונקציה של המומנט עולה בשיפוע קבוע.

את חישוב Q_1 ניתן לבצע גם באמצעות סכום כוחות על ציר y:

$$\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad R_A - Q_1(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1(z)= R_A \quad \Rightarrow \quad Q_1(z) = 350N$$

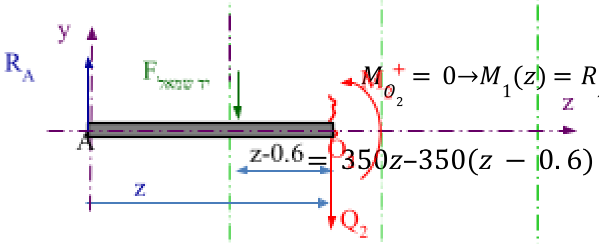
אולם אנחנו מעדיפים תמיד לבצע נגזרת ראשונה של פונקצית המומנט ולקבל את הפונקציה של הכוח כפונקציה של z שהגרף שלה מתאר באופן מדויק את מהלך כוחות הגזירה בחתך הנדון.

קטע 2:



נרשום את משוואת שיווי משקל מומנטים סביב נקודה O_2.

הבטוי הראשון פשוט זהה לביטוי השני, רק מוסיפים את המומנט שנוצר כתוצאה מהכוח $F_{\text{יד שמאל}}$ ולכן נקבל:

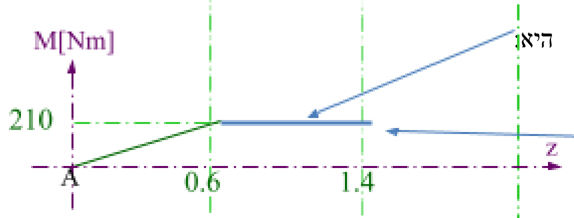


$$\sum M_{O_2}^{+} = 0 \rightarrow M_1(z) = R_A z - F_{\text{שמאל}}(z-0.6) =$$

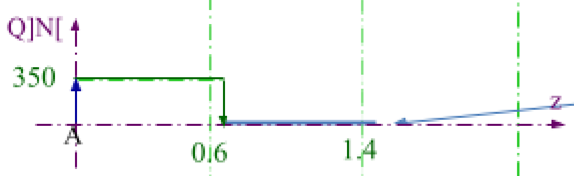
$$= 350z - 350(z-0.6) = 350z - 350z + 210 =$$

$$= 210 \begin{cases} z = 0.6 & M_1 = 210Nm \\ z = 1.4 & M_1 = 210Nm \end{cases}$$

במערכת צירים M כפונקציה של z גרף ישר שמשוואתו היא: $M_2(z)=210Nm$ נראה כך:

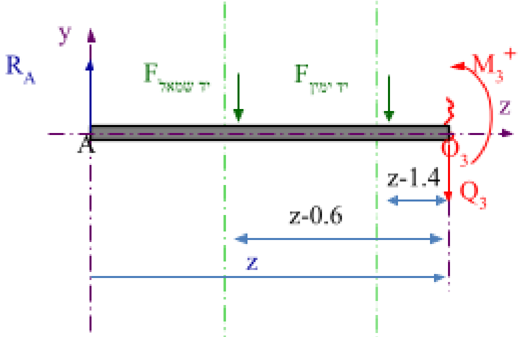


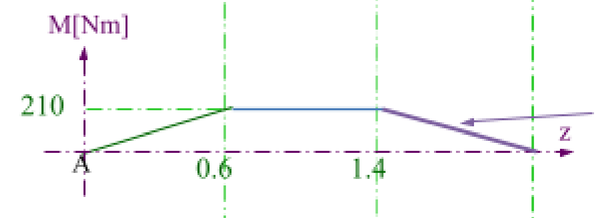
הנגזרת של פונקציה ששווה למספר קבוע כמו: $f(x)=a$ היא: $f'(x)=0$, כלומר: $Q_2(z)=M_2'(z)=0$. במערכת צירים Q כפונקציה של Z הגרף של הפונקציה $Q_2(z)=0$ ייראה כך:



קטע 3:

משוואת המומנטים בקטע זה מורכבת אבל הביטוי שמתקבל בסוף ממש פשוט:

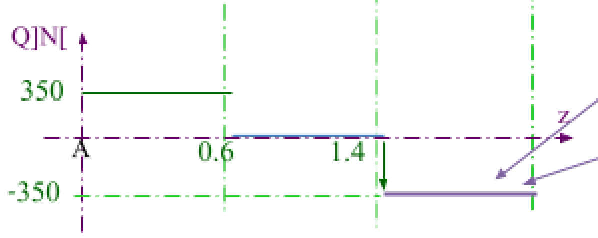




הגרף שמתאר את הפונקציה $M_3(z)=-350z+700$ הוא:

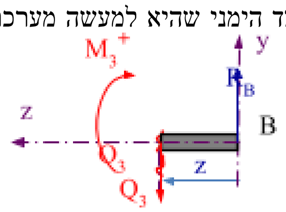
ואם נגזור את פונקציית הכוח נקבל: $Q_3(z)=M_3'(z)=-350$

וגרף הפונקציה של הכוח הוא:



קטע 3 בגישת מערכת צירים שמאלית:

את הקטע האחרון, פתרנו באותו כיוון כמו קטע 2 פשוט הוספנו את הכוח של היד הימנית של המתעמל. וזוהי הדרך המומלצת לשרטוט מהליכי המומנטים והכוחות. נציג כאן את המשך התרגיל בגישה שנייה – גישת הצד הימני שהיא למעשה מערכת צירים שמאלית.

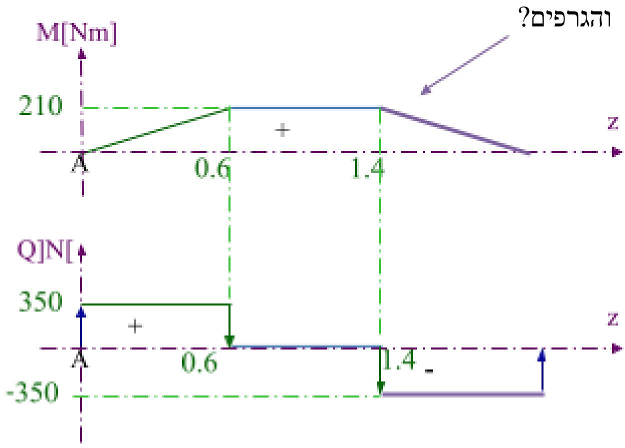


שימו לב, שהאיור זהה לחלוטין רק תמונת ראי של קטע 1.

ומשוואת המומנטים תהיה באופן מפתיע זהה לחלוטין למשוואה שרשמנו בקטע 1:

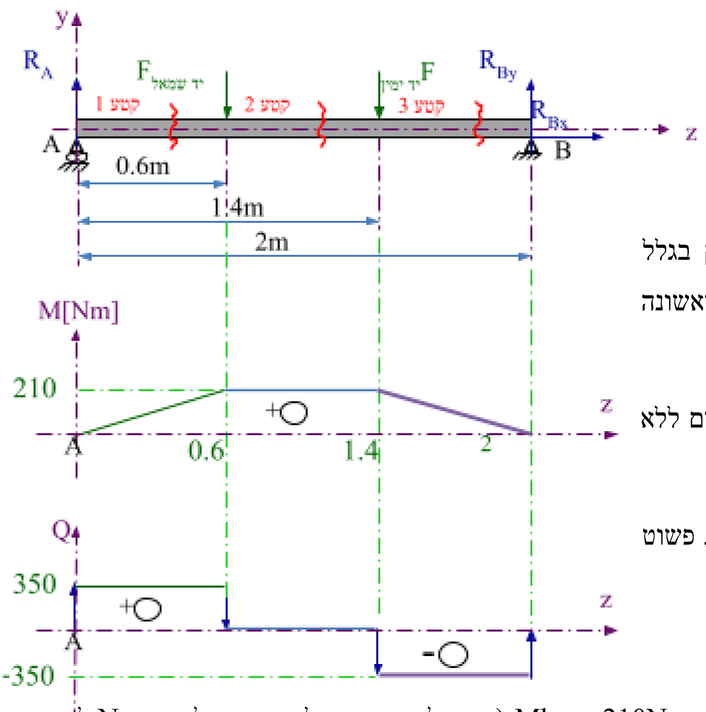
$$M_3(-z)=R_B(-)z$$

$$Q_3(z)=M_2'(z)=\mathbf{-350N}$$



שימו לב, הפכנו את מערכת הצירים אז הסימונים בפונקציות הפוכים.

לסיכום התרגיל נציג את כל המהלך כולל השרטוט המקורי:



הערות לסיכום:

ראשית, תהליך הפתרון נראה ארוך ומסובך רק בגלל שהסברנו כל שלב ושלב ורק בגלל שזאת הפעם הראשונה שאתה רואה את דרך הפתרון הזאת.

זוכר את הפעם הראשונה שניסית לרכב על אופניים ללא גלגלי עזר?

בתרגיל הבא שנפתור תראה שזה יהיה יותר פשוט. פשוט כמו הרכיבה שלך היום על אופניך.

שימו לב, לסימנים של חיובי ושלילי בגרפים.

