

單擺實驗

1、 目的：

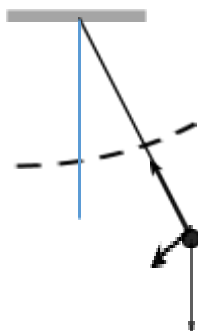
研究單擺週期隨擺長變化之關係，並學習利用手機應用程式讀取實驗訊號。

2、 原理：

當繩子懸掛一物體時，輕推物體會使物體來回擺動。若物體可視為一個質量為 m 的點，繩子長度為 l 且可忽略繩子質量，如圖一所示，則質點 m 的受力總合 $\Sigma \vec{F}$ 可寫成

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} \quad (1)$$

其中， $\vec{g}$ 為重力加速度，地表附近的 g 值約為 9.80 m/s^2 ，指向地心； $\vec{T}$ 為繩子張力，方向指向繩子拉的方向。若擺動時繩子維持伸直且長度不變，則質點 m 在繩子的延伸方向上運動速度、加速度為零，合力也為零。亦即合力 $\Sigma \vec{F}$ 在繩子延伸方向上的分量為零： $-mg \cos \theta + T = 0$ 。其中， θ 為繩子與垂直線夾角。由此可得張力大小 $T = mg \cos \theta$ 。此外，合力方向垂直於繩子張力 $\vec{T}$ 的方向，大小為 $\Sigma F = mg \sin \theta$ 。



圖一、單擺力圖。

由牛頓第二運動定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 可得 $\Sigma F = mg \sin \theta = ma$ ，其中 a 為 m 沿著弧線方向(運動軌跡的切線方向)的加速度。此式可改寫成

$$m \frac{d^2}{dt^2} s - mg \sin \theta = 0 \quad (2)$$

上式中 t 為時間, $s = \theta l$ 為弧線軌跡最低點算起的弧線長度。因此

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\theta l) - mg \sin \theta = 0 \quad (3)$$

或寫成

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta - \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (4)$$

假設擺動的角度幅度不大, 在 θ 相當小時(例如 θ 在 $\pm 5^\circ$ 以內), $\sin \theta \approx \theta$, 因此

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta - \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (5)$$

此一微分方程式的解為

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (6)$$

其中, A 為擺動的幅度(擺動最大角度), ϕ 為時間 $t = 0$ 時的初始相位。而 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 為擺動的角頻率, T 為擺動週期。將(6)式帶進(5)式驗算可得 $\omega^2 = \frac{g}{l}$, 或 $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, 因此可得週期 T 為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7)$$

此結果表示, 在擺動的角度幅度甚小, 繩子質量及空氣阻力影響可忽略, 且質量 m 可視為一“質點”時, 單擺的擺動週期 T 只與擺長 l 及重力加速度 g 有關, 與質點質量 m 無關。

本實驗將使用手機作為重物, 由此練習如何運用數位工具做實驗。利用手機應用程式 `phyphox` 可讀取手機內建的陀螺儀(gyroscope)感測器訊號, 取得瞬時角速率 $\omega(t)$ 隨時間 t 的變化。因為瞬時角速率

$\omega(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$, 與角度 $\theta(t)$ 同樣是週期震盪變化的,

其變化的角頻率一樣是 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, 週期一樣是 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, 因此可由 $\omega(t)$ 來回震盪的時間得到週期 T , 並檢驗在不同擺長長度 l 下, 使用手機(非質點)

