Jean-Marie DELORMEJean-Marie.Delorme@univ-orleans.fr
François-Xavier COQ Francois.Coq@ac-orleans-tours.fr
Lycée POTHIER ORLEANS

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

2001 CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES
EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP
PHYSIQUE 1

A- Un exemple simple de servomécanisme à bifurcation mécanique

1.a) Les liaisons étant parfaites, leur puissance est nulle, d'autre part chaque sous système est un solide dont les actions intérieures ont une puissance nulle : **la puissance des actions intérieures est nulle**.

Cette valeur ne dépend pas du référentiel, car la puissance des actions intérieures dépend seulement des mouvements relatifs entre les différentes parties du système.

1.b) Pour des liaisons parfaites : $\boldsymbol{\Gamma}_0 . \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$.

2.a) B est fixé, donc θ est constant et A_1 décrit un cercle centré sur l'axe, donc :

$\mathbf{P} = m\, \mathbf{v}_R(A_1) = m\, \dot{\lambda} \cos\theta\, \dot{\varphi}\, \mathbf{e}_{y'}$.

$\mathbf{L}_O = \mathbf{OA}_1 \wedge m\, \mathbf{v}_R(A_1) = \lambda (\cos\theta\, \mathbf{e}_z + \sin\theta\, \mathbf{e}_{x'}) \wedge m\, \dot{\lambda} \cos\theta\, \dot{\varphi}\, \mathbf{e}_{y'} = m\, \lambda^2 \cos\theta\, \dot{\varphi}\, (-\cos\theta\, \mathbf{e}_{x'} + \sin\theta\, \mathbf{e}_z)$

2.b) Le théorème de la quantité de mouvement donne : $m\, \mathbf{a}_R(A_1) = m\, \mathbf{g} + \mathbf{R}$, donc : $-\mathbf{R} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} + m\, \mathbf{g}$.

Le théorème du moment cinétique conduit à : $-\boldsymbol{\Gamma}_O = -\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} + \mathbf{OA}_1 \wedge m\, \mathbf{g}$.

2.c) Pour avoir **R** indépendant de la rotation, il faut $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0}$, d'où $\mathbf{P} = \mathbf{cste}$, ce qui donne $\dot{\varphi} = \text{cste}$ (ce n'est pas le cas général), ou $\cos\theta = 0$ ou $\dot{\lambda} = 0$. Dans ces deux derniers cas, **A_1 est sur l'axe**.

Pour avoir $\boldsymbol{\Gamma}_O$ selon l'axe, il faut $\mathbf{OA}_1 \wedge m\, \mathbf{g}$ selon l'axe. Or $\mathbf{OA}_1$ est parallèle à l'axe, il faut donc $\mathbf{OA}_1$ parallèle à $m\, \mathbf{g}$, donc A_1 sur l'axe.

Donc avec une seule moitié, les conditions sont irréalisables sauf si A_1 est sur l'axe.

Si le solide est le losange :G est sur l'axe, $\mathbf{P} = 2\, m\, \mathbf{v}_R(G)$ avec $\mathbf{OG} = \lambda \cos\theta\, \mathbf{e}_z = \mathbf{cste}$, donc $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

Donc $-\mathbf{R} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} + 2\, m\, \mathbf{g} = 2\, m\, \mathbf{g}$ **indépendant de la rotation**.

$-\boldsymbol{\Gamma}_O = -\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} + \mathbf{OA}_1 \wedge m\, \mathbf{g} + \mathbf{OA}_2 \wedge m\, \mathbf{g} = -\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$, avec $\mathbf{L}_O = 2\, m\, \lambda^2 \cos\theta\, \dot{\varphi}\, (\sin\theta\, \mathbf{e}_z)$

donc : $\boldsymbol{\Gamma}_O = 2\, m\, \lambda^2 \cos\theta\, [\ddot{\varphi}\, (\sin\theta\, \mathbf{e}_z) - \dot{\varphi}^2 \cos\theta\, \mathbf{e}_{y'}]$.

$\boldsymbol{\Gamma}_O . \mathbf{e}_z = \mathbf{O}$ donne : $\ddot{\varphi} \sin\theta \cos\theta = 0$, d'où $\ddot{\varphi} = 0$ et $\dot{\varphi} = \text{cste}$ donc $\boxed{\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0}$.

