

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

2001 CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP PHYSIQUE 1

A- Un exemple simple de servomécanisme à bifurcation mécanique

1.a) Les liaisons étant parfaites, leur puissance est nulle, d'autre part chaque sous système est un solide dont les actions intérieures ont une puissance nulle : **la puissance des actions intérieures est nulle.**

Cette valeur ne dépend pas du référentiel, car la puissance des actions intérieures dépend seulement des mouvements relatifs entre les différentes parties du système.

1.b) Pour des liaisons parfaites : $\mathbf{\Gamma}_0 \cdot \mathbf{e}_z = 0$.

2.a) B est fixé, donc θ est constant et A_1 décrit un cercle centré sur l'axe, donc :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_R(A_1) = m \dot{\phi} \cos\theta \mathbf{e}_{y'}.$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OA}_1 \wedge m \mathbf{v}_R(A_1) = \dot{\phi} (\cos\theta \mathbf{e}_z + \sin\theta \mathbf{e}_{x'}) \wedge m \dot{\phi} \cos\theta \mathbf{e}_{y'} = m \dot{\phi}^2 \cos\theta (\sin\theta \mathbf{e}_z - \cos\theta \mathbf{e}_{x'})$$

2.b) Le théorème de la quantité de mouvement donne : $m \mathbf{a}_R(A_1) = m \mathbf{g} + \mathbf{R}$, donc : $-\mathbf{R} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} + m \mathbf{g}$.

Le théorème du moment cinétique conduit à : $-\mathbf{\Gamma}_O = -\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} + \mathbf{OA}_1 \wedge m \mathbf{g}$.

2.c) Pour avoir $\mathbf{R}$ indépendant de la rotation, il faut $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0}$, d'où $\mathbf{P} = \text{cste}$, ce qui donne $\dot{\phi} = \text{cste}$ (ce n'est pas le cas général), ou $\cos\theta = 0$ ou $\dot{\phi} = 0$. Dans ces deux derniers cas, A_1 est sur l'axe.

Pour avoir $\mathbf{\Gamma}_O$ selon l'axe, il faut $\mathbf{OA}_1 \wedge m \mathbf{g}$ selon l'axe. Or $\mathbf{OA}_1$ est parallèle à l'axe, il faut donc $\mathbf{OA}_1$ parallèle à $m \mathbf{g}$, donc A_1 sur l'axe.

Donc avec une seule moitié, les conditions sont irréalisables sauf si A_1 est sur l'axe.

Si le solide est le losange : G est sur l'axe, $\mathbf{P} = 2 m \mathbf{v}_R(G)$ avec $\mathbf{OG} = \dot{\phi} \cos\theta \mathbf{e}_z = \text{cste}$, donc $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

Donc $-\mathbf{R} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} + 2 m \mathbf{g} = 2 m \mathbf{g}$ indépendant de la rotation.

$$-\mathbf{\Gamma}_O = -\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} + \mathbf{OA}_1 \wedge m \mathbf{g} + \mathbf{OA}_2 \wedge m \mathbf{g} = -\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}, \text{ avec } \mathbf{L}_O = 2 m \dot{\phi}^2 \cos\theta \sin\theta \mathbf{e}_z$$

$$\text{donc : } \mathbf{\Gamma}_O = 2 m \dot{\phi}^2 \cos\theta [\sin\theta \mathbf{e}_z - \cos\theta \mathbf{e}_{x'}].$$

$$\mathbf{\Gamma}_O \cdot \mathbf{e}_z = 0 \text{ donne : } \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta = 0, \text{ d'où } \dot{\phi} = 0 \text{ et } \dot{\phi} = \text{cste} \text{ donc } \boxed{\dot{\phi} = \dot{\phi}_0}.$$

2.d) L'énergie cinétique est : $E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_R(A_1)^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_R(A_2)^2 = m \ell^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2$. L'énergie potentielle de pesanteur est une constante car G est fixe.