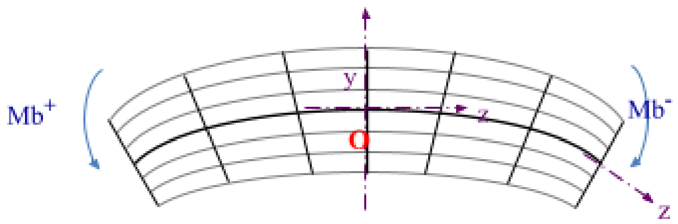
המומנט המקסימלי המתקבל בדוגמת המתעמל הוא: Mb_{max}=210Nm (שימו לב, ויתרנו על סימן הכפל בין ה- N ל- m וגם רשמנו את יחידת המידה של מומנט Nm במקום mN (מותר לרשום בשתי הדרכים).

מומנט חיובי מקבלים סימן "+" קורה שגרף המומנט שלה חיובי בקטע מסוימת מקבל בהשפעת העומס החיצוני צורה של קערה כלומר היא תאגור מים עם ירד עליה גשם. וקורה שגרף המומנט שלה שלילי תקבל צורה של קמר (כמו הספוג שקימרנו בניסוי) והמים יישפכו כלפי מטה.

חישוב המאמץ בתופעת הכפיפה

לפני שנוכיח (כמו שהוכחנו בתופעת הפיתול) שנוסחת הכפיפה מאוד דומה לנוסחת הפיתול בואו נחזור לניסוי הספוג ונבין לא רק את הגיאומטריה של הספוג שנתון לכפיפה אלא ננתח מהם המאמצים הפנימיים הנוצרים בספוג כתוצאה מהפעלת צמד הכוחות החיצוניים שגרם לכפיפת הספוג.

הכוחות שהפעלת על הספוג יצרו את מומנט הכפיפה כי הם פעלו במרחק מציר הסימטריה המודגש בציור.



ציר זה (למעשה זה ציר z שהתכופף) עובר דרך מרכז הכובד (שהוא מרכז הסיבוב שהמומנטים מנסים לסובב את הספוג). דרך מרכז זה גם עובר קו הכפיפה הניטרלי שלא מתארך ולא מתקצר.

אם קווי הכפיפה שנמצאים מעל הקו הניטרלי מתארכים וקווי הכפיפה שמתחת לקו הניטרלי מתקצרים אז המאמצים הפנימיים שפועלים בספוג הם מאמצי מתיחה בחלק העליון ומאמצי לחיצה החלק התחתון.

ניזכר בתופעת הפיתול: ניקח ספוג עגול (כן כזה שילדים משחקים איתו בבריכה) ונפתל אותו באמצעות מומנט פיתול שנפעיל עליו. סביב איזה ציר מתפתל שטח החתך?

נכון סביב ציר z ואילו סביב איזה ציר מתכופף הספוג כאשר מפעילים עליו את מומנטי הכפיפה שתארנו? נכון, סביב ציר x. היכן ציר x בהיטל המתואר? הוא חודר אל המסך (או אל הדף) בניצב לציר z בדיוק בנקודה O של מרכז הכובד המרחבי של הגוף.

בואו נעשה ניסוי נוסף:

ניקח ציר של לוגו ונפעיל עליו מומנט כפיפה כמו שהפעלנו על הספוג. האם ציר הלגו התכופף? כנראה שכן. ניקח שלושה צירים של לגו וננסה לכופף אותם. האם התכופפו? אולי! ניקח 10 צירים של לגו ונפעיל עליהם את אותו צמד כוחות שיוצר את אותו מומנט כפיפה (עם הצירים באותו אורך). האם 10 צירים של לגו יתכופפו תחת אותה עוצמה של מומנט? כנראה שלא!!!

כלומר, בדיוק כמו במתיחה, מעיכה, לחיצה, גזירה ופיתול, ל**מידות חתך הגוף** יש השפעה יחד עם ה**עומס החיצוני** על המאמץ הפנימי שפועל.

בגזירה ובפיתול המאמצים היו כתוצאה מעומסים שפועל לאורך קו משיק למישור החתך ולכן קוראים להם מאמצים טנגנטים. ואכן השתמשנו באות היוונית τ לסימון מאמצי הגזירה בתופעת הגזירה ומאמצי הגזירה בתופעת הפיתול. לעומת זאת במתיחה וכפיפה העומסים החיצוניים פועלים לאורך קו מאונך למישור החתך, ולכן קוראים להם מאמצים נורמליים. וגם ראינו שלמעשה המאמצים הפנימיים שנוצרים בספוג הם מאמצי מתיחה/לחיצה. ולכן נסמן גם את המאמץ שנוצר בכפיפה באות σ_b רק הוספנו שוב את האות b כדי לציין שאנחנו עוסקים בכפיפה – Bending.

ולכן כמו בפיתול הנוסחה לחישוב המאמץ שנוצר בתופעת הכפיפה תראה מאוד דומה:

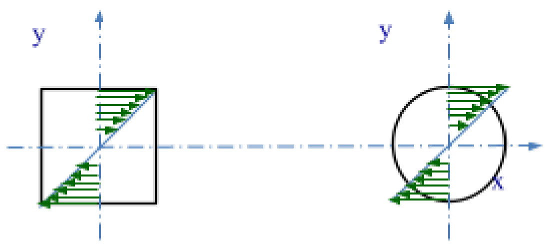
$\sigma_b = \frac{M_b}{Z_x}$	מומנט הכפיפה מודול החתך צירי מאמץ בכפיפה	M_b Z_x σ_b	mmN mm^3 $\frac{mmN}{mm^{3^2}} = \frac{N}{mm^2}$

ומהן היחידות שקיבלנו למאמץ בתופעת הכפיפה כתוצאה מחלוקה של המומנט במודול החתך? לשמחתנו קיבלנו כמובן, יחידות של מאמץ שכבר למדנו לקרוא להן: MPa.

מודול חתך צירי

אז ראינו שכמו בפיתול מודול החתך הוא המתנגד למומנט הכפיפה שהפעלנו על הקורה בעלת חתך מלבני או על הציר בעל חתך של עיגול.

נתבונן מקרוב בשטח החתך של שתי הדוגמאות:



החיצים הירוקים מייצגים את פילוג מאמצים הפנימיים. ניתן לראות שהמאמץ המקסימלי נמצא במקום הכי רחוק ממרכז הסיבוב (שם גם פועל המומנט המקסימלי) והמאמץ המיזערי (המינימלי) שווה אפס במרכז הסיבוב שם לא פועל מומנט כי זרוע הכוח, שיוצר את המומנט, שווה אפס.

שים לב שפילוג המאמצים בשטח החתך מראה שיש מאמץ משני הצדדים. כמו בפיתול ניתן להוכיח את נוסחאות המודול הצירי לחתכים שונים. בסוף הפרק תמצא טבלה המרכזת את מודול החתך הצירי ומומנט האינרציה הצירי בו משתמשים בכפיפה.

בדומה לפרק הפיתול נוסחת הכוח שגורמת למאמצי המתיחה בתופעת הכפיפה: $dF = \sigma \cdot dA$

וגם: $dM_b = r \times dF$ לכן: $dM_b = r \times \sigma \times dA$

וחלקיק שטח קטן? $dA = 2rdr$ גם: $dM_b = r \cdot dF$ לכן: $dM_b = r \cdot \sigma \cdot dA$

וגם הפעם היחס בין המאמץ המקומי למאמץ המקסימלי יהיה תלוי ברדיוס

$$\frac{\text{מקומי}}{\text{מקסימלי}} = \frac{r}{R} \Rightarrow \text{מקומי} = max\,\frac{r}{R}$$

כלומר: $dM_b = r \cdot \text{מקומי} \cdot \cdot \Rightarrow dM_b = r \cdot$ $2\frac{\sigma_{max}}{R} r^3 dr dA = 2\frac{\sigma_{max}}{R} r^2 dr$

$$M_b = \int dM_b \Rightarrow M_b = \int_{r=0}^{r=R} 2\frac{\sigma_{max}}{R} r^3 dr$$

אבל כל הביטוי $2\frac{\sigma_{max}}{R}$ הוא גודל מספרי קבוע ולכן אפשר להוציא אותו מחוץ לפעולת האינטגרל, בדיוק כמו שמוציאים גורם משותף מחוץ לסוגריים באלגברה:

$$M_b = 2\frac{\sigma_{max}}{R}\int_{r=0}^{r=R} r^3 dr \quad \Rightarrow \quad M_b = 2\frac{\sigma_{max}}{R}\frac{R^{\cancel{4}3}}{4} \Rightarrow \quad M_b = \frac{R^3}{2}\sigma_{max}$$

ואם נשנה את נושא הנוסחה כדי להראות נוסחה מעשית לחישוב מאמצי המתיחה, הנוצרים בתופעת הכפיפה נקבל:

$$\sigma_{b_{max}} = \frac{M_b}{\frac{R^3}{2}} = \frac{M_b}{\frac{d^3}{16}} = \frac{16M_b}{d^3}$$

אבל ראינו שתופעת הכפיפה שונה במקצת מתופעת הפיתול, המומנט פועל סביב ציר אחר ופילוג המאמצים שונה. בתופעת הפיתול יש מאמצי גזירה ובתופעת הכפיפה יש מאמצי מתיחה. גם הראנו מקודם שפילוג המאמצים מתרחש גם מעל מרכז הסיבוב וגם מתחת מרכז הסיבוב ולכן הנוסחה של מודול החתך הצירי מבטאת את הסימטריה הזאת בכך שאנחנו מכפילים פי שניים את המאמצים, ולכן נקבל:

$$\sigma_{b_{max}} = 2\frac{16M_b}{d^3} = \frac{32M_b}{d^3} = \frac{M_b}{\frac{d^3}{32}} = \frac{M_b}{Z_x}$$

כלומר קיבלנו שתי נוסחאות חדשות בתופעת הכפיפה:

$$\sigma_{b_{max}} = \frac{M_b}{Z_x} \le [\sigma_b] \qquad\qquad Z_x = \frac{d^3}{32}$$

המשך דוגמת המתעמל: חישוב מאמץ מקסימלי בכפיפת המתח:

ראינו שהמומנט המקסימלי המתקבל בדוגמת המתעמל הוא: $M_{bmax}=210Nm$ כעת נחשב באמצעות הנוסחה החדשה שפיתחנו את המאמץ המקסימלי שמתפתח במתח:

אם המתח הוא מוט בקוטר d העשויה מפלדת SAE1010 שמאמץ הכניעה שלה הוא: $\sigma_y=180MPa$ וניקח מקדם בטיחות [S]=2 מה יהיה קוטרו המזערי של מוט זה כדי לעמוד בעומסים החיצוניים?