2.d) L'énergie cinétique est : $E_k = \frac{1}{2}\, m\, \mathbf{v}_R(A_1)^2 + \frac{1}{2}\, m\, \mathbf{v}_R(A_2)^2 = m\, \ell^2 \cos^2\theta\, \dot{\phi}^2$. L'énergie potentielle de pesanteur est une constante car G est fixe.

Le théorème de la puissance cinétique donne : $\frac{dE_m}{dt} = P_{int} = m\, \mathbf{g}.\mathbf{v}_R(G) + P_{B/S} = 0$. L'énergie mécanique est une constante, l'énergie cinétique aussi, donc $\dot{\phi} = \text{cste} = \dot{\phi}_0$.

Remarque : on n'apprend les notations des vecteurs de base que dans cette question.

3.a) La puissance fournie par le moteur au système est : $P_m = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}$.

Dans R' lié au losange, $\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{0}$, donc $P'_m = 0$.

Dans R, l'action du moteur sur le système n'est pas conservative, donc **l'énergie mécanique ne se conserve pas** : $\frac{dE_m}{dt} = P_m$.

3.b) Dans R', A_1 et A_2 ont des trajectoires circulaires de centre O, à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, donc :

$E'_k = \frac{1}{2}\, m\, \mathbf{v}_{R'}(A_1)^2 + \frac{1}{2}\, m\, \mathbf{v}_{R'}(A_2)^2$, soit : $\boxed{E'_k = m\, \ell^2\, \dot{\theta}^2}$.

3.c) $\underline{E_{p,g} = - 2\, m\, g\, z_G + \text{cste} = - 2\, m\, g\, \ell \cos\theta}$ avec l'origine pour $\theta = \pi / 2$.

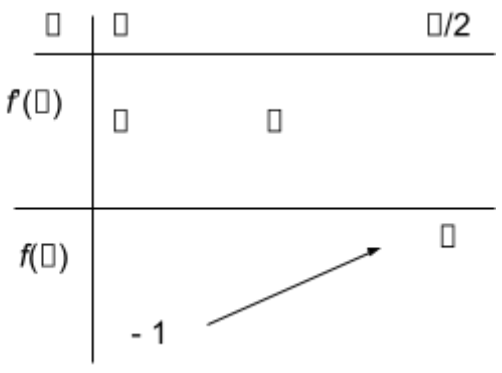
3.d) Dans R', il y a une **force d'inertie d'entraînement** en A_1 et A_2, qui dérive d'une énergie potentielle : $E'_{p,e}(A_1) = - \frac{1}{2}\, m\, \Omega^2\, (GA_1)^2 = E'_{p,e}(A_2)$ car R' est en rotation uniforme autour de l'axe *Oz* de R galiléen. Donc : $\underline{E'_{p,e} = - m\, \ell^2\, \Omega^2 \sin^2\theta}$ car $E'_{p,e} = 0$ si $\theta = 0$.

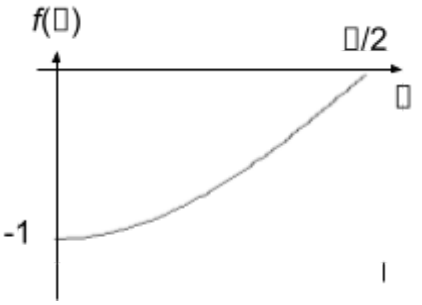
3.e) $_P = - 2\, m\, g\, \ell \cos\theta + m\, \ell^2\, \Omega^2 \sin^2\theta = E_0 \left(- \cos\theta - \frac{u^2}{2} \sin^2\theta\right)$, avec $\boxed{E_0 = 2\, m\, g\, \ell \text{ et } u = \frac{\Omega}{\omega_0}}$.

A.N. : $E_0 = 2{,}94$ J et $\omega_0 = 5{,}7$ rad.s^{-1}.

4.a) A l'équilibre dans R' : $0 = \frac{dE'_P}{d\theta} = \sin\theta\, (1 - u^2 \cos\theta)$. Il y a donc la solution $\theta_1 = 0$ et (si elle existe) la solution θ_2 telle que $\cos\theta_2 = \frac{1}{u^2}$, lorsque $u > 1$.

