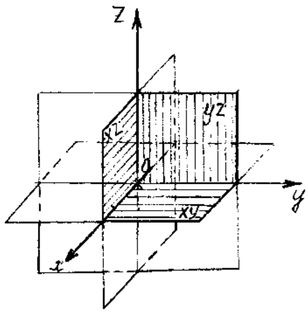
Урок

Тема: Узагальнення навчального матеріалу. Підсумковий урок

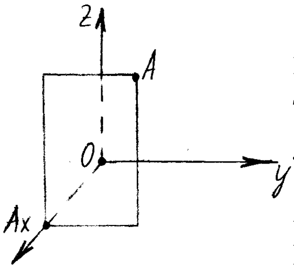
1.Прямокутні координати і вектори в просторі



1. *Прямокутні координати в просторі*

Маємо три взаємно перпендикулярні прямі *x, y,z ,* що перетинаються в одній точці*O*.

Площина, яка проходить через прямі *x* і *y* , називається площиною *xy.* Дві інші –*xz* і *yz.* Прямі *x, y, z* – *координатні осі* , точка *O* – *початок координат* , площини *xy , yz , xz* , - *координатні площини*. Точка *O* розбиває кожну з осей координат на дві півосі. (додатну і від'ємну).



Координатою x точки А є число , яке за абсолютною величиною дорівнює довжині відрізка OA_x : додатне , якщо точка A_x лежить на додатній півосі *x* , і від'ємне , якщо вона лежить на від'ємній півосі. Якщо точка A_x збігається з точкою *O*, то *x=0*. Аналогічно означаються координати *y* і *z* точки *A*. Координати точки записують так: *A(x;y;z)* або *(x;y;z).*

Приклад: Дано точки *A(1;2;3), B(0;1;2), C(0;0;3), D(1;2;0).* Які з цих точок лежать: 1) у площині *xy*; 2) на осі *z*; 3) у площині *yz*?

Розв'язання:

Точки площини *xy* мають координату *z,* яка дорівнює 0. Тому тільки точка *D* лежить у площині *xy*. Точки площини *yz* мають координату *x*, яка дорівнює нулю. Отже, точки *B* і *C* лежать у площині *yz*. Точки на осі *z* мають дві координати (*x* і *y*), які дорівнюють нулю. Тому тільки точка *C* лежить на осі *z.*

Відстань між двома точками $A_1(x_1;y_1;z_1)$ і $A_2(x_2;y_2;z_2)$, дорівнює:

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Приклад: *Знайдіть у площині xy* точку *D (x;y;o),* рівновіддалену від трьох даних точок: *A (0;1;-1), B (-1;0;1), C(0;-1;0).*

Розв'язання:

Маємо: $AD^2=(x-0)^2+(y-1)^2+(0+1)^2$,

$BD^2=(x+1)^2+(y-0)^2+(0-1)^2$,

$CD^2=(x-0)^2+(y+1)^2+(0-0)^2$.

Прирівняємо перші дві відстані до третьої, дістанемо два рівняння для визначення *x* і *y.*

$$-4y+1=0,\ 2x-2y+1=0.$$

Звідси: $y=\frac{1}{4}$, $2x-2\frac{1}{4}+1=0$, $2x-\frac{1}{2}+1=0$, $2x+\frac{1}{2}=0$, $2x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{4}$.

Отже шукана точка *D* ($-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\,0$)

Координати середини відрізка : $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

Приклад: Доведіть, що чотирикутник ABC*D* з вершинами в точках *A(1; 3;2), B(0;2;4), C(1;1;4), D(2;2;2)* є паралелограмом.

Розв'язання:

Паралелограм **-** чотирикутник, діагоналі якого перетинаються і точкою перетину діляться пополам.

Знайдемо координати середини відрізка *AC*:

$$x=\frac{1+1}{2}=1,\quad y=\frac{3+1}{2}=2,\quad z=\frac{2+4}{2}=3.$$

Координати середини відрізка BD:

$$x=\frac{0+2}{2}=1,\quad y=\frac{2+2}{2}=2,\quad z=\frac{4+2}{2}=3$$

Координати середин відрізків AC і BD однакові. Отже, ці відрізки перетинаються і точкою перетину діляться пополам. Тоді чотирикутник *ABCD* – паралелограм.

2. *Вектори у просторі.*

Вектор - напрямлений відрізок.

Модуль вектора – це довжина відрізка, що зображує вектор. (Позначається: $|\vec{a}|$)

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $\vec{a}$ (a_1 ; a_2 ; a_3)

Два вектора *рівні*, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.

Вектор, у якого початок збігається з кінцем, називається *нулевим вектором.*
Координатами вектора з початком у точці $A_1(x_1;y_1;z_1)$ і кінцем у точці $A_2(x_2;y_2;z_2)$ є числа x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1. Позначається вектор: $\vec{a}$ $(a_1;a_2;a_3)$, або $\overrightarrow{(a_1;a_2;a_3)}$

Сумою векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{в}(в_1;в_2;в_3)$ є вектор $\vec{c}(a_1+в_1;a_2+в_2;a_3+в_3)$

Добутком вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ на число λ є вектор ($\lambda\vec{a}(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$.

Скалярним добутком векторів ($\overrightarrow{a_1;a_2;a_3}$) і $\overrightarrow{(в_1;в_2;в_3)}$ є число $a_1\cdot в_1+a_2\cdot в_2+a_3\cdot в_3$.