1. נחשב את המאמץ המותר: $[\sigma_t] = \frac{\sigma_y}{[S]} = \frac{180}{2} = 90MPa$
2. חישוב המאמץ המותר בכפיפה: $[\sigma_t]=1.2\cdot 90=108MPa=[\sigma_b]1.2$ שימו לב המאמץ בכפיפה מסוכן יותר מאשר מאמץ מעיכה ופחות ממאמץ גזירה ולכן על סמך הנסיון שנצבר ניתן לקחת מקדם 1.2 ולא 2 כמו במעיכה ולא 0.6 כמו בגזירה או בפיתול.

מאחר שמאמץ המעיכה נלקח מטבלאות אז הוא ביחידות של MPa כלומר יחידות של: $\frac{N}{mm^2}$ ולכן אנחנו חייבים לשנות את יחידות המומנט שמצאנו גם ליחידות מתאימות:

$$M_{bmax}=210mN=210{,}000mmN$$

3. מציאת Z_x מתוך נוסחת המאמץ: $Z_x \geq \frac{M_b}{[\sigma_b]} = \frac{210{,}000}{100} = 2100mm^3$

4. מציאת הקוטר מתוך נוסחת מודול החתך:

$$Z_x = \frac{d^3}{32} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot Z_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2100}{\pi}} = 27.759mm \\ d \geq \sqrt[3]{10 \cdot Z_x} = \sqrt[3]{10 \cdot 2100} = 27.589mm \\ d \geq 2.15\sqrt[3]{Z_x} = 27.532mm \end{cases}$$

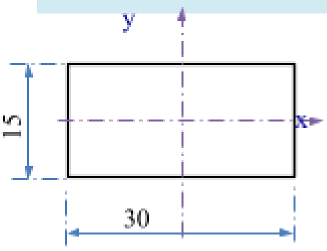
הנוסחה הראשונה היא המדויקת, אך ניתן להשתמש גם בנוסחה השנייה.

בכל מקרה כמובן שנבחר קוטר של d=28mm (ואם לא יהיה אצל הספק קוטר כזה נוכל לבחור כל קוטר גדול יותר.)

בהתעמלות גם מתעמלים על קורות בעלי שטח חתך מלבני ולא מוטות בעלי שטח חתך עגול.

נראה מה יקרה לקורת רוחב מלבנית, עליה מתרגל המתעמל שלנו, שמימדיה הם 15mm×30mm שאת מודול החתך ניתן למצוא בטבלה בסוף הפרק והיא:

$$Z_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{1530^2}{6} = 2250mm^3$$



אנחנו רואים שמודול החתך יצא גדול יותר ממודול חתך עיגולי ואם תציב בנוסחת המאמץ תראה שוודאי שהמאמץ יהיה קטן יותר מהמאמץ שחישבנו.

$$\sigma_{b_{max}} = \frac{M_b}{Z_x} \leq [\sigma_b] \qquad \sigma_{b_{max}} = \frac{210{,}000}{2250} = 93.33MPa < [\sigma_b] = 108MPa$$

מה יקרה אם נציב את המימדים של שטח החתך הפוך?

$$Z_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{3015^2}{6} = 1125mm^3 \quad \sigma_{b_{max}} = \frac{M_b}{Z_x} \leq [\sigma_b] \quad \sigma_{b_{max}} = \frac{210{,}000}{1125} = 186MPa > 108MPa$$

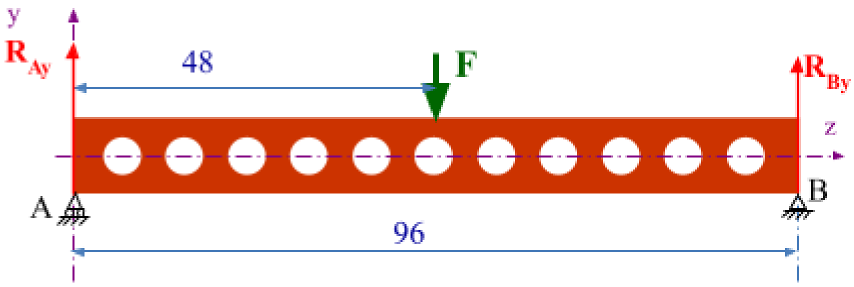
המאמץ שקיבלנו גבוה מהמאמץ המותר כלומר שחומר הקורה יכנע לעומס שיפעיל המתעמל.

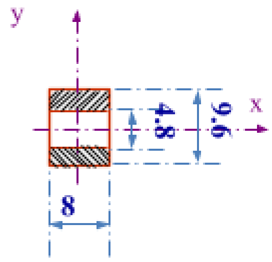
מציאת כוח ומומנט כפיפה מקסימלי משיקולי חומר הקורה ומימדיה:

דוגמת חישוב 1 (כוח אחד כמו פיל על גלגש):

לקורת לגו יש שטח חתך מלבני בעל מימדים של b=8mm ו- h=9.6mm.

מאמץ הכניעה של חומר קורת הלגו הוא σ_y=40MPa. הנח מקדם בטיחות [S]=2.





1. חישוב מאמץ מותר לכפיפה.
2. קבע את המומנט המקסימלי שמותר להפעיל על קורת לגו (ללא הקדחים) בשתי החלופות של רוחב וגובה של הקורה.
3. בחלק מקורות הלגו יש קדחים כמתואר בציור, כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ב' בהתחשב בקדחים אלו כמפורט בסרטוט היטל הצד.
4. שרטט מהלך מומנטי כפיפה וכוח גזירה וקבע היכן פועל המומנט המקסימלי.
5. לפי המומנט המקסימלי מהו הכוח החיצוני F הפועל על הקורה ומהן כוחות התגובה.
6. מצא את כוחות התגובה הפועלים על הקורה.

פתרון:

1. חישוב מאמץ מותר לכפיפה

$$\left[\sigma_t\right] = \frac{\sigma_y}{[S]} = \frac{40}{2} = 20MPa \qquad [\sigma_b] = 1.2[\sigma_t] = 1.2\cdot 20 = \mathbf{24MPa}$$

2. 1. חישוב מודול החתך בשני המצבים:

$$Z_x = \frac{bh^2}{6} = \{b = 8,\ h = 9.6\ \frac{89.6^2}{6} = 122.88mm^3\ b = 9.6,\ h = 8\ \frac{9.68^2}{6} = 102.40mm^3$$

2. חישוב המומנט המקסימלי מתוך נוסחת מומנט הכפיפה:

$$M_{bmax} \le [\sigma_b]\cdot Z_x \Rightarrow \{M_{b_{max}} = 24122.88 = 2949.12mmN\ M_{b_{max}} = 24102.40 = 2457.60mmN$$

אנחנו רואים, שכאשר **גובה החתך גדול יותר**, **המומנט המקסימלי** שמותר להפעיל על הקורה **גדול יותר**.

3. 1. אם יש קדח אז שטח החתך של החומר שמתנגד למומנט הכפיפה קטן יותר. נחשב את Zx_1 של המלבן (שמידותיו מסומנות בחתך) b=8mm ו- h=4.8mm:

$$Z_{x_1} = \frac{bh^2}{6} = \frac{84.8^2}{6} = 30.72mm^2 \qquad Zx_2 = Zx - Zx_1 = 122.88 - 30.72 = \mathbf{92.16mm^3}$$

$M_{bmax} \le [\sigma_b] \cdot Z_x \Rightarrow M_{bmax} \le 24 \cdot 92.16 =$ **2211.84 mmN**2. מציאת מומנט מקסימלי חדש:

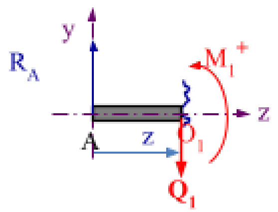
מאחר שהכוח F הוא הכוח היחידי שפועל על קורת הלגו הוא היחידי שיוצר עומס חיצוני על הקורה. ומאחר שהוא פועל בדיוק במרכז הקורה כוחות התגובה יהיו שווים בדיוק לחצי ממנו.