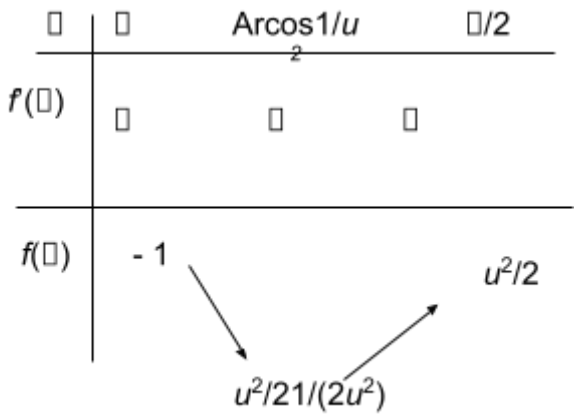
Si $\boldsymbol{u < 1}$:

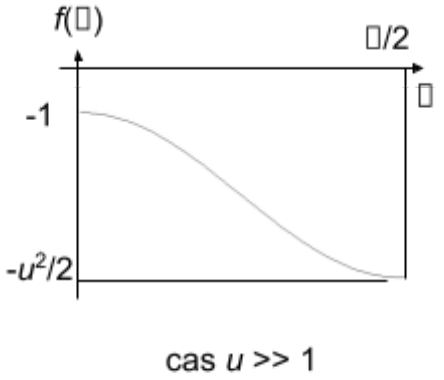




Si $u << 1$: $f(\theta) \approx - \cos\theta$, d'où le graphe ci-contre :

Si $u > 1$:

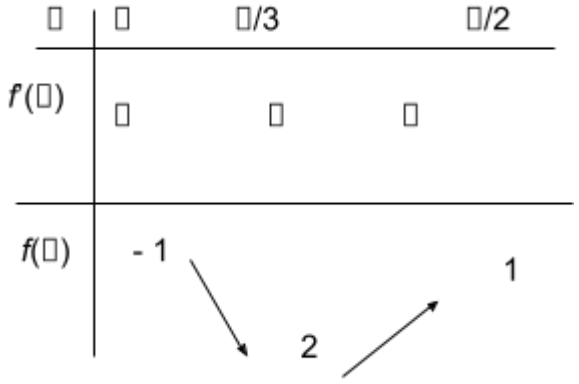


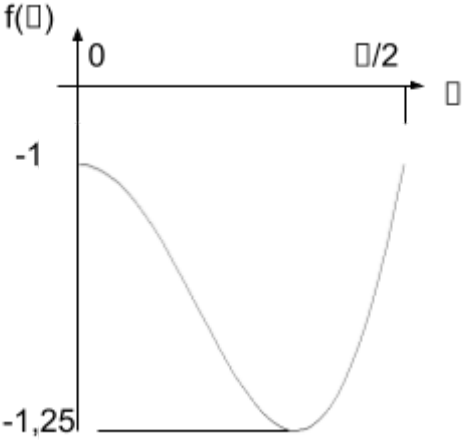


cas $u >> 1$

Si $u >> 1$, le minimum est à peu près à $\pi/2$ et sa valeur est $-u^2/2$.

Si $u = \sqrt{2}$:





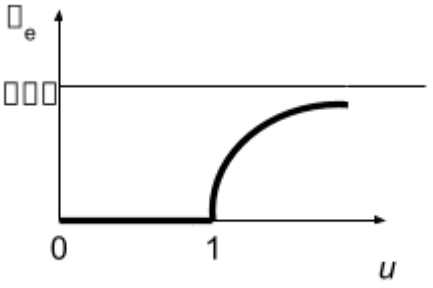
4.b) $\frac{d^2 E'_P}{d\theta^2} = E_0 [\cos\theta - u^2 (2\cos^2\theta - 1)]$.

En $\theta_1 = 0$: $\frac{d^2 E'_P}{d\theta^2} = E_0 (1 - u^2)$ stable si $u < 1$, instable si $u > 1$.

En θ_2 (donc lorsque $u > 1$) : $\frac{d^2 E'_P}{d\theta^2} = E_0 (u^2 - \frac{1}{u^2}) > 0$, donc **stable**.

C'est bien cohérent avec les graphes.