Le théorème de la puissance cinétique donne : $\frac{dE_m}{dt} = P_{\text{int}} = m \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_R(G) + P_{B/S} = 0$. L'énergie mécanique est une constante, l'énergie cinétique aussi, donc $\dot{\theta} = \text{cste} = \dot{\theta}_0$.

Remarque : on n'apprend les notations des vecteurs de base que dans cette question.

3.a) La puissance fournie par le moteur au système est : $P_m = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}$.

Dans R' lié au losange, $\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{0}$, donc $P'_m = 0$.

Dans R , l'action du moteur sur le système n'est pas conservative, donc **l'énergie mécanique ne se conserve pas** : $\frac{dE_m}{dt} = P_m$.

3.b) Dans R' , A_1 et A_2 ont des trajectoires circulaires de centre O, à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, donc :

$$E'_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{R'}(A_1)^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{R'}(A_2)^2, \text{ soit : } \boxed{E'_k = m \ell^2 \dot{\theta}^2}.$$

3.c) $E_{p,g} = -2 m g z_G + \text{cste} = -2 m g \ell \cos \theta$ avec l'origine pour $\theta = \pi/2$.

3.d) Dans R' , il y a une **force d'inertie d'entraînement** en A_1 et A_2 , qui dérive d'une énergie potentielle : $E'_{p,e}(A_1) = -\frac{1}{2} m \Omega^2 (GA_1)^2 = E'_{p,e}(A_2)$ car R' est en rotation uniforme autour de l'axe Oz de R galiléen. Donc : $E'_{p,e} = -m \ell^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$ car $E'_{p,e} = 0$ si $\theta = 0$.

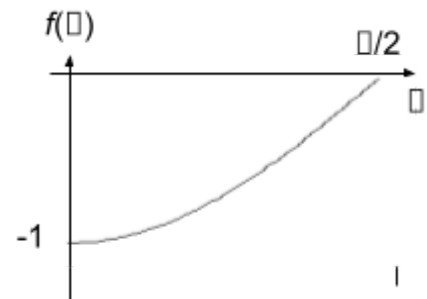
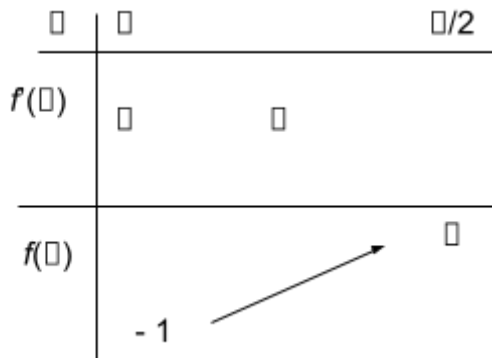
$$\mathbf{3.e)} \quad P = -2 m g \ell \cos \theta + m \ell^2 \Omega^2 \sin^2 \theta = E_0 (-\cos \theta - \frac{u^2}{2} \sin^2 \theta), \text{ avec } \boxed{E_0 = 2 m g \ell \text{ et } u = \frac{\Omega}{\omega_0}}.$$

A.N. : $E_0 = 2,94 \text{ J}$ et $\omega_0 = 5,7 \text{ rad.s}^{-1}$.

4.a) A l'équilibre dans R' : $0 = \frac{dE'_P}{d\theta} = \sin \theta (1 - u^2 \cos \theta)$. Il y a donc la solution $\theta_1 = 0$ et (si elle existe)