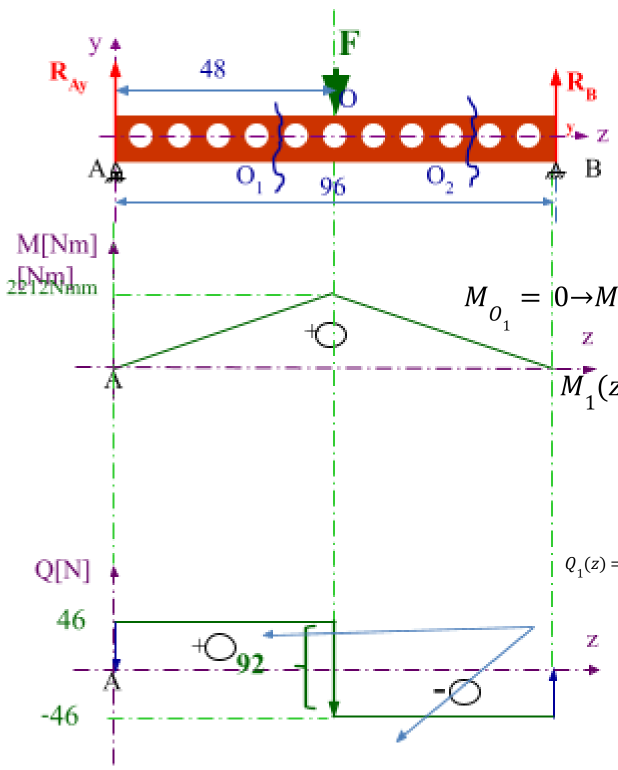
4. חישוב כוחות התגובה – משיקולי סימטריה כוחות התגובה בסמכים שווים כל אחד ל- R:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \qquad \Rightarrow 2R - F = 0 \qquad \Rightarrow R = \frac{F}{2}$$

שרטוט מהלכי מומנטי כפיפה וכוחות גזירה:

חתך 1:





$$M_{O_1} = 0 \rightarrow M_1(z) - R_A z = 0$$

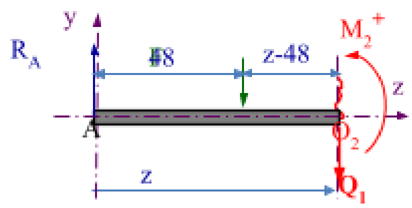
$$M_1(z) = R_A z$$

$$\frac{F}{2}z\{z = 0 \quad M_1 = 0\,Nmm \qquad z = 48\ M_1 = 24F\,Nmm$$

$$Q_1(z) = M_1'(z) = \frac{F}{2}$$

אם נציב את ערך ה- F שנקבל בהמשך נקבל את הגרף הזה:

חתך 2:



$$M_{O_2} = 0 \rightarrow M_1(z) = R_A z - F(z - 48) =$$

$$= \frac{F}{2}z - F(z - 48) = \{z = 48\ M_1 = \frac{F}{2}48 - F(48 - 48) = 24FNmm\ z = 96\ M_1 = \frac{F}{2}96 - F(96 - 48) M_1 = 0Nm$$

מהניתוח שביצענו ברור שהמומנט המקסימלי פועל במרכז הקורה בדיוק היכן שהעומס החיצוני פועל על הקורה.

5. כעת נשווה בין המומנט המקסימלי שקיבלנו מהניתוח המתמטי והגרפי של העומסים וכוחות התגובה על הקורה עם תוצאת המומנט המקסימלי שקיבלנו משיקולי חוזק הקורה:

$$24 \cdot F = 2212 \quad \Rightarrow \quad F = \mathbf{92N}$$

כלומר, הכוח המקסימלי שמותר להפעיל על במרכזה של קורת לגו בעלת קדחים הוא: $\mathbf{F = 92N}$

נחשב את כוחות התגובה באמצעות שיווי משקל מומנטים:

$$\Sigma M_B = 0 \;\Rightarrow\; 96 \cdot R_{Ay} - 48 \cdot F = 0 \quad \Rightarrow \quad 96 \cdot R_A = 48 \cdot 92 \quad \Rightarrow R_{Ay} = \mathbf{46N}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \quad \Rightarrow 46 + R_{By} - 92 = 0 \quad \Rightarrow R_{B_y} = 46N$$

שים לב, מהלכי המומנטים והכוחות בפתרון דוגמה זו זהים לפתרון של פיל על גלגש והוא יותר קצר כי זאת כבר הפעם השנייה שאנחנו פותרים ולכן, וויתרנו על חלק מההסברים.

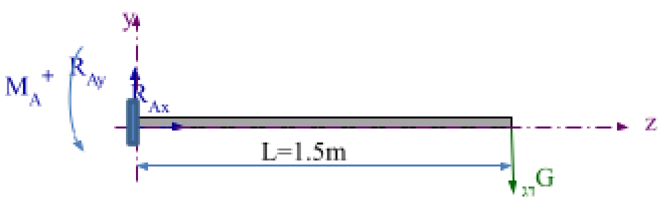
העיוור בכפיפה:

את העיוור בכפיפה ניתן לראות היטב בחכת הדייג. אם מניחים על הקרקע ייתכן שהיא תיראה ישרה לחלוטין. ברגע שמרימים את החכה מן הקרקע מייד רואים שהיא משנה את צורתה במקצת. ואם גם תולים משקולת בקצה (למשל דג) אז בוודאי שהחכה מתכופפת. למעשה אנחנו מכנים את תופעת העיוור בכפיפה בשם: שקיעה. כי הקצה הרחוק של החכה שידנו מחזיקה בקצה האחר שוקע יחסית לקצה בו אנחנו אוחזים. כיצד יתכן שהחכה שוקעת גם כשלא הפעלנו עליה עומס חיצוני, כמו למשל משקל הדג?

ובכן, זה הזמן לגלות מושג חדש. או בעצם להבדיל בין שני מושגים:

עומס נקודתי (מרוכז בנקודה אחת) עומס מפורס (או עומס מחולק) באופן שווה לאורך הקורה, הגשר, החכה, הגל, הסרן או הציר).

נתאר את חכת הדייג בעזרת תיאור סכמטי ודג"ח:



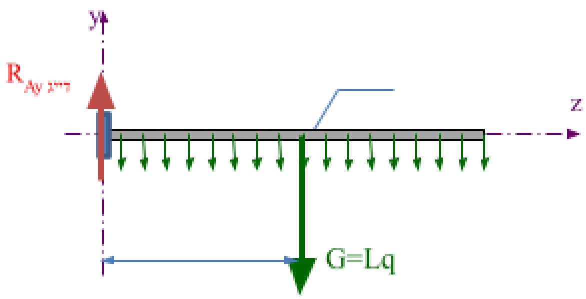
ידיו של הדייג יוצרות מומנט התנגדות למומנט שמכופף את החכה וגורם לקצה הרחוק מהדייג לשקוע. אז אין דג. ובכל זאת אנחנו טוענים שהקצה המרוחק מהדייג ישקע. מה גורם לשקיעה? אלו עומסים חיצוניים פועלים על החכה כאשר אין עליה משקל בקצה? כמובן, לחכה

עצמה יש משקל. וכוח המשיכה של כדור הארץ מושך את החכה למטה. מאחר שהדייג מחזיק את החכה בצד אחד מדוע הקצה השני שוקע?

זוכרים שאמרנו שכוח המשיכה מושך את הגוף כלפי מרכז כדור הארץ. אבל הגוף מורכב מחלקיקים. שכל אחד מהם נמשך אל מרכז כדור הארץ כמתואר באיור הבא:

החץ האדום הוא הכוח שהדייג מתאמץ להחזיק את החכה ישר, למה שווה הכוח הזה?

ומה עוצמת כל הכוחות הקטנטנים, שרק את חלקם המאוד קטנטן ציירנו (פשוט החלקיקים כל כך קטנים שהיינו צריכים לצייר עוד מיליוני חיצים ברווחים בין החיצים הקטנים).

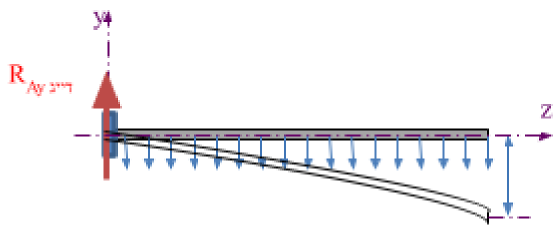


מקובל לסמן את הכוחות הקטנטנים באות q ולהגדיר שהכוח הזה נמדד ביחידות של ניוטון למטר כלומר: $q\left[\frac{N}{m}\right]$

וכדי להבין טוב יותר: נרשום: $G=L\cdot q$. כלומר מכפלת הכוח המפורס באורך הקורה שווה בדיוק למשקל הקורה.

ואכן, ההיגיון אומר שכדור הארץ מושך את החכה, ולכן סכום כל הכוחות הקטנטנים הללו צריך להיות שווה בדיוק למשקל החכה. הדייג מנסה למנוע מהחכה להימשך למרכז כדור הארץ ולכן כוח התגובה שהדייג מפעיל שווה בעוצמתו ומנוגד בכיוונו לכוח המשיכה של כדור הארץ. והיכן פועל שקול כל הכוחות הקטנטנים הללו? בדיוק במרכז הכובד של הקורה היכן שאמור לפעול כוח הכובד.

אז איך נראית שקיעת החכה בעקבות העומס המפורס (משקלה המפורס)?



וכיצד מחשבים בדיוק את השקיעה הזאת מאחר ואולי היא מסוכנת במצבים שונים בהנדסה? ננסה לענות על שאלה זו מיד.

בכפיפה פועלים מאמצי מתיחה בחלק העליון מעל ציר הסימטריה של הקורה ומאמצי לחיצה בחלק התחתון. מאמצים אלו גורמים לתופעת הכפיפה. כלומר לכיפוף הקורה כלומר לשקיעה. וכיצד חישבנו את העיוור במתיחה?

ניזכר:

את ההתארכות חישבנו לפי: $L = \frac{F \cdot L_0}{E \cdot A}$ כלומר, ככל שהכוח והאורך ההתחלתי של החלק שנתון למתיחה גדולים יותר ההתארכות גדולה יותר. מצד שני ככל שמודול האלסטיות קטן יותר ושטח החתך קטן יותר ההתארכות גם תהיה גדולה יותר.