Si $u < 1$: $\theta_e = 0$ et si $u > 1$: $\cos\theta_e = \frac{1}{u^2}$, d'où le gra phe :



On veut $\theta_e = 45$ °, alors $\frac{1}{u^2} = \cos\theta_e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne :

$u = 1{,}19$. Or $\Omega = u\,\omega_0$, donc : $\Omega = 6{,}78$ rad.s^{-1}, ou encore :

$\Omega = 64{,}8$ tr / min.

5 .a) $E_{p,élastique} = \frac{1}{2} K (\Delta\ell)^2$ où $\Delta\ell$ est l'allongement du ressort : $\Delta\ell = (h - z) - \ell_0$. Compte tenu de

$h = \ell_0 + 2\ell$, il vient : $\boldsymbol{E_{p,élastique}} = \frac{1}{2} K (2\ell - z)^2$ avec $z = 2\ell \cos\theta$.

Donc : $\boldsymbol{E_{p,élastique}} = 2\ell^2 m \omega_r^2 (1 - \cos\theta)^2 = \frac{1}{2} E_0 \eta^2 (1 - \cos\theta)^2$ puisque $E_0 = 2 m g \ell$.

Il vient alors : $E_p = E_0 [- \cos\theta - \frac{u^2}{2} \sin^2\theta + \frac{\eta^2}{2} (1 - \cos\theta)^2]$ qu'on peut aussi écrire :

$$E_p = E_0 \eta^2 + E_0 (1 + \eta^2) \left[- \cos\theta - \frac{u^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \sin^2\theta\right]$$

5.b) A une constante près (qui ne change pas les positions d'équilibre), on retrouve l'expression du 3.e) en remplaçant E_0 par $E_0 (1 + \eta^2)$ et u^2 par $\frac{u^2 + \eta^2}{1 + \eta^2}$.

La résolution est donc identique : $\theta_1 = 0$ est toujours une position d'équilibre. Il existe une autre position θ'_2 telle que $\cos\theta'_2 = \frac{1 + \eta^2}{u^2 + \eta^2}$ à condition que $\frac{u^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} > 1$, ce qui donne $u > 1$.

Conclusion : Si $u < 1$, une position d'équilibre : $\theta_1 = 0$ qui est stable

Si $u > 1$, deux positions d'équilibre : $\theta_1 = 0$ qui est instable et θ'_2 qui est stable.

5.c) L'allongement du ressort, pour la position d'équilibre stable θ'_2 est : $\Delta\ell_r = 2\ell (1 - \cos\theta'_2)$, donc :

$$\ell_r = 2\ell \frac{u^2 - 1}{u^2 + \eta^2}.$$

5.d) Pour $\omega_r = \omega_0$, $\eta^2 = 2$. On veut $\theta'_e = 45$ °, donc : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta'_e = \frac{1 + 2}{u^2 + 2}$, d'où :

$u^2 = 2{,}24$ et donc $\Omega = u\,\omega_0 = 8{,}55$ rad.s^{-1} et **$\Omega = 81{,}6$ tr / min**.

B- Influence du rayonnement et de la gravitation dans l'étude d'un gaz parfait

1.a) Pour n moles de gaz parfait monoatomique, il y a $3\,n\,N_A$ degrés de liberté (3 degrés de liberté par atome), d'où une énergie interne: $U = 3\,n\,N_A \frac{1}{2} k_B T$, soit : $U = \frac{3}{2} n R T$.

$C_{vm} = \frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}T} = (3/2) R$; $H_m = U_m + P V = (5/2) R T$, donc : $C_{pm} = \frac{\mathrm{d}H_m}{\mathrm{d}T} = (5/2) R$ et $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} = \frac{5}{3}$.

1.b) $\mathrm{d}U = \delta Q_{rév} + \delta W_{rév} = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V$, ce qui donne : $\mathrm{d}S = \frac{3}{2} n R \frac{\mathrm{d}T}{T} + n R \frac{\mathrm{d}V}{V}$.

$\mathrm{d}S = \mathrm{d}\left(\frac{3}{2} n R \ln T + n R \ln V\right)$, et par intégration : $S(T,V) = \frac{3}{2} n R \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + n R \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \text{cste}$.

La constante dépend des origines choisies.