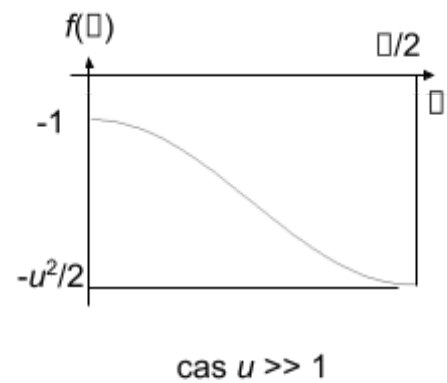
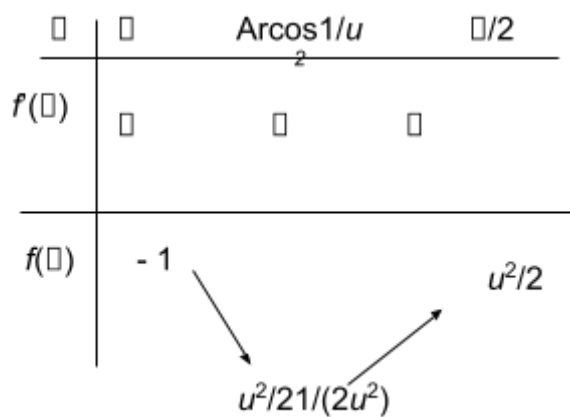
la solution θ_2 telle que $\cos \theta_2 = \frac{1}{u^2}$, lorsque $u > 1$.

Si $u < 1$:



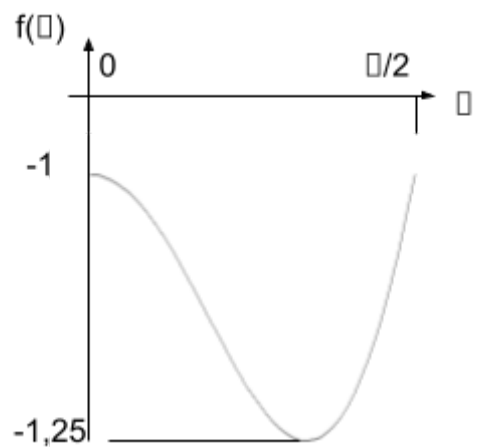
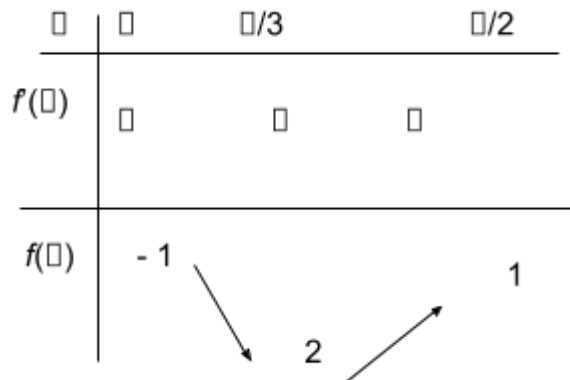
Si $u \ll 1$: $f(\theta) \approx -\cos \theta$, d'où le graphe ci-contre :

Si $u > 1$:



Si $u \gg 1$, le minimum est à peu près à $\pi/2$ et sa valeur est $-u^2/2$.

Si $u = \sqrt{2}$:



4.b) $\frac{d^2 E'_P}{d\theta^2} = E_0 [\cos\theta - u^2 (2 \cos^2\theta - 1)].$

En $\theta_1 = 0$: $\frac{d^2 E'_P}{d\theta^2} = E_0 (1 - u^2)$ stable si $u < 1$, instable si $u > 1$.

En θ_2 (donc lorsque $u > 1$) : $\frac{d^2 E'_P}{d\theta^2} = E_0 (u^2 - \frac{1}{u^2}) > 0$, donc **stable**.

C'est bien cohérent avec les graphes.

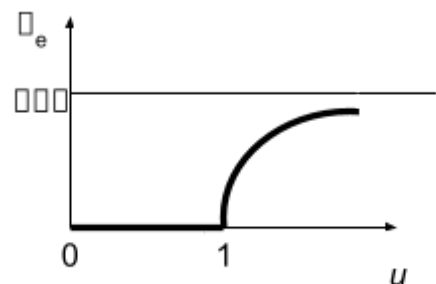
Si $u < 1$: $\theta_e = 0$ et si $u > 1$: $\cos\theta_e = \frac{1}{u^2}$, d'où le graphe :

On veut $\theta_e = 45^\circ$, alors $\frac{1}{u^2} = \cos\theta_e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne :

