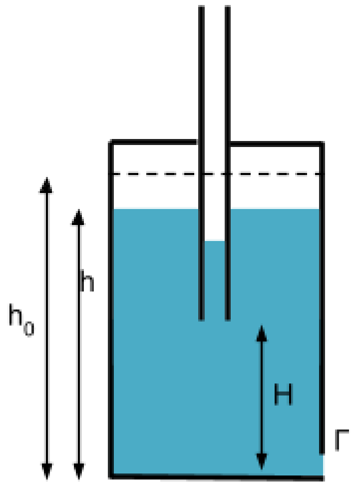
Δοχείο σταθερής παροχής

Σε κυλινδρικό δοχείο εμβαδού A_1, ανοιχτό αρχικά στην ατμόσφαιρα που περιέχει νερό μέχρι ύψος h_0, βιδώνουμε αεροστεγές καπάκι και ανοίγουμε κοντά στον πυθμένα μικρή τρύπα εμβαδού $A_2 << A_1$.



i) α) Θα τρέξει νερό από την τρύπα;

β) Αν τρέξει θα έχει σταθερή ταχύτητα εκροής;

ii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά εισάγουμε στο δοχείο καλαμάκι που η κάτω άκρη του φτάνει σε ύψος H από την τρύπα, όπως στο διπλανό σχήμα και ανοίγουμε την τρύπα. Η στάθμη του νερού μέσα στο καλαμάκι, αρχικά είναι ίδια με αυτή του νερού απέξω, μέσα όμως σε πολύ μικρό χρόνο κατεβαίνει και το καλαμάκι γεμίζει αέρα, ενώ φυσαλίδες αέρα εισέρχονται μέσα στο νερό, που το περιβάλλει.

α) Εξηγείστε γιατί συμβαίνει αυτό.

β) Αποδείξτε ότι η ταχύτητα εκροής θα είναι πλέον σταθερή.

γ) Να δείξετε ότι το ύψος του νερού στο δοχείο μειώνεται με σταθερό ρυθμό.

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση του ύψους h του νερού σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι η στάθμη του να φτάσει στο ύψος H.

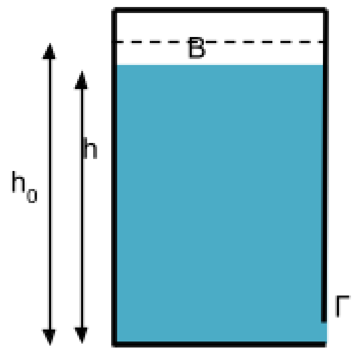
Απάντηση

i) α) Αρχικά ο εγκλωβισμένος αέρας βρίσκεται υπό ατμοσφαιρική πίεση.

Η πίεση αριστερά της τρύπας είναι $p_{αρ} = p_{atm} + \rho g h_0$

ενώ δεξιά είναι $p_{δεξ} = p_{atm}$

δηλαδή $p_{αρ} > p_{δεξ}$ άρα θα υπάρξει ροή.



Σχήμα 1

β) Η εξίσωση Bernoulli για τη ρευματική γραμμή ΒΓ που φαίνεται στο Σχήμα 1 δίνει

$$p_B + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \upsilon_B^{\,2} = p_Γ + 0 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_Γ^{\,2}$$

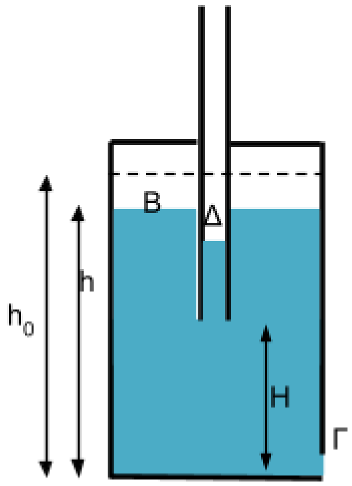
$$\xrightarrow[p_Γ = p_{atm}]{\upsilon_B \approx 0} \upsilon_Γ = \sqrt{2gh + \frac{2(p_B - p_{atm})}{\rho}} \quad (1)$$

Αρχικά $p_B = p_{atm}$ και $h = h_0$. Άρα $\upsilon_{Γ,0} = \sqrt{2gh_0}$ είναι η αρχική ταχύτητα εκροής του νερού από την τρύπα.