1.c) Pour une évolution isentropique : S = cste, donc : $\boxed{T^{3/2}\,V = \text{cste.}}$

$\Delta T = T_i \left[\left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{2/3} - 1 \right]$, d'où : $\underline{\Delta T = -157\ \text{K.}}$

1.d) Pour une transformation isotherme du gaz parfait, $\Delta U = 0$, donc : $W = -Q$. La transformation est réversible, donc : $\delta W = \delta W_{\text{rév}} = -P\,\mathrm{d}V = -nRT\,\frac{\mathrm{d}V}{V}$, ce qui donne : $\underline{Q = nRT\ln(10).}$

La variation d'entropie est alors : $\Delta S = \frac{3}{2} nR \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$, d'où : $\underline{\Delta S = nR\ln(10)}$.

Dans l'énoncé de Kelvin, le fluide décrit des **cycles** ($\Delta S = 0$), ce qui n'est pas le cas ici.

1.e) La paroi est rigide et fixe, donc les deux volumes sont invariables. Pour chaque compartiment : $\mathrm{d}S_i = \frac{\mathrm{d}U_i}{T_i}$, donc pour le système : $\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}U_1}{T_1} + \frac{\mathrm{d}U_2}{T_2}$. Le système étant isolé thermiquement et mécaniquement : $0 = \mathrm{d}U = \mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2$, donc : $\mathrm{d}S = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\mathrm{d}U_1$ soit : $C = 1$.

Le système étant isolé thermiquement : $\mathrm{d}S \geq 0$, donc **si $T_1 > T_2$**, $\mathrm{d}U_1 < 0$, **l'échange se fait de 1 vers** 2 (ce qui est normal).

La **condition d'équilibre** est $\mathrm{d}S = 0$, soit : $\boldsymbol{T_1 = T_2}$**.**

$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}U_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$, $\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U_1^{\,2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U_1}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = -\frac{1}{T_1^2}\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}U_1} + \frac{1}{T_2^{\,2}}\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}U_1}$. De plus : $\mathrm{d}U_1 = -\mathrm{d}U_2$ et $\frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}T} = C_{vm}$

d'où : $\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U_1^{\,2}} = -\frac{1}{C_{vm}}\left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^{\,2}}\right)$. Le système est donc **stable si $C_{vm} > 0$**.

2.a) En remplaçant $U = w\,V$ dans la relation donnée, on trouve : $\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T} = \frac{4}{T}$ qui s'intègre en : $\underline{w = a\,T^4}$, où $\underline{a}$ s'exprime en $\underline{\text{J.m}^{-3}.\,\text{K}^{-4}}$.

2.b) $\beta = \frac{1}{kT}$ représente la bande, à partir du niveau fondamental, des niveaux d'énergie effectivement occupés. (*est ce bien du programme ?*)

$w = \int_0^{+\infty} w_\nu\,\mathrm{d}\nu$. on fait le changement de variable $x = \beta h \nu$, d'où : $w = a\,T^4$ avec : $a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3}$.

A.N. : $a = 7{,}53.10^{-16}\ \text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-4}$.

2.c) $\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}U}{T} + \frac{p}{T}\mathrm{d}V$ avec $U = w\,V = a\,T^4\,V$, et $p = \frac{w}{3} = \frac{1}{3}a\,T^4$, donc : $\mathrm{d}S = 4\,a\,T^2\,V\,\mathrm{d}T + \frac{4}{3}\,a\,T^3\,\mathrm{d}V$,

soit encore : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\left(\frac{4}{3}a\,T^3\,V\right)$ et donc : $S = \frac{4}{3}a\,T^3\,V + cste$, d'où : $A = \frac{4}{3}\,a$.

Pour un rayonnement isentropique : $S = \text{cste}$, d'où : $T^3 V = \text{cste}$, de la forme $T V^{\gamma_r - 1} = \text{cste}$, avec $\gamma_r = \frac{4}{3}$.

3.a) $\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}U}{T} + \frac{p}{T}\mathrm{d}V$, avec $\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_{gp} + \mathrm{d}U_r = \frac{n R}{\gamma - 1}\mathrm{d}T + \mathrm{d}\left(a T^4 V\right) + \frac{1}{T}\left(p_{gp} + \frac{1}{3} a T^4\right)\mathrm{d}V$ et $n R T = p_{gp} V$, ce qui donne l'expression demandée avec $\underline{K = T}$, homogène à une température !