$u = 1,19$. Or $\Omega = u \omega_0$, donc : $\Omega = 6,78 \text{ rad.s}^{-1}$, ou encore :

$\Omega = 64,8 \text{ tr / min.}$

5.a) $E_{p,\text{élastique}} = \frac{1}{2} K (\Delta\phi)^2$ où $\Delta\phi$ est l'allongement du ressort : $\Delta\phi = (h - z) - \phi_0$. Compte tenu de



$h = \ell_0 + 2\ell$, il vient : $E_{p,\text{élastique}} = \frac{1}{2} K (2\ell - z)^2$ avec $z = 2\ell \cos\theta$.

Donc : $E_{p,\text{élastique}} = 2\ell^2 m \omega_r^2 (1 - \cos\theta)^2 = \frac{1}{2} E_0 \eta^2 (1 - \cos\theta)^2$ puisque $E_0 = 2 m g \ell$.

Il vient alors : $E_p = E_0 \left[-\cos\theta - \frac{u^2}{2} \sin^2\theta + \frac{\eta^2}{2} (1 - \cos\theta)^2 \right]$ qu'on peut aussi écrire :

$$E_p = E_0 \eta^2 + E_0 (1 + \eta^2) \left[-\cos\theta - \frac{u^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} \sin^2\theta \right]$$

5.b) A une constante près (qui ne change pas les positions d'équilibre), on retrouve l'expression du 3.e)

en remplaçant E_0 par $E_0 (1 + \eta^2)$ et u^2 par $\frac{u^2 + \eta^2}{1 + \eta^2}$.

La résolution est donc identique : $\theta_1 = 0$ est toujours une position d'équilibre. Il existe une autre position

θ'_2 telle que $\cos\theta'_2 = \frac{1 + \eta^2}{u^2 + \eta^2}$ à condition que $\frac{u^2 + \eta^2}{1 + \eta^2} > 1$, ce qui donne $u > 1$.

Conclusion : Si $u < 1$, une position d'équilibre : $\theta_1 = 0$ qui est stable

Si $u > 1$, deux positions d'équilibre : $\theta_1 = 0$ qui est instable et θ'_2 qui est stable.

5.c) L'allongement du ressort, pour la position d'équilibre stable θ'_2 est : $\Delta\ell_r = 2\ell (1 - \cos\theta'_2)$, donc :

$$\ell_r = 2\ell \frac{u^2 - 1}{u^2 + \eta^2}.$$

5.d) Pour $\omega_r = \omega_0$, $\eta^2 = 2$. On veut $\theta'_e = 45^\circ$, donc : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta'_e = \frac{1 + 2}{u^2 + 2}$, d'où :

$u^2 = 2,24$ et donc $\Omega = u \omega_0 = 8,55 \text{ rad.s}^{-1}$ et **$\Omega = 81,6 \text{ tr / min}$** .

B- Influence du rayonnement et de la gravitation dans l'étude d'un gaz parfait

1.a) Pour n moles de gaz parfait monoatomique, il y a $3 n N_A$ degrés de liberté (3 degrés de liberté par atome), d'où une énergie interne: $U = 3 n N_A \frac{1}{2} k_B T$, soit : $U = \frac{3}{2} n R T$.

$C_{vm} = \frac{dU_m}{dT} = (3/2) R$; $H_m = U_m + P V = (5/2) R T$, donc : $C_{pm} = \frac{dH_m}{dT} = (5/2) R$ et $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} = \frac{5}{3}$.

1.b) $dU = \delta Q_{\text{rév}} + \delta W_{\text{rév}} = T dS - P dV$, ce qui donne : $dS = \frac{3}{2} n R \frac{dT}{T} + n R \frac{dV}{V}$.

$dS = \frac{3}{2} n R \ln T + n R \ln V$, et par intégration : $S(T, V) = \frac{3}{2} n R \ln T + n R \ln V + \text{cste.}$

La constante dépend des origines choisies.