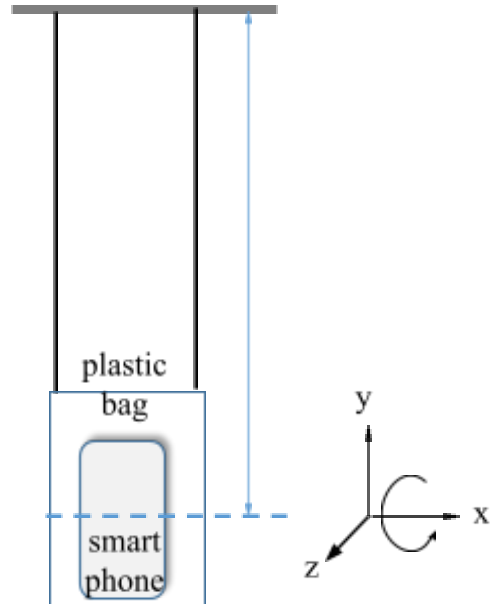
作為擺錘時，其擺動週期與假設質點情況推得的(7)式是否仍吻合。

3、儀器：

智慧型手機(各組自備)、細線、橫桿、夾具、捲尺。



圖二、手機單擺。手機可放塑膠袋中，塑膠袋上緣兩端用兩條細線綁好，固定到橫桿上。兩細線平行，可擺動的長度應一致。



圖三、手機單擺示意圖。手機的內建陀螺儀感測器可以偵測手機在x、y、z三個轉軸的轉動角速率。若手機擺置如上圖，則前後擺動時手機的角度是以x軸轉動。

4、實驗步驟：

(1) 使用智慧型手機 phyphox 應用程式。

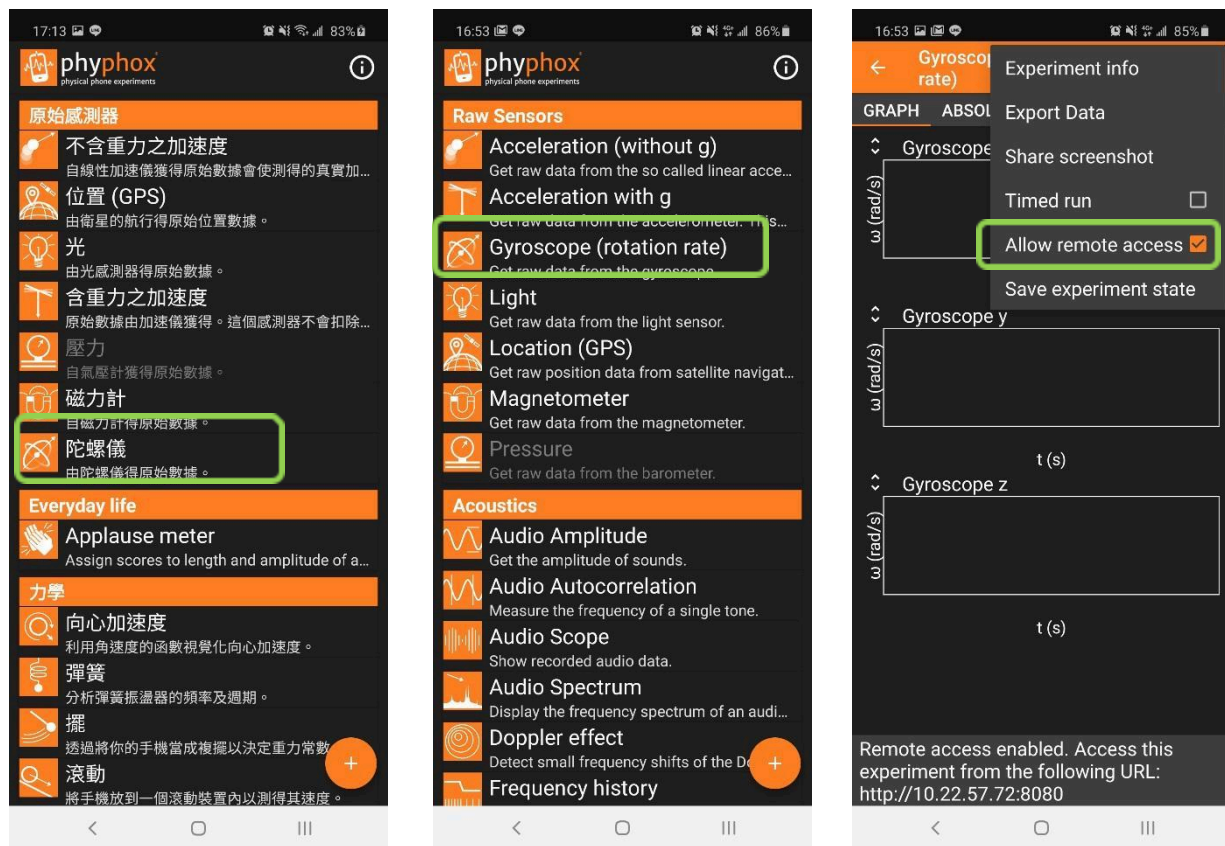
注意：各組需自備智慧型手機，做實驗時務必小心，摔壞不負賠償責任!!