זוכרים? מודול האלסטיות הוא למעשה שיפוע הגרף של מאמץ כפונקציה של עיבור (עיבור=התארכות יחסית) $\sigma_t = E \cdot \varepsilon$. ככל שמודול האלסטיות גדול יותר כך החומר מתארך פחות תחת עומסים גבוהים יותר.

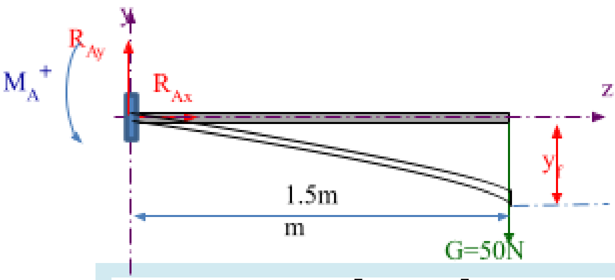
ובכל זאת, כפיפה שונה ממתיחה. מדוע? כי אמנם בכפיפה נוצרים מאמצי מתיחה/לחיצה אבל העומס החיצוני (כוח) על הקורה תמיד יוצר מומנט כפיפה. כמו שבפיתול העומס הוא מומנט פיתול, בכפיפה העומס הוא מומנט כפיפה.

מה הייתה הנוסחה בפיתול? $\phi = \frac{180}{\pi} \bullet \frac{M_t \bullet L}{G \bullet I_o}$

מתיחה ניתן לבצע רק בצורה אחת: הפעלת צמד כוחות מנוגדים בכיוונם על קצות הקורה. אולם כבר ראינו שקורה או גל יכולים להיות עמוסים באופנים שונים. ומסתבר שהאופן שבו אנחנו מעמיסים את הקורה משפיע. כבר ראינו בדוגמאות שאפילו לגובה הקורה יש חשיבות אם נשים את קורת הלגו כך שנחליף בין הגובה לרוחב כמו בדוגמת החישוב האחרונה שפתרנו (כלומר הקורה תהיה בעלת גובה קטן יותר) אז היא תהיה בעלת מודול חתך קטן יותר שמתנגד פחות לכפיפה.

הנוסחה לחישוב השקיעה תלויה באותם מרכיבים כמו של מתיחה בתוספת המרכיבים של פיתול.

נסמן את השקיעה באות y_f (יש המסמנים את השקיעה באות הקטנה f אולם אות זאת שמורה במכניקה הנדסית לחיכוך). אנחנו נסמן את השקיעה באות y כי השקיעה מתבצעת בציר y והיא נובעת כתוצאה מכוח F שיוצר כפיפה (הכוח גורם לשקיעה). במקרה המתואר בציור הכוח שגורם לשקיעה הוא משקל הדג **אם מתעלמים ממשקל החכה.**

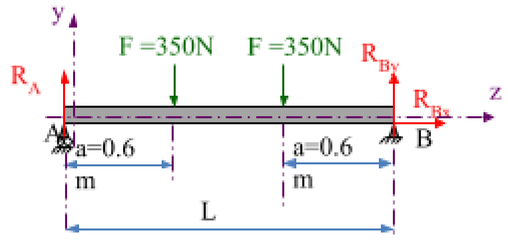


אז נעתיק את הגורמים שמשפיעים על העיווי מנוסחת העיווי במתיחה ומנוסחת העיווי בפיתול ונקבל את הנוסחה הבאה:

$$y_f = \frac{F \cdot L^3}{3E \cdot I} = \left[\frac{\cancel{N} \cdot mm^3}{\frac{\cancel{N}}{mm^2} \bullet mm^4} \right] = mm$$

ובנתוני דוגמת החכה:

$$y_f = \frac{F \cdot L^3}{3E \cdot I} = \frac{50 \cdot 1500^3}{3 \cdot 80000 \cdot \frac{\pi \cdot 20^4}{64}} = 89.5mm$$



ואילו אם היו שני כוחות שווים הפועלים על המתח (שמצאנו את קוטרו $d=28mm$) במרחקים שווים (כמו בדוגמת המתעמל) היינו מקבלים נוסחה שונה במקצת:

$$y_f = \frac{F\cdot a}{24\cdot E\cdot I} \bullet \left(3 \bullet L^2 - 4\bullet a^2\right) = \frac{350\cdot 600}{24\cdot 2\cdot 10^5 \bullet \frac{\pi\cdot 28^4}{64}} \bullet \left(3\bullet 2000^2 - 4\bullet 600^2\right) = 5.31mm \ \mathbf{1}$$

שימו לב לשקיעה יחסית קטנה של מתח המתעמל יחסית לשקיעת חכה.

המשך דוגמת חישוב 1: מהלך מומנטים של בסיס גלגש עם משקל עצמי

בדוגמא זו נראה כיצד מגדירים את פונקצית המומנט ונתאר את הגרף שלה במערכת צירים המציגה את מהלך המומנטים של גלגש עם משקל עצמי ללא משקל הרוכב בנרכז. נגזור את פונקצית המומנט כדי לקבל את פונקצית הכוח ונתאר גם את פונקצית הכוח בגרף של מהלך כוחות הגזירה.

נזכיר: משקל הגלגש הוא למעשה כוח מפורס (מחולק על פני כל אורך הגלגש) ומסומן באיור באמצעות חיצים קטנים ובאות $\mathbf{q}\,\frac{N}{m}$, (ניוטון ליחידת אורך). משקל הגלגש הוא למעשה כוח המשיכה שכדור הארץ מושך את הגלגש $G=L\cdot q$. המשקל פועל במרכז הכובד של הגלגש. נדגיש: Q_1 ו- M_1 הם דימיוניים בגלל החתך הדימיוני שעשינו בחכה (או בקורות שתיארנו בדוגמאות הקודמות). החתך (הדימיוני) יישאר בשיווי משקל כמו כל החכה (או בסיס הגלגש).

פתרון:

שלב א' חישוב כוחות התגובה מתוך משוואות שיווי משקל מומנטים וכוחות על כל החכה:

הערה: כוח התגובה בציר x שווה אפס כי אין שום כוח חיצוני שפועל בכיוון ציר x.

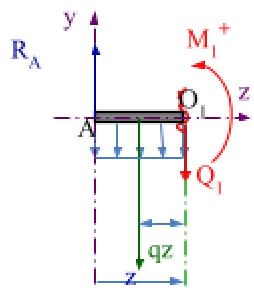
$$G_{גלגש}=q\cdot L=8\left[\frac{N}{m}\right]\cdot 1.5[m]=12N$$

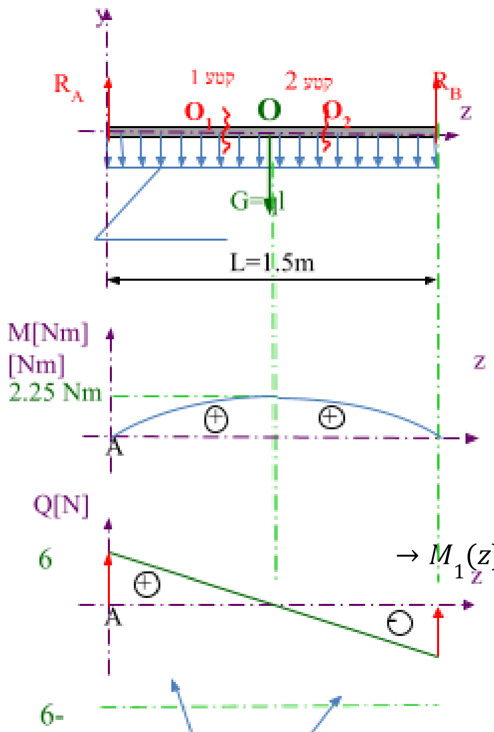
$$\Sigma M_A=0\ \Rightarrow\ L\cdot R_B-\frac{L}{2}G1.5\ \Rightarrow\ 0=_{גלגש}\cdot R_B-\frac{1.5}{2}\cdot 12=0\ \Rightarrow\ R_B=\frac{9}{1.5}=\mathbf{6N}$$

$$\sum F_y=0\ \Rightarrow\ R_A+R_B-G=0\qquad \Rightarrow\ R_A=12-6=6N$$

ברור שכוחות התגובה הם סימטריים יחסית למרכז הכובד ולכן קיבלנו תוצאה זהה.

חתך 1:





$$M_{O_1}=0\rightarrow M_1(z)-R_Az+qz\frac{z}{2}=0\rightarrow$$

$$\rightarrow M_1(z)=6z-8\frac{z^2}{2}\rightarrow M_1(z)=-4z^2+6z\rightarrow$$

$$\rightarrow M_1(z)=\{z=0\qquad M_1=0\,Nm\ z=0.75\ M_1=2.25\,Nm$$

פונקצית המומנט היא פונקציה ריבועית קמורה כי המקדם של z^2 שלילי, כלומר יש לפונקציה מקסימום והיא קמר ששופך מים ולא קערה שאוגרת מים.

נגזור את פונקצית המומנט ונקבל את פונקצית הכוח:

$$Q_1(z)=M_1'(z)\Rightarrow Q_1(z)=\mathbf{-8z+6}$$

פונקצית הכוח חיובית בחצי השמאלי ושלילית בחצי הימני, לכן פונקצית המומנט עולה בחצי הימני ויורדת בחצי השמאלי.

פונקצית המומנט תישאר **זהה** כי **אין** שום **עומס חיצוני** שפועל על בסיס הגלגש למעט הכוח המפורס שפועל כעת על אורך בסיס יותר גדול.

$$=\{z=0\qquad Q_1=6\,N\ z=0.75\qquad Q_1=0N$$

נשאיר לך את הצבת z=1.5m בפונקציות כדי לוודא את הערכים שסימנו בגרפים.