1.c) Pour une évolution isentropique : $S = \text{cste}$, donc :

$$T^{3/2} V = \text{cste.}$$

$$\Delta T = T_i^{2/3} \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^{2/3} - T_i, \text{ d'où : } \underline{\Delta T = -157 \text{ K.}}$$

1.d) Pour une transformation isotherme du gaz parfait, $\Delta U = 0$, donc : $W = -Q$. La transformation est

réversible, donc : $\delta W = \delta W_{\text{rév}} = -P dV = -n R T \frac{dV}{V}$, ce qui donne : $\underline{Q = n R T \ln(10)}$.

La variation d'entropie est alors : $\Delta S = \frac{3}{2} n R \ln \frac{V_f}{V_i} = n R \ln 10$, d'où : $\underline{\Delta S = n R \ln(10)}$.

Dans l'énoncé de Kelvin, le fluide décrit des cycles ($\Delta S = 0$), ce qui n'est pas le cas ici.

1.e) La paroi est rigide et fixe, donc les deux volumes sont invariables. Pour chaque compartiment :

$dS_i = \frac{dU_i}{T_i}$, donc pour le système : $dS = \frac{dU_1}{T_1} + \frac{dU_2}{T_2}$. Le système étant isolé thermiquement et mécaniquement : $0 = dU = dU_1 + dU_2$, donc : $dS = \frac{1}{T_1} dU_1 - \frac{1}{T_2} dU_1$ soit : $C = 1$.

Le système étant isolé thermiquement : $dS \geq 0$, donc si $T_1 > T_2$, $dU_1 < 0$, l'échange se fait de 1 vers 2 (ce qui est normal).

La condition d'équilibre est $dS = 0$, soit : $T_1 = T_2$.

$\frac{dS}{dU_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$, $\frac{d^2 S}{dU_1^2} = \frac{d}{dU_1} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = -\frac{1}{T_1^2} \frac{dT_1}{dU_1} + \frac{1}{T_2^2} \frac{dT_2}{dU_1}$. De plus : $dU_1 = -dU_2$ et $\frac{dU_i}{dT} = C_{vm}$

d'où : $\frac{d^2 S}{dU_1^2} = -\frac{1}{C_{vm} T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}$. Le système est donc stable si $C_{vm} > 0$.

2.a) En remplaçant $U = w V$ dans la relation donnée, on trouve : $\frac{1}{w} \frac{dw}{dT} = \frac{4}{T}$ qui s'intègre en : $\underline{w = a T^4}$, où a s'exprime en $\text{J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$.

2.b) $\beta = \frac{1}{k T}$ représente la bande, à partir du niveau fondamental, des niveaux d'énergie effectivement occupés. (est ce bien du programme ?)

$w = \int_0^\infty w_v dv$. on fait le changement de variable $x = \beta h v$, d'où : $w = a T^4$ avec : $a = \frac{8 \pi^5 k^4}{15 c^3 h^3}$.

A.N. : $a = 7,53 \cdot 10^{-16} \text{ J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$.

2.c) $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$ avec $U = w V = a T^4 V$, et $p = \frac{w}{3} = \frac{1}{3} a T^4$, donc : $dS = 4 a T^2 V dT + \frac{4}{3} a T^3 dV$, soit encore : $dS = d \left(\frac{4}{3} a T^3 V \right)$ et donc : $S = \frac{4}{3} a T^3 V + \text{cste}$, d'où : $A = \frac{4}{3} a$.

Pour un rayonnement isentropique : $S = \text{cste}$, d'où : $T^3 V = \text{cste}$, de la forme $T V^{\gamma_r - 1} = \text{cste}$, avec $\gamma_r = \frac{4}{3}$.

3.a) $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$, avec $dU = dU_{gp} + dU_r = \frac{n R}{\gamma - 1} dT + d(p_r V) + \frac{1}{T} dU_{gp} + \frac{1}{3} a T^4 dV$ et $n R T = p_{gp} V$, ce qui donne l'expression demandée avec $K = T$, homogène à une température !