1. 智慧型手機下載 phyphox 應用程式。網址 <https://phyphox.org/>



2. 設定手機 wifi 連線，可與實驗桌上電腦連到同一網路路由器，傳輸速率會較快。wifi路由器密碼請見黑板。
3. 啟動phyphox應用程式，選擇 陀螺儀 (Gyroscope) 實驗，點選右上角的設定(:) 並勾選 允許遠端存取 (Allow remote access)，手機螢幕下方會出現一

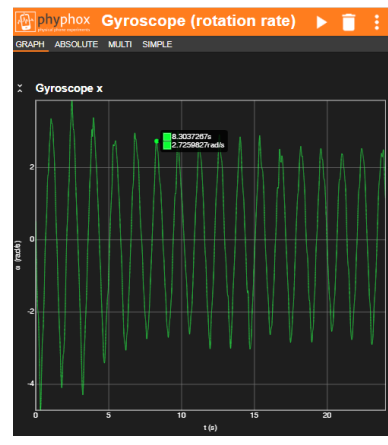
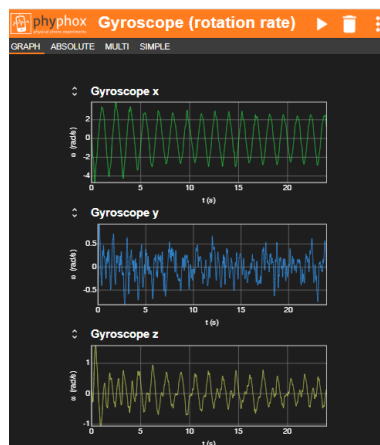
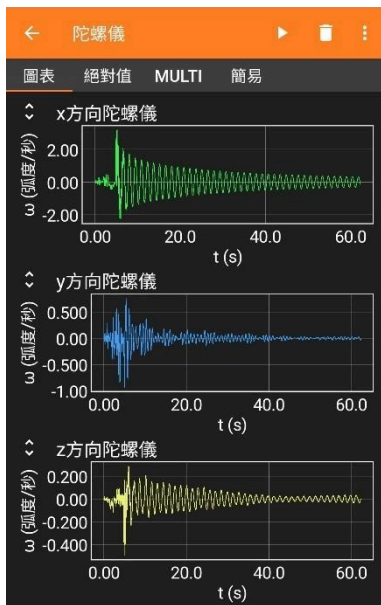
連線網址(例如192.168.x.xx:8080), 如圖四所示。用實驗室電腦開啟此一網址, 應可看到與手機phyphox 應用程式相同的畫面。



圖四、智慧型手機 phyphox 應用程式的選單。(左)中文介面, (中)英文介面。(右)phyphox實驗選單中, 可點選右上角的設定(:)並勾選允許遠端存取(Allow remote access), 下方會出現連線網址。

4. 將橫桿用夾具固定在桌緣。注意:在實驗室移動時小心不要撞到橫桿, 以免受傷。
5. 剪兩段約1.5米長的細線, 將兩細線一端綁緊塑膠袋一角, 另一端取適當的長度綁在橫桿上, 使擺動長度 l 約為60公分。應使兩細線可擺動的長度一致, 手機放入塑膠袋中時兩細線平行, 且手機可自由擺動不碰撞到地面或其他物體。如圖二、圖三所示。以捲尺測量細線綁在橫桿的位置到手機中心高度的實際長度 l 。
6. 點選手機或連線電腦上的執行鍵, 進行陀螺儀數據測量, 如圖五。測量手機在自由擺動時的角速率震盪訊號。至少讀取30個穩定擺動的週期, 並求得平均週期 T 。
7. 用電腦擷取數據圖(圖檔), 貼到Word文件檔中留存。在右上角的設定 (:) 中點選 匯出數據 (Export Data) 將數據傳回電腦存檔留存。建議先點選 暫停 (||) 再回傳數據, 以免傳輸緩慢或產生錯誤。注意:暫停狀態下若沒有立即點其他動作, 電腦連線可能過數秒後自動中斷。重新連線可能使前筆

數據消失。



圖五、在phyphox實驗的介面點選執行 ，可開始讀取 x、y、z 三個轉軸的轉動角速率。(左)中文介面，(中)英文介面。(右)點選數據圖左上角的放大 ，可放大某一數據圖。將滑鼠游標移到數據點上，會顯示該數據點的數值資料。

8. 改變細繩長度，重複步驟5-7，得到至少3組長度 l 及對應的週期 T 。建議的長度為 l 約等於 60 cm, 40 cm, 20 cm (長度應依實際量得的數值紀錄之)。
9. 作圖：由(7)式得知 $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l$ 。以長度 l 為橫軸，週期平方 (T^2) 為縱軸，將數據作圖。數據點是否呈正比的直線？以直線擬合數據，求得斜率。由斜率值應等於 $\frac{4\pi^2}{g}$ 推算出 g 值。
10. 誤差：由步驟5所得的長度 l 用公式(7)求得週期 T ，與步驟6實驗所得的實際週期 T 比較，求兩者間之誤差。

注意事項：

1. 綁線時應確認固定好，以免手機摔落。

5、問題(自選)：

1. 在步驟10，由你的實驗數據比較不同長度條件所測得的實驗週期與(7)式所得的週期 T ，其誤差是否與長度 l 有關？試推測原因。