Καθώς τρέχει νερό η ποσότητα του εγκλωβισμένου αέρα υφίσταται ισόθερμη εκτόνωση και η πίεση στο σημείο Β συνεχώς μειώνεται, ενώ παράλληλα μειώνεται και το ύψος h του νερού. Από την (1) τότε προκύπτει πως η ταχύτητα εκροής μειώνεται και κάποια στιγμή μηδενίζεται. Εκείνη τη στιγμή στην τρύπα ισχύει για τις εκατέρωθεν πιέσεις

$p_{αρ} = p_{δεξ} \Leftrightarrow p_{αερ} + \rho g h = p_{atm}$

ii) α) Στο Σχήμα 2 φαίνεται η μεταβατική κατάσταση. Στον αέρα που υπάρχει στο καλαμάκι η πίεση είναι ατμοσφαιρική. Με το που αρχίζει η ροή, η πίεση στο σημείο Β πέφτει κάτω από την ατμοσφαιρική, όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Αυτή η διαφορά πίεσης ωθεί τη στάθμη του νερού μέσα στο καλαμάκι προς τα κάτω μέχρι το καλαμάκι να γεμίσει με αέρα, που εισχωρεί με μορφή φυσαλίδων μέσα στο περιβάλλον υγρό. Τότε η κατάσταση μονιμοποιείται όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 2

β) Αν H το ύψος, που έχει το σημείο Δ από την τρύπα, η εξίσωση Bernoulli για τη ρευματική γραμμή ΔΓ που φαίνεται στο Σχήμα 3 δίνει

$$p_Δ + \rho g H + \frac{1}{2}\rho \upsilon_Δ^2 = p_Γ + 0 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_Γ^2$$

$$\xrightarrow[p_Δ = p_Γ = p_{atm}]{\upsilon_Δ \approx 0} \rho g H = \frac{1}{2}\rho \upsilon_Γ^2 \Leftrightarrow \upsilon_Γ = \sqrt{2gH} \quad (2)$$

Η σχέση (2) μας λέει ότι η ταχύτητα εκροής είναι σταθερή, αφού εξαρτάται μόνο από το ύψος H, που έχει το σημείο Δ από την τρύπα.

γ) Η παροχή θα είναι και αυτή σταθερή

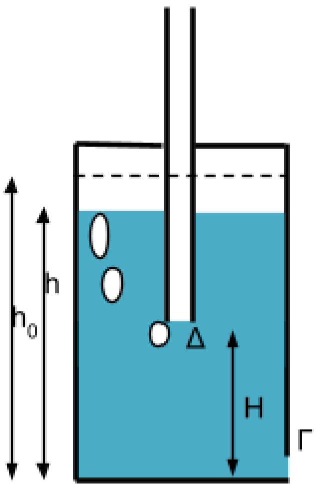
$$Π = A_2 \upsilon_Γ \Leftrightarrow Π = A_2\sqrt{2gH} \quad (3)$$

Όμως

$$Π = \left|\frac{dV}{dt}\right| \Leftrightarrow Π = \frac{d(h_0 A_1 - hA_1)}{dt} \Leftrightarrow Π = A_1 \frac{d(h_0 - h)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow Π = -A_1 \frac{dh}{dt} \xrightarrow{(3)} A_2\sqrt{2gH} = -A_1 \frac{dh}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gH} \quad (4)$$



Σχήμα 3

Άρα το ύψος του νερού στο δοχείο μειώνεται με σταθερό ρυθμό.

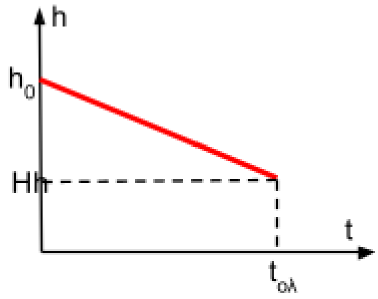
δ) Η (4) μας λέει ότι η σχέση $h \rightarrow t$ θα είναι γραμμική της μορφής $h = at + b$ *(5)* Για $t = 0$, $h = h_0$, άρα η (5) δίνει $b = h_0$. Επίσης

$$α = κλίση \xrightarrow{(4)} α = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gH}$$

Τελικά

$$h = h_0 - \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gH} \cdot t$$

Για $h = H$ είναι $t_{ολ} = \dfrac{(h_0 - h)A_1}{A_2\sqrt{2gH}}$ και η γραφική παράσταση είναι η διπλανή



Παρατήρηση

Όταν η στάθμη του νερού κατέβει κάτω από το ύψος *H*, η πίεση πάνω από την επιφάνεια του νερού είναι πλέον p_{atm} και ισχύει πλέον το θεώρημα του Torricelli, δηλαδή

$\upsilon_Γ = \sqrt{2gh}$ και καθώς το *h* μειώνεται η $\upsilon_Γ$ μειώνεται.

Ανδρέας Ριζόπουλος