3.b) L'expression précédente montre que : $\frac{dS}{dT} = \frac{1}{T} (4 p_r + p_{gp}) = \frac{4}{3} a T^3 + \frac{n R}{V}$ ce qui donne par intégration : $S(T, V) = \frac{4}{3} a T^3 V + n R \ln V + f(T)$ en dérivant par rapport à T , à V cste :

$\frac{dS}{dT} = 4 a T^2 V + f'(T)$, or : $\frac{dS}{dT} = \frac{V}{T^2} \left(\frac{p_{gp}}{\gamma - 1} + 12 p_r \right) + \frac{n R}{V} + 4 a V T^2$, donc : $f(T) = \frac{n R}{\gamma - 1} \ln T + \text{cste}$ et donc :

Les deux premiers termes correspondent à l'entropie du gaz parfait, le troisième l'entropie associée au rayonnement, ce qui était prévisible.

3.c) Pour une évolution isentropique $0 = dS = \frac{V}{T} \left(\frac{p_{gp}}{\gamma - 1} + 12 p_r \right) dT + dU_{gp} + 4 p_r dV$, avec $p_{gp} = \alpha (p_{gp} + p_r)$, donc : $p_r = \frac{1 - \alpha}{\alpha} p_{gp}$. Donc :

$$0 = \frac{dT}{T} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dV}{V}, \text{ avec } \Gamma = 1 + \frac{1 + 4 \frac{1 - \alpha}{\alpha}}{\frac{1}{\gamma - 1} + 12 \frac{1 - \alpha}{\alpha}} = 1 + \frac{4 - 3\alpha}{\alpha + 12(1 - \alpha)}$$

3.d) Pour $\alpha = 0$ (rayonnement seul), on trouve $\Gamma = \frac{4}{3}$ qui est le résultat du 2).

Pour $\alpha = 1$ (gaz parfait seul), on trouve : $\Gamma = \gamma$ ce qui est normal.

pour le GP monoatomique : $C_{vm} = (3/2) R$, $C_{pm} = (5/2) R$ et $\gamma = 5/3$

pour le GP diatomique : $C_{vm} = (5/2) R$, $C_{pm} = (7/2) R$ et $\gamma = 7/5$.

4.a) Pour un satellite en mouvement circulaire autour de la terre, la relation fondamentale de la dynamique projetée sur le rayon : $-m \frac{v^2}{r} = -G \frac{m M}{r^2}$, d'où $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{G m M}{2 r}$. Or $E_{p,g} = -\frac{G m M}{r}$, ce qui donne : $2 E_k + E_{p,g} = 0$.

Avec une force de freinage, le théorème de la puissance donne : $dE_{méca} = P_{frott} dt < 0$, donc l'énergie mécanique diminue. Or $E_{méca} = E_k + E_{p,g} = -E_k = -(1/2) m v^2$. Lorsque $E_{méca}$ diminue, la vitesse augmente (et en même temps $E_{p,g}$ diminue et r diminue).

4.b) $U = U_{gp} + E_{p,g} = U_{gp} - 2 E_k = n C_{vm} T - 3 n R T$ avec $C_{vm} = R / (\gamma - 1)$, donc :

$$U = \frac{n R T}{\gamma - 1} (4 - 3 \gamma) = n C_{vm} T (4 - 3 \gamma), \text{ d'où } B = C_{vm}.$$

4.c)
$$C_{vm}^g = \frac{dU}{dT} = n C_{vm} (4 - 3 \gamma)$$

Si $\gamma = 5/3$ (GP monoatomique) : $C_{vm}^g = - n C_{vm} < 0$.

Si $\gamma = 7/5$ (GP diatomique) : $C_{vm}^g = - \frac{1}{5} n C_{vm} < 0$.

Dans les deux cas, $C_{vm}^g < 0$, d'après le B.1.e), **le système est instable.**