המשך דוגמת חישוב 1: מהלך מומנטים של בסיס גלגש עם משקל עצמי וגם עם משקל הרוכב

פתרון:

שלב א' חישוב כוחות התגובה מתוך משוואות שיווי משקל מומנטים וכוחות על כל החכה:

הערה: כוח התגובה בציר x שווה אפס כי אין שום כוח חיצוני שפועל בכיוון ציר x.

$$G_{\text{גלגש}} = q\cdot L = 8\left[\frac{N}{m}\right]\cdot 1.5[m] = \mathbf{12N}$$

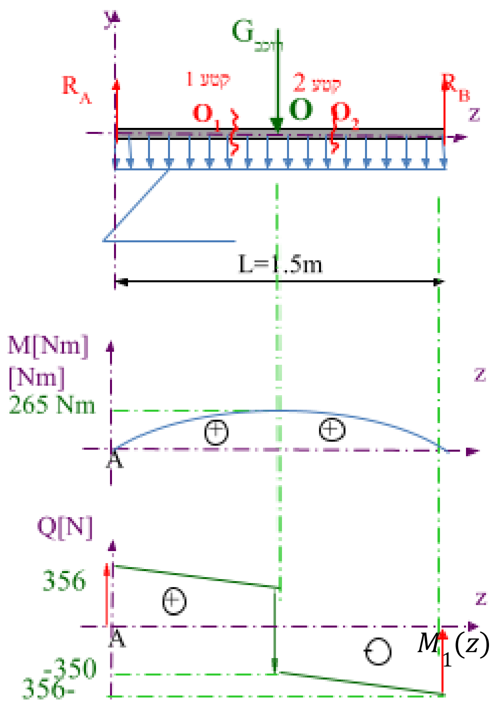
$$\Sigma M_A=0 \;\Rightarrow\; L\cdot R_B-\frac{L}{2}G_{\text{גלגש}}-\frac{L}{2}G_{\text{רוכב}}=0 \Rightarrow 1.5\cdot R_B-\frac{1.5}{2}\cdot 12-\frac{1.5}{2}\cdot 700=0 \Rightarrow R_B=\frac{1.5}{1.52}\cdot 712=$$

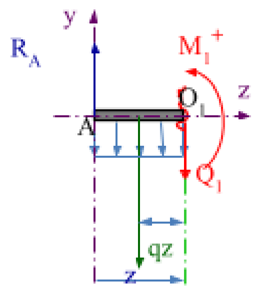
356N

$$\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; R_A+R_B-G_{\text{גלגש}}-G_{\text{רוכב}}=0 \qquad \Rightarrow R_A=712-356=\mathbf{356\ N}$$

ברור שכוחות התגובה הם סימטריים יחסית למרכז הכובד ולכן קיבלנו תוצאה זהה.

חתך 1:





$$M_{O_1}=0 \rightarrow M_1(z)-R_Az+qz\frac{z}{2}=0\rightarrow$$

$$\rightarrow M_1(z)=356z-8\frac{z^2}{2}\rightarrow$$

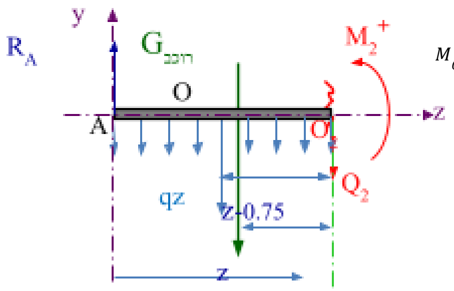
$$\rightarrow M_1(z)=-4z^2+356z$$

$$M_1(z)=\{z=0 \quad M_1=0\,Nm \;\; z=0.75 \;\; M_1=265\,Nm$$

שימו לב גרף הפונקציה דומה רק ערך המומנט גדול יותר. נגזור את פונקצית המומנט ונקבל את פונקצית הכוח:

$$Q_1(z)=M_1'(z)\Rightarrow Q_1(z)=\mathbf{-8z+356}=\{z=0 \qquad Q_1=356\,N \;\; z=0.75 \;\; Q_1=350\,N$$

חתך 2:



$$M_{O_2}=0\rightarrow M_2(z)-R_Az+qz\frac{z}{2}+G(z-0.75)=0$$

$$\rightarrow M_2(z)=356z-8\frac{z^2}{2}-700(z-0.75)$$

$$\rightarrow M_2(z)=-4z^2+356z-700z+525$$

$$\rightarrow M_2(z) = -4z^2 - 344z + 525$$

$$M_2(z) = \{z = 0.75\ M_1 = 265\ Nm\ \ z = 1.5\ M_1 = 0\ Nm$$

נגזור את פונקצית המומנט ונקבל את פונקצית הכוח:

$$Q_2(z) = M_2'(z) \Rightarrow Q_2(z) = \mathbf{-8z-344} = \{z = 0.75\ \ Q_2 = -350\ N\ \ z = 1.5\ Q_2 = -356\ N$$

לכן, המומנט המקסימלי בדוגמא זו הוא: **M_b=265 Nm**

המשך דוגמת חישוב 3: מהלך מומנטים של חכה עם משקל עצמי

בדוגמא זו נראה כיצד מגדירים את פונקצית המומנט ונתאר את הגרף שלה במערכת צירים המציגה את מהלך המומנטים של חכה עם משקל עצמי ללא משקל הדג בקצה. נגזור את פונקצית המומנט כדי לקבל את פונקצית הכוח ונתאר גם את פונקצית הכוח בגרף של מהלך כוחות הגזירה.

נזכיר: משקל החכה הוא למעשה כוח מפורס (מחולק על פני כל אורך החכה) ומסומן באיור באמצעות חיצים קטנים ובאות **q** $\frac{N}{m}$, (ניוטון ליחידת אורך). הכוח השקול של החיצים הקטנים הוא מכפלה של הכוח המפורס באורך החכה ושווה בדיוק למשקל החכה אך במקרה הזה מסמנים אותו באות **G**.

שפועל בדיוק במרכז הכובד של החכה (הישרה). סימנו באיור חתך אחד לפני הנקודה בה פועל G וחתך אחד אחרי הנקודה בה פועל המשקל G. נדגיש: Q_1 הוא כוח דימיוני שנוצר בגלל החתך הדימיוני שעשינו בחכה (או בקורות שתיארנו בדוגמאות הקודמות). הוא דימיוני אבל בחתך עצמו הוא הכרחי כי הוא זה שדואג שהחתך יישאר בשיווי משקל כמו כל החכה (או הקורה).

פתרון:

שלב א' חישוב כוחות התגובה מתוך משוואות שיווי משקל מומנטים וכוחות על כל החכה:

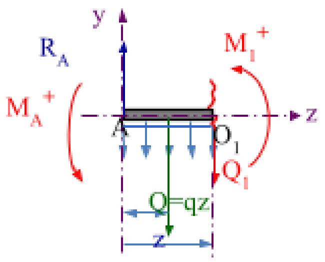
הערה: כוח התגובה בציר x שווה אפס כי אין שום כוח חיצוני שפועל בכיוון ציר x.

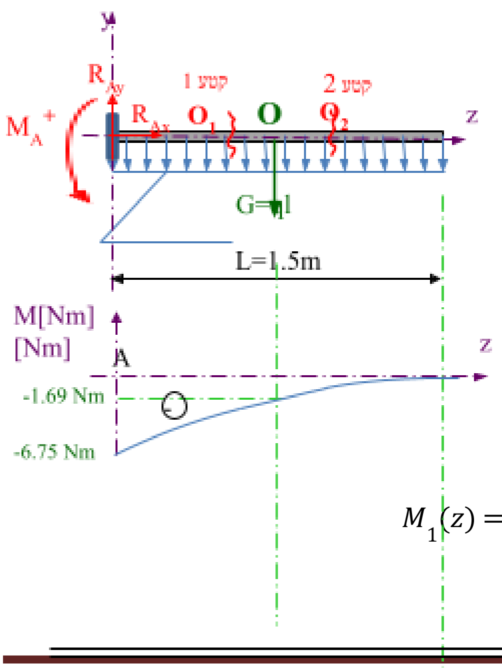
$$G_{\text{חכה}} = q \cdot L = 6\left[\frac{N}{m}\right] \cdot 1.5[m] = \mathbf{9N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - \frac{L}{2} \cdot G_{\text{חכה}} = 0 \Rightarrow M_A - \frac{1.5}{2} \cdot 9 = 0 \Rightarrow M_A = \mathbf{6.75\ N \cdot m}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - G = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \mathbf{9N}$$

חתך 1:





$$M_{O_1} = 0 \rightarrow M_1(z) + M_A - R_A z + qz\frac{z}{2} = 0 \rightarrow$$

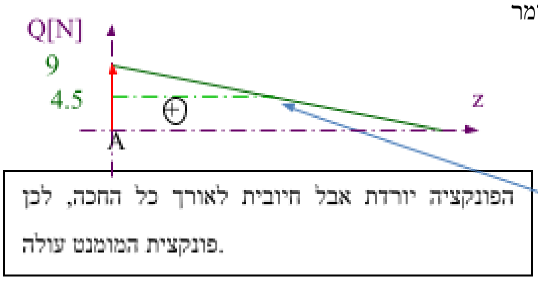
$$\rightarrow M_1(z) = -6.75 + 9z - 6\frac{z^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_1(z) = -3z^2 + 9z - 6.75$$

$$M_1(z) = \{z = 0\quad M_1 = -6.75\ Nm\ \ z = 0.75\ M_1 = -1.69\ Nm$$

פונקצית המומנט היא פונקציה ריבועית עולה כי המקדם של z^2 שלילי, כלומר יש לפונקציה מקסימום והיא קמר ששופך מים ולא קערה שאוגרת מים.