Як і на площині, скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між векторами. Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\vec{в}=|\vec{a}||\vec{в}|\cos\varphi,$$

Приклад: Дано чотири точки *A (0;1;-1), B (1;-1;2), C(3;1;0), Д(2;-3;1)*. Знайдіть косинус кута ϕ між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

Розв'язання:

Координати вектора $\overrightarrow{AB}:1-0=1,\ -1-1=-2,\ 2-(-1)=3;\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$

Координати вектора $\overrightarrow{CD}:2-3=-1,\quad -3-1=-4,\ 1-0=1;$

$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}$

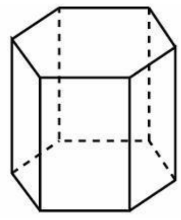
$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{1(-1)+(-2)(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}$$

Отже,

2. Многогранники

Види: Призми, піраміди

Призма

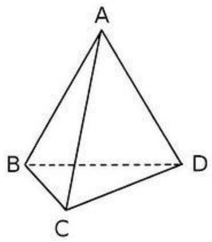


Призма називається **прямою**, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ. В іншому разі – вона похила.

Пряма призма називається **правильною**, якщо її основи є правильними багатокутниками.

Якщо основою призми є паралелограм то вона є паралелепіпедом. Якщо в основі прямого паралелепіпеда прямокутник, то цей паралелепіпед прямокутний.

Піраміда



Піраміда є **правильною**, якщо її основою є правильний багатокутник, а основа висоти збігається з центром цього багатокутника.

Многогранники	**Формули обчислення**	
	Бічної поверхні	**Повної поверхні**
Пряма призма	$S_{біч.} = P_{осс.} \cdot H$ P- периметр основи, H - висота	$S_п = S_{біч.} + 2S_{осн.}$
Куб		$S_п = 6a^2$
Піраміда	Сума площ усіх бічних граней	$S_п = S_{біч.} + S_{осн.}$
Правильна піраміда	$S_б = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot l$ P- периметр основи, *l*- апофема	$S_п = S_{біч.} + S_{осн.}$

№ 2 Бічною гранню правильної чотирикутної призми є квадрат, площа якого дорівнює 16см^2. Обчисліть периметр основи призми

Розв'язання:

$S = 16см^2$, $a = \sqrt{16} = 4см$, (ребро і сторона основи рівні) $P_o = 4 \cdot 4 = 16$см.

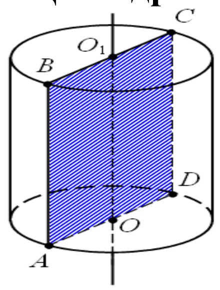
№3. (**Самостійно**) Знайдіть довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда, якщо його лінійні виміри дорівнюють 2см, 4см, 4см.

а) 7см ; б) 5см ; в) 8см ; г) 4см ; д) 6см

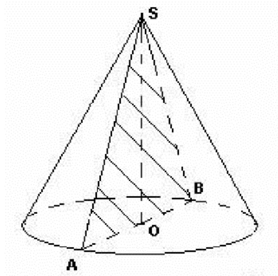
(формула $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ *a,b, c*- лінійні виміри, *d* – діагональ

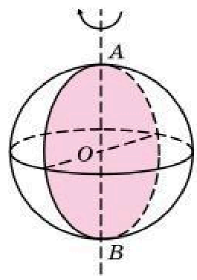
2. Тіла обертання

1. Циліндр **Конус** **Куля**



3.

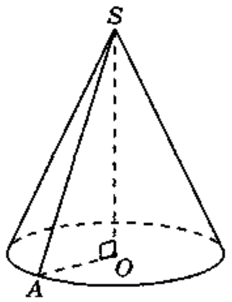




Мал. 7.1

№2. Твірна конуса дорівнює 4см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть радіус основи та висоту конуса

Розв'язання:



За умовою задачі SA = 4 см, ∠SAO = 45° . Потрібно знайти AO і SO. ΔAOS – прямокутний,(∠O = 90°)

За співвідношеннями між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику:

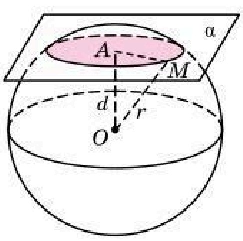
а) $AO = SA\cos\angle SAO = 4 \cdot \cos 45^\circ = 4 \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ см.

б) $SO = SA\sin\angle SAO = 4 \cdot \sin 45^\circ = 4 \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ см.

Відповідь: AO = $2\sqrt{2}$ см, SO = $2\sqrt{2}$ см.

№3. Переріз кулі площиною, віддаленої від її центра на 12см, має площу 25π см^2. Обчисліть радіус кулі

Розв'язання:



За умовою задачі AO = 12 см, S = 25π см^2 Знайдемо радіус перерізу: $S = \pi R^2$, $\pi R^2 = 25\pi$, R = 5см. AM = 5см. З прямокутного трикутника OAM знайдемо радіус кулі OM:

$$OM = \sqrt{AM^2 + OA^2}$$

$$OM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = 13\text{см}.$$

Відповідь: 13 см

Домашнє завдання: Розділ 6, §34-37 (Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підручник для 10 кл. Г. П. Бевз, В. Г. Бевз – К. Видавничий дім «Освіта», 2018)

Частина2. Розділ 1- 2, §1-7 (Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рі
вень стандарту: підручник для 11 кл. О. Істер. – К. : Генеза, 2019), законспектувати

№3д. У правильній трикутній призмі бічне ребро дорівнює 8см, діагональ бічної грані – 10см. Знайдіть сторону основи.

№4д. Твірна конуса дорівнює 18см, а кут між твірною і висотою дорівнює 30°. Знайдіть діаметр основи конуса.