3.b) L'expression précédente montre que : $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left(p_r + p_{gp}\right) = \frac{4}{3} a T^3 + \frac{n R}{V}$ ce qui donne par intégration : $S(T,V) = \frac{4}{3} a T^3 V + n R \ln V + f(T)$ en dérivant par rapport à T, à V cste :

$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = 4 a T^2 V + f'(T)$, or : $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T^2}\left(\frac{p_{gp}}{\gamma - 1} + 12 p_r\right) = \frac{n R}{\gamma - 1} + 4 a V T^2$, donc : $f(T) = \frac{n R}{\gamma - 1}\ln T + \text{cste}$ et donc : $S(T,V) = \frac{n R}{\gamma - 1}\ln T + n R \ln V + \frac{4}{3} a T^3 V + cste$.

Les deux premiers termes correspondent à l'entropie du gaz parfait, le troisième l'entropie associée au rayonnement, ce qui était prévisible.

3.c) Pour une évolution isentropique $0 = \mathrm{d}S = \frac{V}{T}\left(\frac{p_{gp}}{\gamma - 1} + 12 p_r\right)\mathrm{d}T + \left(p_{gp} + 4 p_r\right)\mathrm{d}V$, avec $p_{gp} = \alpha\,(p_{gp} + p_r)$, donc : $p_r = \frac{1-\alpha}{\alpha} p_{gp}$. Donc : $0 = \frac{\mathrm{d}T}{T}\left(\frac{1}{\gamma - 1} + 12\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) + \frac{\mathrm{d}V}{V}\left(1 + 4\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$, ce qui donne $0 = \frac{\mathrm{d}T}{T} + (\Gamma - 1)\frac{\mathrm{d}V}{V}$, avec $\Gamma = 1 + \frac{1 + 4\frac{1-\alpha}{\alpha}}{\frac{1}{\gamma - 1} + 12\frac{1-\alpha}{\alpha}} = 1 + (\gamma - 1)\frac{4 - 3\alpha}{\alpha + 12(1-\alpha)(\gamma - 1)}$.

3.d) Pour $\alpha = 0$ (rayonnement seul), on trouve $\Gamma = \frac{4}{3}$ qui est le résultat du 2).

Pour $\alpha = 1$ (gaz parfait seul), on trouve : $\Gamma = \gamma$ ce qui est normal.

pour le GP monoatomique : $C_{vm} = (3/2)\,R$, $C_{pm} = (5/2)\,R$ et $\gamma = 5/3$

pour le GP diatomique : $C_{vm} = (5/2)\,R$, $C_{pm} = (7/2)\,R$ et $\gamma = 7/5$.

4.a) Pour un satellite en mouvement circulaire autour de la terre, la relation fondamentale de la dynamique projetée sur le rayon : $-m\frac{v^2}{r} = -G\frac{m M}{r^2}$, d'où $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{G m M}{2 r}$. Or $E_{p,g} = -\frac{G m M}{r}$, ce qui donne : $2 E_k + E_{p,g} = 0$.

Avec une force de freinage, le théorème de la puissance donne : $\mathrm{d}E_{méca} = P_{frott}\mathrm{d}t < 0$, donc l'énergie mécanique diminue. Or $E_{méca} = E_k + E_{p,g} = -E_k = -(1/2)\,m\,v^2$. Lorsque $E_{méca}$ diminue, la vitesse augmente (et en même temps $E_{p,g}$ diminue et r diminue).

4.b) $U = U_{gp} + E_{p,g} = U_{gp} - 2E_k = n C_{vm} T - 3 n R T$ avec $C_{vm} = R / (\gamma - 1)$, donc :

$U = \dfrac{n\,R\,T}{\gamma - 1}(4 - 3\,\gamma) = n\,C_{\mathrm{vm}}\,T\,(4 - 3\,\gamma)$, d'où $B = C_{\mathrm{vm}}$.

4.c) $C_{vm}^{g} = \dfrac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,T} = n\,C_{vm}\,(4 - 3\,\gamma)$

Si γ = 5/3 (GP monoatomique) : $C_{vm}^{g} = -\,n\,C_{vm} < 0$.

Si γ = 7/5 (GP diatomique) : $C_{vm}^{g} = -\dfrac{1}{5}\,n\,C_{vm} < 0$.

Dans les deux cas, $C_{vm}^{g} < 0$, d'après le B.1.e), **le système est instable**.