נגזור את פונקצית המומנט ונקבל את פונקצית הכוח:



$$Q_1(z)=M_1'(z) \Rightarrow Q_1(z)=-6z+9$$

$$\{z=0.75\, Q_1=9N \quad z=1.5 \quad Q_1=4.5N$$

מאחר שבהמשך הקורה אין עומסים חיצוניים נוספים מעבר למשקל הקורה פונקצית המומנט תמשיך באופן רציף וניתן רק להציג את הערכים החדשים:

$$M_2(z)=\{z=0.75\; M_1=-1.69\; Nmm\; z=1.5 \quad M_1=0\; Nmm$$

השלמת חישוב חוזק לאחר קביעת המומנט המקסימלי

1. בדוגמא האחרונה של החכה: המומנט המקסימלי הוא: $M_b=-6.75\ Nm$

כעת ניתן לחשב את המאמץ הכולל שפועל כתוצאה המומנט השקול של כל התופעות שפועלות על החכה ולבדוק האם החומר ממנו עשויה החכה, SAE4140, עומד בתנאי החוזק:

$$Z_x=\frac{\pi\cdot d^3}{32}=\frac{\pi\cdot 20^3}{32}=785.4mm^3 \qquad [\sigma_b]=1.2\cdot\frac{\sigma_y}{[S]}=1.2\cdot\frac{700}{2}=420MPa$$

$$\sigma_{b_{max}}=\frac{M_b}{Z_x}\le[\sigma_b]\rightarrow \sigma_{b_{max}}=\frac{6750}{785.4}=8.7MPa<420MPa$$

2. ובדוגמת הגלגש העמוס גם במשקל הרוכב וגם בהתחשבות משקל עצמי של הגלגש, המומנט המקסימלי היה: לכן, המומנט המקסימלי היה: $M_b=265000\ Nmm$

$$Z_x=\frac{\pi\cdot d^3}{32}=\frac{\pi\cdot 20^3}{32}=785.4mm^3 \quad [\sigma_b]=1.2\cdot\frac{\sigma_y}{[S]}=1.2\cdot\frac{40}{2}=48MPa$$

$$Z_x\ge\frac{M_b}{[\sigma_b]}=\frac{265000}{48}=5521mm^3$$

שטח החתך של בסיס הגלגש הוא מלבן שגובהו הוא עובי הבסיס. הנוסחה למודול חתך של מלבן נמצאת בנספח בסוף הספר. נבחר אם כך את רוחב שטח החתך כ- b=250mm ונחשב את גובה שטח החתך (עובי הבסיס):

$$Z_x=\frac{b\cdot h^2}{6}$$

$$5521=\frac{250\cdot h^2}{6}\rightarrow h>\sqrt{\frac{6\cdot 5521}{250}}=11.5mm$$

כלומר אנחנו צריכים לבחור בסיס שעוביו (גובה הפלטה ממנו הוא עשוי) לפחות 12 מילימטרים.

תרגילי סיכום

תרגיל 1

משקולן מחזיק מוט הרמת משקולות, שאורכו 1.6m, בצורה סימטרית. המרחק בין ידיו הוא: 1.2m.

1. שרטט דג"ח של המוט המחבר בין המשקלות בהרמת משקולות. חשב את כוחות התגובה של התומכים (ידיו של המשקולן!) בהנחה שמשקל כל אחת מן המשקולות הוא $G=1000N$ והן תלויות על קצותיו של המוט. משקלו של המוט זניח.
2. בנה מהלך מומנטי כפיפה ומהלך כוחות גזירה. וציין על התרשים את המומנט המקסימלי.
3. החתך של המוט הוא עיגול מלא שקוטרו 30mm. חשב את המאמץ המקסימלי המתפתח בחתכי המוט.
4. המאמץ המותר למתיחה של חומר המוט 100MPa. האם המוט עומד בתנאי חוזק? נמק את תשובתך.

תשובות:

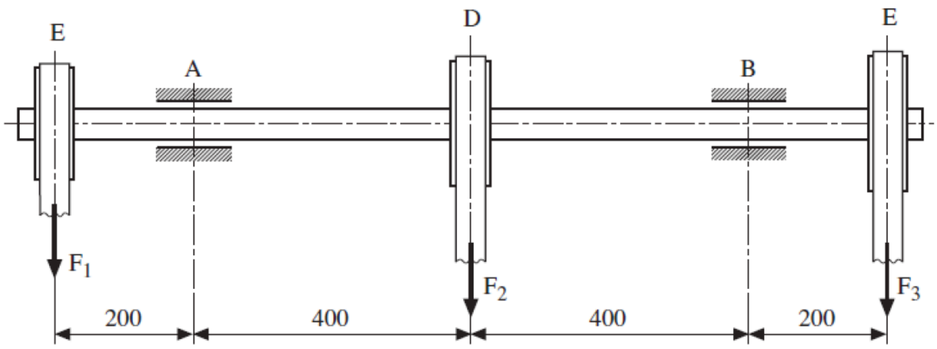
א. כוחות התגובה $R_A=R_B=1000N$ (↑)

2. $M_{bmax}=200N \cdot mm=200000N \cdot mm$

3. $\sigma_{bmax}=75.5MPa$

תרגיל 2

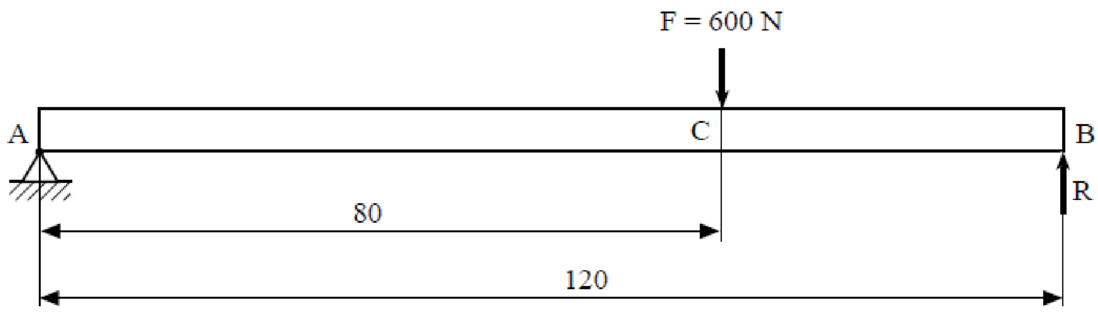
באיור לשאלה מתואר סרן הנתמך בנקודות A ו- B. על הסרן מורכבים שלושה גלגלים. משקלי הגלגלים נתונים להלן: $F_1=50N,\ F_2=80N,\ F_1=100N$.



1. שרטט דג"ח של הכוחות הפועלים במבנה.
2. חשב את כוחות התגובה הפועלים בנקודות A ו- B .
3. תאר את מהלך כוחות הגזירה ומהלך מומנטי הכפיפה בסרן.
4. קבע את מיקומו של המומנט המקסימלי לכפיפה, חשב אותו ומצא את קוטר הסרן הנדרש עבור מאמץ מותר של $[\sigma_t]=200Mpa$

תרגיל 3

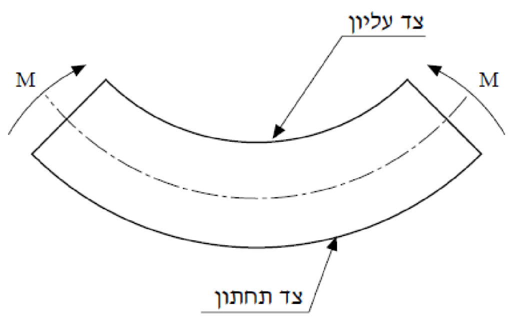
באיור לתרגיל נתונה קורה עליה פועל כוח R_B בנקודה B, וכוח F השווה 1600N בסמך A.



1. בנה דג"ח (דיאגרמת גוף חופשי) של הקורה.
2. מה צריך להיות גודלו של הכוח R_B כדי שהקורה תהיה בשיווי משקל.
3. חשב את כוח התגובה R_A במצב של שיווי משקל.
4. בנה מהלך מומנטי כפיפה ומהלך כוחות גזירה וציין את המומנט המקסימלי.
5. אם נתון שהמומנט המקסימלי הפועל בנקודה C הוא: M_b=16,000mmN, חשב מאמץ הכפיפה המקסימלי הנוצא בחתך הקורה בנקודה C, אם מודול החתך בחתך זה הוא: Z_x=100mm^3

סעיפי אתגר:

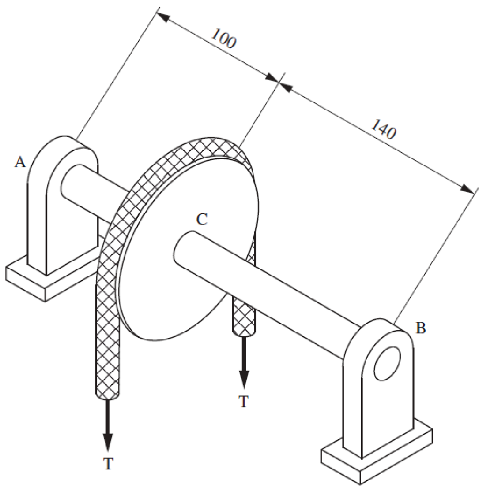
6. חשב את אורך הצלע המינימלי הנדרש לתכנן קורה בעלת חתך ריבועי מלא שאורך צלעו a. כדי שתעמוד בתנאי חוזק כאשר המאמץ המותר למתיחה של חומר הקורה הוא: 120MPa. עגל את הערך שקיבלת עד מספר שלם.



7. באיור ב' לשאלה 15 מתוארת קורה העמוסה בקצותיה על ידי שני מומנטים שווים בגודלם - ומנוגדים בכיוונם. העתק את ההיגד הנכון ונמק את בחירתך:

- הצד העליון של הקורה נתון למתיחה והצד התחתון נתון ללחיצה.
- הצד העליון של הקורה נתון ללחיצה והצד התחתון נתון למתיחה.
- הצד העליון של הקורה והצד התחתון נתונים למתיחה.
- הצד העליון של הקורה והצד התחתון נתונים ללחיצה.

תרגיל 4

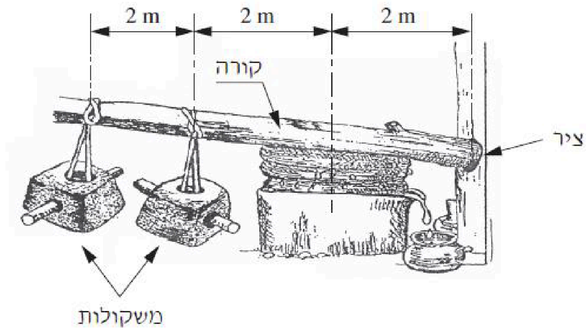


באיור מתואר סרן שאורכו L = 240mm הנתמך על הסמכים A ו - B . על הסרן מותקן גלגל הרמה שמלופף עליו כבל. כוח המתיחה בכבל הוא: T = 120 N . משקל הסרן זניח.

1. שרטט דג"ח של הסרן וחשב את התגובות בסמכים A ו- B.
2. חשב את מומנט הכפיפה בנקודה C
3. חשב את מאמץ הכפיפה בסרן אם נתון שמומנט ההתנגדות של חתך הסרן הוא:

   $Z_x = 700\ mm^3$

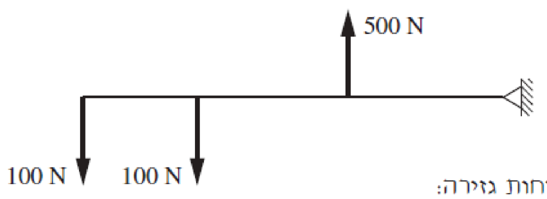
תרגיל 5



באיור א' לשאלה 15 מתואר מתקן קדום להפקת שמן.
באיור ב' לשאלה 15 נתון סרטוט דג"ח של הקורה שבאיור א' עם הכוחות הפועלים עליה.

1. שרטט את דיאגרמה של מהלך כוחות הגזירה ודיאגרמה של מהלך מומנטי הכפיפה, לאורך הקורה מתחת לדג"ח שבאיור ב
2. מהו ערכו של כוח הגזירה המרבי ומהו ערכו של המומנט המרבי הפועלים על הקורה?
3. חשב את הקוטר המזערי הדרוש של הקורה. הנח שלקורה חתך עגול מלא ומאמץ הכפיפה המותר בחומר הקורה הוא:

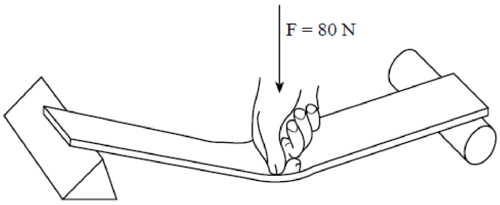
   $[\sigma_b] = 120$ MPa



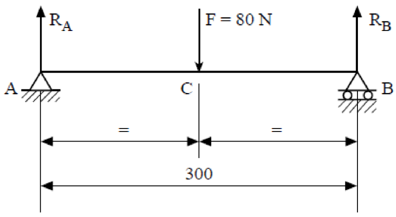
מהלך כוחות גזירה:

תרגיל 6

באיור א' מתוארת כף ידו של אדם המפעיל כוח F בניצב לפני סרגל. קצה אחד של הסרגל מונח על סמך קבוע והשני מונח על סמך נייד. אורך הסרגל הוא 300 מ"מ ועשוי פלדה שהמאמץ המותר בה הוא: $[\sigma_b] = 400\ \text{MPa}$



באיור ב' לשאלה 1 מתואר הדג"ח של הסרגל.



1. חשב את התגובות בסמכים.
2. חשב את מומנט הכפיפה המרבי (המקסימלי) הפועל בנקודה C.
3. נתון כי מודול החתך של הסרגל: $Z_x = 20\text{mm}^3$ חשב את המאמץ המרבי הנוצר בסרגל.
4. קבע אם הסרגל יעמוד במאמץ המרבי ונמק את קביעתך.)התייחס בנימוקך למאמץ המותר).

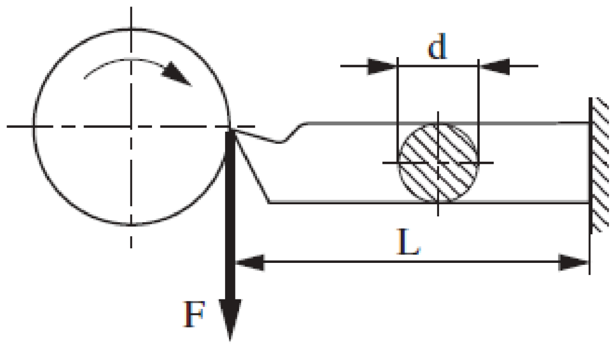
תרגיל 7

באיור מתוארת סכין חריטה בעלת חתך עגול. הסכין נתונה לכפיפה כתוצאה מפעולת החריטה. מתחת לתיאור הסכין נתון מהלך מומנטי הכפיפה לאורך הסכין.

האורך של סכין החריטה: $L = 80\ \text{mm}$

מומנט הכפיפה המרבי בסכין

$M_{max} = 2 \times 105\ \text{N mm}$



א. צייר את מהלך המומנטים.

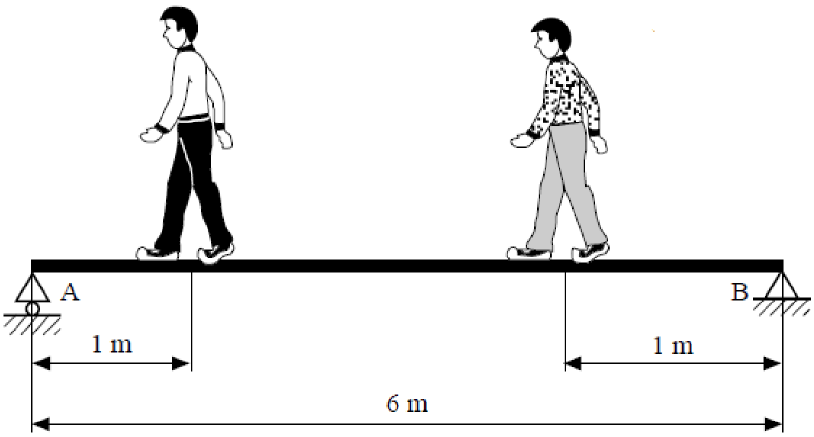
ב. חשב את ערכו של הכוח F הפועל על סכין החריטה.

ג. חשב את הקוטר המזערי הדרוש, d, של חתך הסכין, אם נתון שהמאמץ המותר בחומר הסכין הוא: $[\sigma_t] = 200$ MPa.

תרגיל 8

באיור משקלו של הנער שעומד ליד סמך A הוא W_1=500N והנער שעומד ליד סמך B משקלו W_2=750N.
הקורה בעלת חתך ריבועי מלא שצלעו a=50mm.

1. מצא את כוחות התגובה בסמכים.
2. תאר את מהלך כוחות הגזירה.
3. תאר את מהלך כוחות הכפיפה.
4. קבע מהו המומנט המרבי.



5. חשב את המאמץ המקסימלי לכפיפה בקורה וקבע מאיזה חומר נדרש לייצרה.
6. היכן על הקורה יכולים נערים נוספים, שמשקלם דומה, לעלות על הקורה מבלי שיצטרכו לשנות את חומר הקורה שקבעת בסעיף ה'?

תרגיל סיכום לקינות:

תשבץ ב"סטטיקה וחוזק חומרים"

	5				3		
			4			8	
7			9				1
						2	10
	6		11				
							13
				12			

אנכי

1. כוח המחליף בפעולתו פעולות של כמה כוחות
2. גודל אופייני של מעגל
3. מכפלת כוח בזרוע
4. שינוי צורה ומידות של הגוף
5. מדען אנגלי שעל שמו נקרא אחד מחוקי חוזק חומרים
6. סוג חומר (שם כללי) שאופייני לו δ_y (ולא δ_b)
7. תוצאה של שני כוחות בעלי גודל שווה וכיוונים מנוגדים הפועלים לאורך צירו של הגוף כלפי פנים

אופקי

8. כוח משיכה שפועל בין כל שני גופים
9. $\frac{N}{m^2}$ (יחידת המידה)
10. מוגדר על ידי גודל וכיוון
11. כוח ליחידת שטח
12. תיאור גרפי של שינוי כוח (מומנט) לאורך הגוף
13. תקבל/י לאחר פתירת התשבץ

תשובות לתשבץ ה"סטטיקה וחוזק חומרים"

אנכי

1. שקול
2. קוטר
3. מומנט
4. דפורמציה
5. הוק
6. משיק
7. לחיצה

אופקי

8. כובד
9. פסקל
10. וקטור
11. מאמץ
12. מהלך
13. פרס